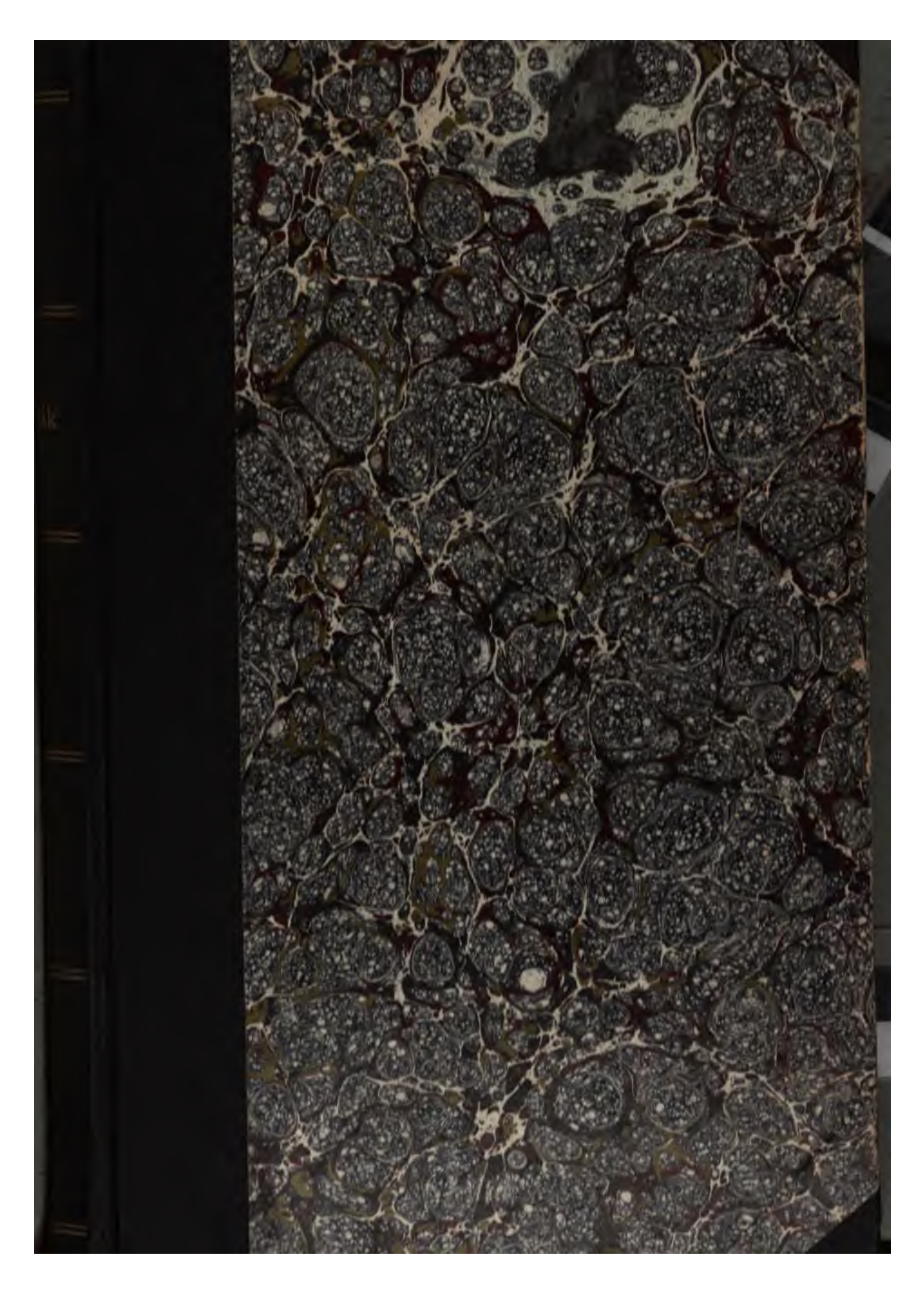








[redacted]

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe,

Dr. ph. Prof. an d. Univ. Berlin.

Zweite Reihe.

Vierter Teil.

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

J. Sengbusch.

1886.

[redacted]

Inhalts-Verzeichnis

des vierten Teils.

№ der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Arithmetik, Algebra und reine Analysis ohne Integralrechnung.		
II.	Einige Bemerkungen über vollkommene Zahlen. Von G. Valentin	I.	100
II.	Ueber die Bestimmung der reellen Wurzeln trinomischer Gleichungen. Von Th. Baumgardt . .	I.	103
II.	Zur Summation endlicher Reihen von der Form $\Sigma k u^k$. Von Heinrich Simon	I.	107
III.	Die Modulargleichungen der Galois'schen Moduln der 2. bis 5. Stufe. Von Georg Friedrich .	II.	113
VI.	Symmetrische und complementäre Verteilung der Indexsummenreste τ für Primzahlen der Form: $p=2^{2^\mu}+1$. Von Hermes	II.	207
XI.	Eine einfache Darstellung der Resultante von zwei quadratischen Formen. Von Fritz Hofmann .	III.	325
XI.	Ueber Producte aus ganzen Zahlen. Von B. Sporer	III.	332
XV.	Fortsetzung	IV.	434
XV.	Schüleranfgabe. Von Emil Hain	IV.	448
	Integralrechnung.		
VIII.	Transformationen der elliptischen Integrale und Functionen in Verbindung mit der Theorie der Kettenlinie. Von Emil Oekinghaus	III.	225

№ der Abhandlung.		Heft.	Seite.
IX.	Elliptische Integralfunctionen und ihre geometrische, analytische und dynamische Bedeutung. Von Emil Oekinghaus	III.	279
XIII.	Ueber singuläre Punkte der gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichungen 1. Ordnung. Von C. F. E. Björling	IV.	358
XIV.	Theorie der Thetafunctionen einer Veränderlichen, deren Charakteristiken sich aus gebrochenen Zahlen zusammensetzen lassen. Von Richard Voss	IV.	385

Geometrie der Ebene.

II.	Teilung einer Geraden nach dem goldenen Schnitt. Von M. Weidenholzer	I.	106
VII.	Analytisch specifische Grössen des Vierecks. Von R. Hoppe	II.	224
X.	Ueber die Curven vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten. Von P. H. Schoute	III.	308
XI.	Ein geometrischer Satz. Von B. Sporer	III.	323
XI.	Lehrsätze vom Sehnenvierecke. Von Franz Schiffner	III.	325
XI.	Ein Vierecksatz. Von R. Hoppe	III.	330
XI.	Beweis des vorstehenden Vierecksatzes. Von F. August	III.	330
XI.	Zur Construction der Ellipse mit Benutzung von Krümmungskreisen. Von Franz Schiffner	III.	331
XV.	Zur Figur des Feuerbach'schen Kreises. Von W. Godt	IV.	436
XV.	Der Krümmungskreis der Ellipse. Von R. Hoppe	IV.	443

Geometrie des Raumes.

V.	Ueber die Pascal'sche Spirale. Von Anton Sucharda	II.	197
VII.	Zur Theorie der Volumsbestimmungen. Von Franz Rogel	II.	218
XI.	Conforme perspective Projection der Flächen aufeinander. Von R. Hoppe	III.	328

[redacted]

№ der Abhandlung. Heft. Seite.

XI. Analytischer Beweis zweier Sätze von regelmässigen Pyramiden und Polyedern. Von R. Hoppe . . IV. 441

Mechanik.

I. Theorie des Gaussischen Pendels mit Rücksicht auf die Rotation der Erde. Von H. Samter . . . I. 1

IV. Anziehung eines der Kugel analogen Gebildes von n Dimensionen auf einen Punkt. Von R. Hoppe II. 185

Optik.

XV. Ueber Refractionscurven. Von Emil Oekinghaus . . . . IV. 429

Physik.

XII. Ueber Verteilung und Strömung der Elektricität auf dem Parallelepipedon. Von H. Niebour . . IV. 337

Litterarische Berichte.

XIII. Gauss (El. Math.). Kaulich (kaufm. Ar.). Recknagel (Geom.). Uth (Plan.). Stegmann (Lengauer) (eb. Geom.). Grosse-Bohle (eb. Geom.). Petersen (Fischer-Benzon) (eb. Trig. — Ster.). Wrobel (Ster. — Mech.). Walberer. (Mech.). E. R. Müller (Aufg.). Wiese u. Lichtblau (Aufg.). Harms u. Kallius (Rechb.). Pachmeyer (Tab. Zins.). Teixeira (J. VI.).

XIV. Aufruf (Einh. Sch.). Mach (Bild. W.). Siemens (Sonn. En.). Günther (Geoph. II. — math. Geogr.). Kiessling (Dämm.). Fr. Müller (Kal. Tab.). Littrow (astr. K.). Cornelius (ph. Geogr.). Suchsland (el. Met.). Köppen (Ztschr. II.).

XV. Reidt (Anl. Unt.). Simon (Ar.). Elsas (Psychoph.). Schellwien (opt. Har.). Mittag-Leffler (A. M. VII.). Amsterdam Nieuw Arch. (XII.). Versl. en Meded. (I.). Smiths Inst. (Rep. 1883.). Wash. Phil. Soc. (Bull. VII.). Hamb. Math. Ges. (Mitt. VI.). Viola (math. Soph.).

XVI. Servus (Gesch. Fernr.). Netoliczka (Gesch. Elektr.). Urbanitzky (Gesch. Elektr. Magn. im Alt.). Bebber (Gesch. Witt. K.). Boncompagni (Bull. XVIII. — Petr. de Dac.). Eneström (Goldbach — Eukl. schw.). Wisk. Gen. (Regist.). Huyghens (Corresp.). Krimmel (Nagel). Chauchy (Itzigsohn) (alg. An.). Autenheimer (Diff. Int.). Baerlocher (Zins.). Kürten (mag. Qu.). Vormung (red. Quers.). Sylvester (Am. J. VIII.). Brüssel Ak. (Bull. 2. R. XLVI bis 3. R. VIII.).

[redacted]

Berichtigungen im 4. Teil.

S. 108	Z.	7	v. unt.	statt	Σ	setze	$\sum\limits_{1}^{n}$	
	„	6	„	„	ist und	setze	ist, und	
			Das Wort Anwendungen gehört unter beide Zeilen als Ueberschrift.					
S. 109	Z.	7	v. ob.	statt	st	setze	ist	
	„	15	„	„	$(n+1$	„	$(n+1)$	
110	„	1	„	„	$\overline{n+1}y$	„	$\overline{n+1}x$	
	„	2	„	„	Der Nenner lautet $4\sin^2\frac{x}{2}$			
111	„	15	„	„	statt u	setze	n über Σ	
112	„	2	„	„ „	der	„	den	
					nach Bernoulli'schen ergänze Zahlen.			

[redacted]



I.

Theorie des Gaussischen Pendels mit Rücksicht auf die Rotation der Erde.

Von

Herrn **Heinrich Samter**

aus Grünberg in Schlesien.

Vorwort.

Diese Arbeit verdankt einer Anregung meines hochgeehrten Lehrers, Herrn Prof. Bruns ihre Entstehung. Es sei mir gestattet, für die mannigfachen Winke zur Anfertigung derselben dem genannten Herrn an dieser Stelle meinen besten Dank auszusprechen.

Der Verfasser.

Einleitung.

In der Sammlung der Göttinger Sternwarte befindet sich ein Instrument, das von Dr. Meyerstein nach den Angaben von Gauss 1853 zur Wiederholung des Foucault'schen Versuches ausgeführt wurde [1]).

Gauss schreibt darüber an A. von Humboldt: „In der letzten Zeit habe ich mich mit der Ausführung eines Apparates beschäftigt, um die Foucault'schen Versuche in anderer Gestalt auszuführen. Ich habe es bei diesen, sowie Foucault selbst, Secchi u. a. sie ausgeführt haben, als einen grossen Mangel betrachtet, dass dazu ein Local erfordert wird, wie es an wenig Orten zu Gebote steht;

---

1) Bruns in Hofmann. Bericht über die wissenschaftlichen Apparate auf der Londoner Ausstellung. Braunschweig [illegible]. pag. [illegible]. 2) Briefe zwischen A. v. H. und G. Leipzig 1877. pag. 64.

Secchi hatte, wenn ich nicht irre, eins von mehr als hundert Fuss, Foucault eines von mehr als 200, Garthe 134 u. s. w. Höhe. Mein Apparat ist in jedem Local anwendbar und zeigt schon jetzt die Einwirkung der Erdrotation nach kurzer Zeit auf das schlagendste; ich hoffe aber, da er jetzt noch unvollständig ist, die fehlenden Stücke vielleicht successive dahin zu bringen, dass alles in höchster Eleganz und Präcision erscheint."

Das Gaussische Pendel besteht aus einer massiven horizontal liegenden Linse und der in einer cardanischen Aufhängung befindlichen Pendelstange. Die Achsen der Aufhängung und der Pendelstange müssen sich natürlich in einem Punkte schneiden, der dem Aufhängepunkte des correspondirenden mathematischen Pendels entspricht [1].

In der Sprache der analytischen Mechanik heisst das:

Der Apparat ist aus zwei starren Systemen materieller Punkte zusammengesetzt, von denen das eine sich um eine mit dem Erdkörper fest verbundene Achse bewegen kann, das andere aber um eine gegen die Erde bewegliche, mit dem ersten Systeme fest verbundene Achse drehbar ist. Von den beiden Achsen wird die erste möglichst horizontal gelagert, die zweite schneidet die erste unter einem rechten Winkel.

Im Folgenden soll die Bewegung des eben beschriebenen Instrumentes mit Rücksicht auf die Erdrotation untersucht werden. Dabei wird angenommen werden, dass die erste Achse eine geringe Neigung gegen die Normalebene zur Richtung der Schwerkraft habe, dass ferner die beiden Achsen sich nicht schneiden, sondern kreuzen, so zwar, dass der von ihnen eingeschlossene Winkel nicht genau gleich 90^0 ist.

Bei der Integration der Differentialgleichungen der Bewegung werden wir in erster Näherung annehmen, dass die an das Instrument zu stellenden — im Vorhergehenden erwähnten — Anforderungen in Beziehung auf Präcision erfüllt seien, und werden diese Annahme erst in zweiter Näherung fallen lassen.

---

1) Bruns a. a. O. pag. 203.

§ 1.

Ableitung der Differentialgleichungen der Bewegung und erste Integration derselben.

1.

Legt man die ζ-achse eines rechtwinkligen Coordinatensystems in die Richtung der Verticale an einem Orte mit der geographischen Breite φ, so dass die positive Seite derselben nach unten gekehrt ist, während die ξ-achse und die η-achse mit ihren positiven Seiten resp. nach Süden und Westen weisen, so sind die Differentialgleichungen der Bewegung eines freien schweren materiellen Punktes in der Nähe des Anfangspunktes dieses Systemes, wenn n die Drehungsgeschwindigkeit der Erde bedeutet [1])

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -2n\sin\varphi\frac{d\eta}{dt}$$

$$(1) \qquad \frac{d^2\eta}{dt^2} = 2n\sin\varphi\frac{d\xi}{dt} - 2n\cos\varphi\frac{d\zeta}{dt}$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = 2n\cos\varphi\frac{d\eta}{dt} + g$$

Die Berücksichtigung der nach den bisherigen Forschungen geradlinigen und gleichförmigen Bewegung des Sonnensystems modificirt diese Gleichungen nicht; die Bewegung der Erde um die Sonne würde durch Verlegung des Coordinatenanfangs in den Mittelpunkt der Sonne und die Anbringung der Differenz der von jener auf den bewegten Körper und die Erde ausgeübten Beschleunigungen berücksichtigt werden. Diese Differenz ist von der Ordnung der Pendellänge, gemessen durch die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne, kann also die Bewegung nicht merklich beeinflussen. Ferner ist in diesen Gleichungen die Schwerkraft als alle Teilchen des Apparates in gleicher Richtung und in gleichem Maasse beschleunigend vorausgesetzt, bei der entgegengesetzten Annahme erhielte man für die Schwerkraft eine complicirte Kräftefunction V, deren partielle Differentialquotienten bei Vernachlässigung ganz unbeträchtlicher Glieder lineare und bis auf das Glied g in $\frac{\partial V}{\partial \xi}$ auch homogene Functionen von ξ, η, ζ sind, deren Coefficienten teils von der Krümmung der

1) vgl. u. a. Hansen Theorie der Pendelbewegung. Danzig 1853. pag. 12.

Erde überhaupt, teils von der Abplattung derselben abhängig sind und Potenzen des Erdradius im Nenner enthalten, teils aber dem Quadrate der Rotationsgeschwindigkeit der Erde proportional, also sehr klein sind. Hansen hat gezeigt, dass die Berücksichtigung aller dieser Glieder die Bewegung selbst langer Pendel in unmerklicher Weise beeinflusst.

Von den hingeschriebenen Gleichungen (1) ausgehend brauchen wir also nicht zu befürchten, für die Bewegung merkliche Glieder zu verlieren.

Da aber in diesen Gleichungen auch der Widerstand der Atmosphäre vernachlässigt ist, so gelten die zu erlangenden Resultate nur für die Bewegung des Pendels im luftleeren Raume.

Die u-achse eines zweiten rechtwinkligen Coordinatensystemes falle mit der gegen die Erde festen Achse des Gaussischen Pendels zusammen, die Projection ihrer positiven Seite auf die $\xi\eta$-ebene bilde mit der ξ-achse einen Winkel $\mathfrak{A}$, der im Sinne Süden — Westen — Norden — Osten — Süden gezählt der Bedingung

$$0^0 \leqq \mathfrak{A} < 180^0$$

genüge. Die w-achse liege in der durch die u- und ζ-achsen gelegten Ebene, und ihre positive Seite bilde mit der $+\zeta$-achse einen Winkel i, der der Bedingung

$$-90^0 < i < +90^0$$

genüge und positiv gerechnet werden möge, wenn die $+u$-achse oberhalb, negativ, wenn dieselbe unterhalb der $\xi\eta$-ebene fällt — unter der Bedingung, dass die Anfangspunkte beider Systeme zusammenfallen. Bei Hinzunahme dieser Bedingung ist jetzt das System der u, v, w eindeutig bestimmt, wenn man noch festsetzt, dass die Transformationsdeterminante der Coordinaten den Wert $+1$ habe. Setzen wir

$$\begin{aligned} \xi &= \mathfrak{u}_1 u + \mathfrak{v}_1 v + \mathfrak{w}_1 w \\ \eta &= \mathfrak{u}_2 u + \mathfrak{v}_2 v + \mathfrak{w}_2 w \\ \zeta &= \mathfrak{u}_3 u + \mathfrak{v}_3 v + \mathfrak{w}_3 w, \end{aligned} \tag{2}$$

so wird hiernach

$$\begin{aligned} &\mathfrak{u}_1 = \cos i \cos \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{u}_2 = \cos i \sin \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{u}_3 = -\sin i \\ &\mathfrak{v}_1 = -\sin \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{v}_2 = \cos \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{v}_3 = 0 \\ &\mathfrak{w}_1 = \sin i \cos \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{w}_2 = \sin i \sin \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{w}_3 = \cos i \end{aligned}$$

[redacted]

Die Differentialgleichungen der Bewegung des auf der vorigen Seite in's Auge gefassten Punktes in Beziehung auf das zweite Coordinatensystem werden durch Differentiirung der Formeln (2) gefunden. Dadurch ergiebt sich

$$\mathfrak{u}_1 \frac{d^2u}{dt^2} + \mathfrak{v}_1 \frac{d^2v}{dt^2} + \mathfrak{w}_1 \frac{d^2w}{dt^2} =$$
$$-2n \sin\varphi \left(\mathfrak{u}_2 \frac{du}{dt} + \mathfrak{v}_2 \frac{dv}{dt} + \mathfrak{w}_2 \frac{dw}{dt}\right)$$

$$\mathfrak{u}_2 \frac{d^2u}{dt^2} + \mathfrak{v}_2 \frac{d^2v}{dt^2} + \mathfrak{w}_2 \frac{d^2w}{dt^2} =$$
$$2n \sin\varphi \left(\mathfrak{u}_1 \frac{du}{dt} + \mathfrak{v}_1 \frac{dv}{dt} + \mathfrak{w}_1 \frac{dw}{dt}\right)$$
$$-2n \cos\varphi \left(\mathfrak{u}_3 \frac{du}{dt} + \mathfrak{w}_3 \frac{dw}{dt}\right)$$

$$\mathfrak{u}_3 \frac{d^2u}{dt^2} + \mathfrak{v}_3 \frac{d^2v}{dt^2} + \mathfrak{w}_3 \frac{d^2w}{dt^2} =$$
$$g + 2n \cos\varphi \left(\mathfrak{u}_2 \frac{du}{dt} + \mathfrak{v}_2 \frac{dv}{dt} + \mathfrak{w}_2 \frac{dw}{dt}\right)$$

und wenn man fortan

$$\begin{aligned} 2n(\sin\varphi \cos i + \cos\varphi \sin i \cos \mathfrak{A}) &= e \\ 2n \cos\varphi \sin \mathfrak{A} &= f \\ 2n(\sin\varphi \sin i - \cos\varphi \cos i \cos \mathfrak{A}) &= k \end{aligned}$$

setzt, so erhält man durch Elimination aus dem vorletzten Gleichungssysteme

$$(3) \qquad \begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} &= -e \frac{dv}{dt} - f \frac{dw}{dt} - g \sin i \\ \frac{d^2v}{dt^2} &= e \frac{du}{dt} + k \frac{dw}{dt} \\ \frac{d^2w}{dt^2} &= f \frac{du}{dt} - k \frac{dv}{dt} + g \cos i \end{aligned}$$

Betrachtet man nicht mehr die Bewegung eines einzelnen Punktes, sondern diejenige eines Systemes, so hat man die letzten Gleichungen in den Ausdruck des d'Alembert'schen Princips einzusetzen, dessen Gestalt dadurch folgende wird:

$$\sum_i m_i \delta u_i \left(\frac{d^2 u_i}{dt^2} + e\frac{dv_i}{dt} + f\frac{dw_i}{dt}\right)$$

$$+\sum_i m_i \delta v_i \left(\frac{d^2 v_i}{dt^2} - e\frac{du_i}{dt} - k\frac{dw_i}{dt}\right)$$

$$+\sum_i m_i \delta w_i \left(\frac{d^2 w_i}{dt^2} - f\frac{du_i}{dt} + k\frac{dv_i}{dt}\right) =$$

$$-g \sin i \sum_i m_i \delta u_i + g \cos i \sum m_i \delta u_i$$

Wir wollen zuvörderst die Bewegung des ersten — also des um die feste Achse drehbaren — Systemes materieller Punkte für sich betrachten und unter δu_i, δv_i, δw_i die Verrückung eines Punktes u_i, v_i, w_i desselben verstehen, so muss, damit die Verrückung eine virtuelle sei, für jeden einzelnen Punkt

$$\delta u_i = 0$$

sein, und wenn r_i die Länge eines vom Punkte u_i, v_i, w_i auf die u-achse gefällten Lotes, σ_i den Winkel bedeutet, den es mit der v-achse bildet, gezählt in einer zur vw-Ebene parallelen Ebene von der $+v$-achse nach der $+w$-achse hin, so ist

$$v_i = r_i \cos \sigma_i$$
$$w_i = r_i \sin \sigma_i$$

und wegen der Bedingungen des Systemes ist für alle Punkte desselben

$$\delta r_i = 0$$
$$\delta \sigma_i = \delta \sigma,$$

wo $\delta\sigma$ eine für alle Punkte des Systems constante Grösse bedeutet. Hiernach ist

$$\delta u_i = 0$$
$$\delta v_i = -r_i \sin \sigma_i \delta \sigma_i = -w_i \delta \sigma$$
$$\delta w_i = r_i \cos \sigma_i \delta \sigma_i = v_i \delta \sigma$$

in die Gleichung (4) des d'Alembert'schen Principes einzusetzen, die dadurch in die folgende übergeht

$$\delta\sigma \sum_i m_i \left\{ - w_i \left[\frac{d^2 v_i}{dt^2} - k\frac{dw_i}{dt}\right] + v_i \left[\frac{d^2 w_i}{dt^2} + k\frac{dv_i}{dt}\right]\right\}$$
$$= \delta\sigma g \cos i \sum_i m_i v_i$$

Hier geben die in k multiplicirten Glieder Null, weil nach den Bedingungen des Systems

[redacted]

$$w_i^2 + v_i^2 = r_i^2$$

constant ist, und ferner erhält man

$$v_i \frac{d^2 w_i}{dt^2} - w_i \frac{d^2 v_i}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(v_i \frac{dw_i}{dt} - w_i \frac{dv_i}{dt}\right) = r_i^2 \frac{d^2\sigma_i}{dt_i};$$

ausserdem haben alle Punkte des Systems dieselbe Geschwindigkeit und Beschleunigung; bedeutet also σ einen bestimmten unter den Winkeln σ_i, so kann man die Gleichung des d'Alembert'schen Principes schreiben

$$\text{(A)} \qquad \delta\sigma \frac{d^2\sigma}{dt^2} \sum_i m_i r_i^2 = \delta\sigma g \sum_i m_i v_i \cos i$$

Bedeutet m_1 die Masse, v_1 die v-Coordinate des Schwerpunkts des ersten Körpers, T_1 sein Trägheitsmoment um die feste Achse, so wird diese Gleichung

$$\text{(A)} \qquad \delta\sigma \frac{d^2\sigma}{dt^2} T_1 = \delta\sigma g \cos i\, m_1 v_1$$

Setzt man hierin $\frac{d\sigma}{dt} dt$ für $\delta\sigma$ und integrirt die Gleichung, so ergibt sich als Integral der lebendigen Kraft

$$\text{(B)} \qquad \tfrac{1}{2} T_1 \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = h + g \cos i\, m_1 w_1,$$

wo h die Integrationsconstante, w_1 die w-Coordinate des Schwerpunktes, r_1 seinen Abstand von der Drehachse, σ_1 den ihm zugehörigen Winkel σ bedeuten.

2.

Den bisher gleichgiltigen Anfangspunkt O_1 der Coordinaten u, v, w nehmen wir auf der festen Drehungsachse dort an, wo sie von der gemeinsamen Senkrechten beider Drehungsachsen getroffen wird — in dem Specialfalle also, wo die Achsen sich schneiden, im Schnittpunkte beider. Den Punkt O_2, wo die gegen die Erde bewegliche Rotationsachse von der gemeinsamen Senkrechten getroffen wird, wählen wir zum Anfangspunkte eines gegen die Erde beweglichen Coordinatensystemes, dessen Achsen mit den drei Hauptträgheitsachsen des zweiten Systemes materieller Punkte zusammenfallen mögen.

Zur $+c$-achse wählen wir die in der Ruhelage des Apparates mit der ζ-achse nahe parallel und gleich gerichtete Achse des kleinsten Hauptträgheitsmomentes, die Richtungen der beiden andern

Achsen bestimmen wir nur soweit, als wir annehmen, die a-achse sei diejenige des grössten Trägheitsmomentes, und die Determinante der Transformation dieses Systemes in eines der beiden andern habe den Wert $+1$. Wir setzen

(5)
$$\begin{aligned} u &= \alpha + \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c \\ v &= \beta + \beta_1 a + \beta_2 b + \beta_3 c \\ w &= \gamma + \gamma_1 a + \gamma_2 b + \gamma_3 c \end{aligned}$$

Hier ist nun, weil die Verbindungslinie der Anfangspunkte der letzten beiden Coordinatensysteme auf der u-achse senkrecht steht,

(6a)
$$\alpha = O$$

und, weil dieselbe Verbindungslinie eine constante Länge l hat,

(6b)
$$\beta^2 + \gamma^2 = l^2$$

Nehmen wir ferner diejenige Seite der beweglichen Drehaxe als positiv an, welche in der Ruhelage mit der $+v$-achse den seinem absoluten Werte nach kleineren Winkel einschliesst, und nennen wir $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ die Richtungscosinus derselben gegen die Achsen der a, b, c, so wird, weil nach den Bedingungen des Systemes der Winkel der beiden Rotationsachsen eine von $\frac{\pi}{2}$ wenig verschiedene constante Grösse haben soll, sein Cosinus

(6c)
$$\mathfrak{a}_1 a_1 + \mathfrak{a}_2 a_2 + \mathfrak{a}_3 a_3 = \mathfrak{b}_1$$

sein, wo $\mathfrak{b}_1$ eine kleine constante Zahl sein wird.

Andererseits sind die Richtungscosinus der beweglichen Achse gegen diejenigen der v und w

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1 \beta_1 + \mathfrak{a}_2 \beta_2 + \mathfrak{a}_3 \beta_3 &= \mathfrak{b}_2 \\ \mathfrak{a}_2 \gamma_1 + \mathfrak{a}_2 \gamma_2 + \mathfrak{a}_3 \gamma_3 &= \mathfrak{b}_3 \end{aligned}$$

und, da die bewegliche Achse auf der Linie $O_1 O_2$ mit den Richtungscosinus 0, $\frac{\beta}{l}$, $\frac{\gamma}{l}$ senkrecht sein soll, so haben wir endlich

(6d)
$$\frac{\beta}{l}(\mathfrak{a}_1 \beta_1 + \mathfrak{a}_2 \beta_2 + \mathfrak{a}_3 \beta_3) + \frac{\gamma}{l}(\mathfrak{a}_1 \gamma_1 + \mathfrak{a}_2 \gamma_2 + \mathfrak{a}_3 \gamma_3) = 0$$

Löst man die Gleichungen (6b) und (6d) nach β und γ auf und berücksichtigt, dass

[redacted]

$$(\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2+\mathfrak{a}_3\beta_3)^2+(\mathfrak{a}_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2+\mathfrak{a}_3\gamma_3)^2$$
$$= 1-(\mathfrak{a}_1\alpha_1+\mathfrak{a}_1\alpha_2+\mathfrak{a}_3\alpha_3)^2 = 1-\mathfrak{b}_1^2$$

ist, so erhält man

$$\beta = \mp l\,\frac{\mathfrak{a}_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2+\mathfrak{a}_3\gamma_3}{\sqrt{1-\mathfrak{b}_1^2}}$$

$$\gamma = \pm l\,\frac{\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2+\mathfrak{a}_3\beta_3}{\sqrt{1-\mathfrak{b}_1^2}}\text{ [1])}$$

Die Entscheidung über das Vorzeichen lässt sich folgendermassen fällen.

Aus den eben hingeschriebenen Werten von β und γ ergibt sich

$$(\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2+\mathfrak{a}_3\beta_3)\frac{\gamma}{l}-(\mathfrak{a}_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2+\mathfrak{a}_3\gamma_3)\frac{\beta}{l} = \pm\sqrt{1-\mathfrak{b}_1^2}$$

und setzt man speciell $\mathfrak{b}_1 = 0$, so heisst das mit leicht verständlicher Bezeichnung

cos (bewegliche Achse, v-achse) . sin (v-achse, $O_1 O_2$) + sin (bewegliche Achse, v-achse) cos (v-achse, $O_1 O_2$) $= \pm 1$.

Hiernach ist das obere Zeichen zu wählen, wenn der Winkel

(bewegliche Achse, $O_1 O_2$) $= 90^0$

ist, das untere, wenn er gleich 270^0 ist. Zählt man aber die Winkel von der $+v$-achse nach der $+w$-achse, von dieser nach der $-v$ achse u. s. w. herum, so ist der fragliche Winkel gleich 90^0, wenn in der Ruhelage die bewegliche Achse unterhalb der festen Achse hinläuft, gleich 270^0, wenn in der Ruhelage die bewegliche Achse sich oberhalb der festen Achse befindet. Man kann aber auch immer das obere Zeichen festhalten, wenn man nur bestimmt, dass l im ersteren Falle positiv, im anderen negativ gerechnet werden soll. Dasselbe Kriterium soll auch dann noch gelten, wenn $\mathfrak{b}_1$ nicht genau Null ist.

3.

Zur Ableitung der Bewegungsgleichungen führen wir die Eulerschen Grössen p, q, r ein. Es ist

---

1) Hier soll, wie im Folgenden überall, unter der Quadratwurzel ihr positiver Wert verstanden werden.

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
p &= \alpha_3 \frac{d\alpha_2}{dt} + \beta_3 \frac{d\beta_2}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma_2}{dt} \\
q &= \alpha_1 \frac{d\alpha_3}{dt} + \beta_1 \frac{d\beta_3}{dt} + \gamma_1 \frac{d\gamma_3}{dt} \\
r &= \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_2 \frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_2 \frac{d\gamma_1}{dt}
\end{aligned}
$$

Umgekehrt gelten bekanntlich die Formeln

(8)

$$
\begin{array}{l|l|l}
\frac{d\alpha_1}{dt} = \alpha_2 r - \alpha_3 q & \frac{d\alpha_2}{dt} = \alpha_3 p_1 - \alpha_1 r & \frac{d\alpha_3}{dt} = \alpha_1 q - \alpha_2 p \\
\frac{d\beta_1}{dt} = \beta_2 r - \beta_3 q & \frac{d\beta_2}{dt} = \beta_3 p - \beta_1 r & \frac{d\beta_3}{dt} = \beta_1 q - \beta_2 q \\
\frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2 r - \gamma_3 q & \frac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3 p - \gamma_1 r & \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 q - \gamma_2 p
\end{array}
$$

Zwischen den p, q, r besteht eine Bedingungsgleichung, die sich durch Differentiation der Gleichung (6c) unter Benutzung der eben hingeschriebenen Formeln in der Gestalt

$$
(9)\qquad
\begin{vmatrix}
a_1 & a_2 & a_3 \\
\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\
p & q & r
\end{vmatrix} = 0
$$

ergibt. Es lassen sich auch die Variationen der Grössen α_1, α_2 etc. in analoger Form wie die Differentialquotienten durch drei Grössen p', q', r' ausdrücken, deren Ausdrücke aus denen der p, q, r hervorgehen, indem man statt der Differentialquotienten die Variationen der Grössen α_1, α_2 etc. schreibt. Sollen die Grössen p', q', r' eine virtuelle Verrückung darstellen, so müssen sie der Gleichung

$$
(10)\qquad
\begin{vmatrix}
a_1 & a_2 & a_3 \\
\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\
p' & q' & r'
\end{vmatrix} = 0
$$

genügen.

Durch Differentiation folgt aus den Gleichungen (5)

$$
(11)\qquad
\frac{du}{dt} =
\begin{vmatrix}
a & b & c \\
\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\
p & q & r
\end{vmatrix}
$$

[redacted]

$$(11)\quad \frac{dv}{dt} = -\frac{l}{\sqrt{1-\mathfrak{d}_1^2}}\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p & q & r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{l}{\sqrt{1-\mathfrak{d}_1^2}}\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p & q & r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

und analog gelten auch die Gleichungen

$$\delta u = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix}$$

$$(12)\quad \delta v = -\frac{l}{\sqrt{1-\mathfrak{d}_1^2}}\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix}$$

$$\delta w = \frac{l}{\sqrt{1-\mathfrak{d}_1^2}}\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix}$$

Bevor wir die Gleichungen (11) nochmals differentiiren, betrachten wir allgemein einen Ausdruck von der Form

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{k} & \mathfrak{l} & \mathfrak{p} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

wo die $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{p}$ beliebige Constanten sein mögen.

Durch Differentiation folgt hieraus:

$$\begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \\ \mathfrak{k} & \mathfrak{l} & \mathfrak{p} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & q & r \\ \mathfrak{k} & \mathfrak{l} & \mathfrak{p} \\ \alpha_2 r - \alpha_3 q & \alpha_3 q - \alpha_1 r_1 & \alpha_1 q - \alpha_2 p \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} & -(\alpha_2 r - \alpha_3 q)(\mathfrak{l} r - \mathfrak{p} q) \\ \mathfrak{k} & \mathfrak{l} & \mathfrak{p} & -(\alpha_3 p - \alpha_1 r)(\mathfrak{p} p - \mathfrak{k} r) \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & -(\alpha_1 q - \alpha_2 p)(\mathfrak{k} q - \mathfrak{l} p) \end{vmatrix}$$

Berechnet man die Producte nach dem Multiplicationstheorem für Determinanten, so erkennt man, dass sich die Resultate in einfacher Weise addiren lassen, so dass der gesuchte Differentialquotient schliesslich wird

$$
= \begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \\ \mathfrak{k} & \mathfrak{l} & \mathfrak{p} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p^2 + q^2 + r^2 & \mathfrak{k}p + \mathfrak{l}q + \mathfrak{p}r \\ \alpha_1 p + \alpha_2 q + \alpha_3 r & \mathfrak{k}\alpha_1 + \mathfrak{l}\alpha_2 + \mathfrak{p}\alpha_3 \end{vmatrix}
$$

Analoge Gleichungen erhält man, indem man statt α_1, α_2, α_3 resp. β_1, β_2, β_3 resp. γ_1, γ_2, γ_3 setzt.

Somit erhellt die Richtigkeit der Gleichungen

(13)

$$
\frac{d^2u}{dt^2} = \begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \\ a & b & c \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ap+bq+cr, & p^2+q^2+r^2 \\ a\alpha_1+b\alpha_2+c\alpha_3, & \alpha_1 p+\alpha_2 q+\alpha_3 r \end{vmatrix}
$$

$$
\frac{d^2v}{dt^2} = \begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \\ a, & b, & c \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ap+bp+cr, & p^2+q^2+r^2 \\ a\beta_1+b\beta_2+c\beta_3, & \beta_1 p+\beta_2 q+\beta_3 r \end{vmatrix}
$$

$$
- \frac{l}{\sqrt{1-\mathfrak{d}_1^2}} \left[\begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \\ \mathfrak{a}_1, & \mathfrak{a}_2, & \mathfrak{a}_3 \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 p+\mathfrak{a}_2 q+\mathfrak{a}_3 r & p^2+q^2+r^2 \\ \mathfrak{a}_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2+\mathfrak{a}_3\gamma_3 & \gamma_1 p+\gamma_2 q+\gamma_3 r \end{vmatrix} \right]
$$

$$
\frac{d^2w}{dt^2} = \begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \\ a, & b, & c \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ap+bq+cr, & p^2+q^2+r^2 \\ a\gamma_1+b\gamma_2+c\gamma_3, & \gamma_1 p+\gamma_2 q+\gamma_3 r \end{vmatrix}
$$

$$
+ \frac{l}{\sqrt{1-\mathfrak{d}_1^2}} \left[\begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dq} & \frac{dr}{dt} \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 p+\mathfrak{a}_2 q+\mathfrak{a}_3 r & p^2+q^2+r^2 \\ \mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2+\mathfrak{a}_3\beta_3 & \beta_1 p+\beta_2 q+\beta_3 r \end{vmatrix} \right]
$$

Die Ausdrücke (11), (12) und (13) sind in die Gleichung (4) des d'Alembert'schen Principes einzusetzen, dazu ist — weil die Grössen

[redacted]

p', q', r' nicht von einander unabhängig sind — die mit dem Lagrange'schen Coefficienten λ multiplicirte Gleichung (10) zu addiren. Nachdem die Summation über die Massenpunkte des zweiten Körpers ausgeführt ist, ist dann die Gleichung (A) pag. 7. noch hinzuzufügen, nachdem in ihr $\delta\sigma$ und $\frac{d^2\sigma}{dt^2}$ durch die Grössen p', q', r' resp. die Grössen p, q, r und ihre Differentialquotienten ausgedrückt sind. Nun ist aber

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d(v\text{-achse}, \ O_1O_2)}{dt}$$

$$\delta\sigma = \delta(v\text{-achse}, \ O_1O_2)$$

$$\cos(v\text{-achse}. \ O_1O_2) = \frac{\beta}{l}; \quad \sin(v\text{-achse}, \ O_1O_2) = \frac{\gamma}{l}$$

$$-\sin(v, \ O_1O_2)\frac{d(v, O_1O_2)}{dt} = \frac{1}{l}\frac{d\beta}{dt}$$

$$\cos(v, O_1O_2)\frac{d(v, \ O_1O_2)}{dt} = \frac{1}{l}\frac{d\gamma}{dt};$$

somit ergibt sich:

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{1}{\gamma}\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{\beta}\frac{d\gamma}{dt}$$

$$\delta\sigma = -\frac{1}{\gamma}\,\delta\beta = \frac{1}{\beta}\,\delta\gamma$$

Berücksichtigt man die Werte der β und γ pag. 9., so erhält man ohne Schwierigkeit

(14)

$$\frac{d\sigma}{\delta t} = -\frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p & q & r \end{vmatrix}}{\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3}$$

$$\delta\sigma = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix}}{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}$$

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = \frac{\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p & q & r \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p & q & r \end{vmatrix}}{(\mathfrak{a}_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2+\mathfrak{a}_3\gamma_3)^2} - \frac{\begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}}{\mathfrak{a}_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2+\mathfrak{a}_3\gamma_3}$$

$$- \frac{\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 p+\mathfrak{a}_2 q+\mathfrak{a}_3 r & \mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2+\mathfrak{a}_3\beta_3 \\ p^2+q^2+r^2 & \beta_1 p+\beta_2 q+\beta_3 r \end{vmatrix}}{\mathfrak{a}_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2+\mathfrak{a}_3\gamma_3}$$

wo für die Bildung des zweiten Differentialquotienten wieder die allgemeine Bemerkung pag. 11. und 12. benutzt worden ist.

Um auch v_1 durch die neuen Variablen auszudrücken, nehmen wir an, das vom Schwerpunkte des ersten Körpers auf die u-achse gefällte Lot habe die Länge s_1 und bilde mit der Linie O_1O_2 einen in demselben Sinne wie σ zu zählenden Winkel ι_1, so ist

(14a) $$v_1 = s_1 \cos(\iota_1 + (v, O_1O_2))$$

$$= -\frac{s_1}{\sqrt{1-\mathfrak{b}_1^2}} [\cos\iota_1(\mathfrak{a}_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2+\mathfrak{a}_3\gamma_3)+\sin\iota_1(\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2+\mathfrak{a}_3\beta_3)]$$

Die Ausdrücke (14) und (14a) sind in die Gleichung (A) einfach einzusetzen.

Bei der Summation über die Massenteilchen des zweiten Körpers ist zu beachten, dass die Achsen der a, b, c Hauptträgheitsachsen sind, also

$$\Sigma m_i b_i c_i = \Sigma m_i c_i a_i = \Sigma m_i a_i b_i = 0$$

sein muss. Wir setzen ferner

$$\Sigma m_i a_i^2 = \mathfrak{A}^{1)}, \quad \Sigma m_i b_i^2 = \mathfrak{B}, \quad \Sigma m_i c_i^2 = \mathfrak{C}$$
$$\Sigma m_i(b_i^2+c_i^2) = A, \quad \Sigma m_i(c_i^2+a_i^2) = B, \quad \Sigma m_i(a_i^2+b_i^2) = C$$
$$\Sigma m_i a_i = m_2 a_2, \quad \Sigma m_i b_i = m_2 b_2, \quad \Sigma m_i c_i = m_2 c_2,$$

wo m_2 die Masse des zweiten Körpers bedeute.

Die Ausdrüche von δu, δv, δw; $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$; $\frac{d^2u}{dt^2}$, $\frac{d^2v}{dt^2}$. $\frac{d^2w}{dt^2}$ zerfallen von selbst jeder in zwei Teile, deren einer den kleinen Abstand der beiden Achsen der cardanischen Aufhängung enthält, während der andere davon unabhängig ist. Diese letzteren Teile für sich

1) Der Buchstabe $\mathfrak{A}$ wird in dieser Bedeutung bald nicht mehr gebraucht werden.

[redacted]

componirt müssen — die der Erddrehung proportionalen Glieder, vorläufig bei Seite gelassen — genau den Ausdruck des d'Alembert'schen Principes für das gewöhnliche Drehungsproblem liefern unter dem Einflusse der parallelen Beschleunigungen

$$X = -g\sin i,\quad Z = g\cos i,\quad Y = 0.$$

Die weitläufigen Zwischenrechnungen können deshalb hier übergangen werden, sie liefern das Endergebniss:

$$Ap'\frac{dp}{dt} + Bq'\frac{dq}{dt} + Cr\frac{dr}{dt} + \begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ p & q & r \\ Ap & Bq & Cr \end{vmatrix}$$

$$-gm_2\sin i\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} + gm_2\cos i\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Die von der Erddrehung abhängigen, den Abstand l nicht enthaltenden Glieder gehen aus

$$\text{(B)}\qquad \begin{aligned} &-k\Sigma m_i\left(\delta v_i\frac{dw_i}{dt} - \delta w_i\frac{dv_i}{dt}\right) \\ &-f\Sigma m_i\left(\delta w_i\frac{du_i}{dt} - \delta u_i\frac{dw_i}{dt}\right) \\ &+e\Sigma m_i\left(\delta u_i\frac{dv_i}{dt} - \delta v_i\frac{du_i}{dt}\right) \end{aligned}$$

hervor; hier brauchen wir nur das Glied mit $-k$ zu betrachten, da aus ihm die mit $-f$ und $+e$ proportionalen Glieder — wie man sich durch Betrachtung der Ausdrücke für die Variationen und Differentialquotienten überzeugt — durch gleichzeitige cyklische Vertauschung der in den Gruppen

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1;\quad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2;\quad \alpha_3, \beta_3, \gamma_3;$$

enthaltenen Glieder hervorgehen. Es ist aber

$$\Sigma m_i\left(\delta v_i\frac{dw_i}{dt} - \delta w_i\frac{dv_i}{dt}\right)$$

$$= \Sigma m_i\left[\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ a_i & b_i & c_i \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p & q & r \\ a_i & b_i & c_i \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ a_i & b_i & c_i \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} p & q & r \\ a_i & b_i & c_i \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}\right]^{1)}$$

1) Es ist hier — wie im Vorhergehenden erwähnt wurde — zunächst l vernachlässigt worden.

Man erkennt sofort, dass die Glieder mit pp', qq', rr' sich gegenseitig aufheben, und dass der Factor von qr' im ersten Producte der Parenthese als solcher von $-rq'$ im zweiten Gliede auftritt. Man erhält also z. B. als Factor von $qr'-rq'$

$$\Sigma m_i[(c_i\gamma_1 - a_i\gamma_3)(a_i\beta_2 - b_i\beta_1) - (a_i\gamma_2 - b_i\gamma_1)(c_i\beta_1 - a_i\beta_3)]$$

Nach den Bemerkungen der vorigen Seite hebt sich bei Ausführung der Summation hier alles auf bis auf das Glied

$$-\Sigma m_i a_i^2(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) = -\mathfrak{A}\alpha_1$$

Ebenso erhält man natürlich $-\mathfrak{B}\alpha_2$ als Factor von $(rp'-pr')$ und $-\mathfrak{C}\alpha_3$ als Factor von $(pq'-qp')$, und der Factor von $-k$ wird somit

$$\begin{vmatrix} p' & p, & \mathfrak{A}\alpha_1 \\ q' & q, & \mathfrak{B}\alpha_2 \\ r' & r, & \mathfrak{C}\alpha_3 \end{vmatrix}$$

Wie hieraus die Factoren von $-f$ und $+e$ hervorgehen, ist auf der vorigen Seite bemerkt worden. Die betreffenden Determinanten stimmen mit dieser in zwei entsprechenden Verticalreihen überein, lassen sich also addiren, und so ergibt sich schliesslich als Beitrag zum d'Alembert'schen Princip

$$\begin{vmatrix} p' & p & \mathfrak{A}(-\alpha_1 k - \beta_1 f + \gamma_1 e) \\ q' & q & \mathfrak{B}(-\alpha_2 k - \beta_2 f + \gamma_2 e) \\ r' & r & \mathfrak{C}(-\alpha_3 k - \beta_3 f + \gamma_3 e) \end{vmatrix}$$

Die die Erddrehung nicht enthaltenden, der ersten Potenz des kleinen Abstandes l proportionalen Glieder zerfallen in solche, die die Differentialquotienten von p, q, r enthalten, und solche, in denen dieselben nicht vorkommen.

Da die Summation hier nichts Bemerkenswertes bietet, so betrachten wir ein beliebiges von den erwähnten Gliedern, wie es aus

$$\delta w_i \frac{d^2 w_i}{dt^2} + \delta v_i \frac{d^2 v_i}{dt^2}$$

hervorgeht, also das Glied

$$\frac{\sqrt{1-\mathfrak{d}_1^2}}{l}\left[\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \beta_1 & \beta_1 & \beta_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \\ a_i & b_i & c_i \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}\right.$$

[redacted]

$$- \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \\ a_i & b_i & c_i \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \Bigg]$$

Hier heben sich in je zwei übereinander stehenden Producten die Terme mit $\beta_1\gamma_1$, $\beta_2\gamma_2$, $\beta_3\gamma_3$ fort, zu jedem Gliede mit $\beta_2\gamma_3$ in der ersten Reihe findet sich ein solches mit $-\beta_3\gamma_2$ in der zweiten Reihe, so dass das Ganze sich linear homogen in

$$\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2 = \alpha_1, \quad \beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3 = \alpha_2, \quad \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 = \alpha_3$$

ausdrücken wird. Man erhält als Factor von

$$\frac{l}{\sqrt{1-\mathfrak{b}_1^2}}(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) = \frac{l}{\sqrt{1-\mathfrak{b}_1^2}}\alpha_1$$

$$(\mathfrak{a}_1 r' - \mathfrak{a}_3 p')\left(b_i \frac{dp}{dt} - a_i \frac{dq}{dt}\right) - (\mathfrak{a}_2 p' - \mathfrak{a}_1 q')\left(a_i \frac{dr}{dt} - c_i \frac{dp}{dt}\right)$$

$$+ \left(\mathfrak{a}_1 \frac{dr}{dt} - \mathfrak{a}_3 \frac{dp}{dt}\right)(b_i p' - a_i q') - \left(\mathfrak{a}_2 \frac{dp}{dt} - \mathfrak{a}_1 \frac{dq}{dt}\right)(a_i r' - c_i p')$$

$$- \frac{dp}{dt} \begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ a_i & b_i & c_i \end{vmatrix} + p' \begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ a_i & b_i & c_i \end{vmatrix}$$

Die Factoren von α_2 und α_3 gehen aus diesem Ausdruck durch cyklische Vertauschung aller in ihm vorkommenden Gruppen von Grössen hervor; dabei ändern sich die Determinanten natürlich nicht, und der Beitrag dieser Glieder zum d'Alembert'schen Princip ist zusammengefasst:

$$\frac{lm_2}{\sqrt{1-\mathfrak{b}_1^2}} \left[\left(\alpha_1 \frac{dp}{dt} + \alpha_2 \frac{dq}{dt} + \alpha_3 \frac{dr}{dt}\right) \begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right.$$

$$\left. + (\alpha_1 p + \alpha_2 q + \alpha_3 r \begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{c}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right]$$

Die $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$ nicht enthaltenden, aber von der Erdrotation freien

Glieder, die die erste Potenz von l enthalten, gehen, abgesehen von dem Factor $\frac{lm_i}{\sqrt{1-\mathfrak{d}_1^2}}$ aus dem folgenden Gliede hervor:

$$\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_i p + b_i q + c_i r & p^2+q^2+r^2 \\ a_i \gamma + b_i \gamma_2 + c_i \gamma_3 & \gamma_1 p + \gamma_2 q + \gamma_3 r \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ a_i & b_i & c_i \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 p + \mathfrak{a}_2 q + \mathfrak{a}_3 r & p^2+q^2+r^2 \\ \mathfrak{a}_1 \beta_1 + \mathfrak{a}_2 \beta_2 + \mathfrak{a}_3 \beta_3 & \beta_1 p + \beta_2 q + \beta_3 r \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_i p + b_i q + c_i r & p^2+q^2+r^2 \\ a_i \beta_1 + b_i \beta_2 + c_i \beta_3 & \beta_1 p + \beta_2 q + \beta_3 r \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ a_i & b_i & c_i \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 p + \mathfrak{a}_2 q + \mathfrak{a}_3 r & p^2+q^2+r^2 \\ \mathfrak{a}_1 \gamma_1 + \mathfrak{a}_2 \gamma_2 + \mathfrak{a}_3 \gamma_3 & \gamma_1 p + \gamma_2 q + \gamma_3 r \end{vmatrix}$$

Hieraus ist wieder sofort zu ersehen, dass das Ganze sich linear homogen in

$$\beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2 = \alpha_1, \quad \beta_3 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_3 = \alpha_2, \quad \beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1 = \alpha_3$$

darstellen lassen wird; so ergibt sich im vorigen Ausdrucke als Factor von α_1

$$(\mathfrak{a}_1 r' - \mathfrak{a}_3 p') \begin{vmatrix} a_i p + b_i q + c_i r & c_i \\ p^2+q^2+r^2 & r \end{vmatrix}$$

$$- (\mathfrak{a}_2 p' - \mathfrak{a}_1 q') \begin{vmatrix} a_i p + b_i q + c_i r & b_i \\ p^2+q^2+r^2 & q \end{vmatrix}$$

$$- (a_i r' - c_i p') \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 p + \mathfrak{a}_2 q + \mathfrak{a}_3 r & \mathfrak{a}_3 \\ p^2+q^2+r^2 & r \end{vmatrix}$$

$$+ (b_i p' - a_i q') \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 p + \mathfrak{a}_2 q + \mathfrak{a}_3 r & \mathfrak{a}_2 \\ p^2+q^2+r^2 & q \end{vmatrix}$$

$$= \mathfrak{a}_1 \begin{vmatrix} a_i p + b_i q + c_i r & a_i p' + b_i q' + c_i r' \\ p^2+q^2+r^2 & pp' + qq' + rr' \end{vmatrix}$$

$$- a_i \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 p + \mathfrak{a}_2 q + \mathfrak{a}_3 r & \mathfrak{a}_1 p' + \mathfrak{a}_2 q' + \mathfrak{a}_3 r' \\ p^2+q^2+r^2 & pp' + qq' + rr' \end{vmatrix}$$

Permutirt man alle hier vorkommenden Gruppen von Grössen cyklisch, so erhält man nach einander die Factoren von α_2 und α_3; dabei bleiben die Determinanten ungeändert, nach Ausführung der Summation erhält man als Factor von $\frac{lm_2}{\sqrt{1-\mathfrak{d}_1^2}}$ bei Berücksichtigung der Relation

[redacted]

$$\mathfrak{a}_1\alpha_1+\mathfrak{a}_2\alpha_2+\mathfrak{a}_3\alpha_3=\mathfrak{b}_1$$

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{b}_1 & \alpha_1 a_2+\alpha_2 b_2+\alpha_3 c_3 & 0 \\ \mathfrak{a}_1 p+\mathfrak{a}_2 q+\mathfrak{a}_3 r & a_2 p+b_2 q+c_2 r & p^2+q^2+r^2 \\ \mathfrak{a}_1 p'+\mathfrak{a}_2 q'+\mathfrak{a}_3 r' & a_2 p'+b_2 q'+c_2 r' & pp'+qq'+rr' \end{vmatrix}$$

was zur Gleichung des d'Alembert'schen Principes hinzuzufügen ist.

Aus den von der Erdrotation abhängigen Gliedern (B) pag. 15. folgen auch solche, die der Grösse $\frac{l}{\sqrt{1-\mathfrak{b}_1^2}}$ proportional sind; so ergibt sich als Factor von

$$-\frac{le}{\sqrt{1-\mathfrak{b}_1^2}}$$

$$\Sigma m_i\left[\begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p & q & r \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ p & q & r \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix}\right]$$

Man erkennt sofort, dass die Klammergrösse linear homogen in

$$q'r-r'q,\quad r'p-p'r,\quad p'q-q'p$$

darstellbar ist; z. B. ergibt sich als Factor von $q'r-r'q$ in der Parenthese

$$(c_i\alpha_1-a_i\alpha_3)(\mathfrak{a}_1\gamma_2-\mathfrak{a}_2\gamma_1)-(a_i\alpha_2-b_i\alpha_1)(\mathfrak{a}_3\gamma_1-\mathfrak{a}_1\gamma_3)$$

$$=-a_i\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}+\alpha_1\begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}=-a_1(\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2+\mathfrak{a}_3\beta_3)$$

$$+\alpha_1\begin{vmatrix} a_i & b^i & c^i \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

wie aus den Identitäten der orthogonalen Substitution folgt. Der Factor von $\frac{le}{\sqrt{1-\mathfrak{b}_1^2}}$, wie er im d'Alembert'schen Principe auftritt, ist hiernach

$$\Sigma m_i\left[\begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ p' & q' & r' \\ p & q & r \end{vmatrix}(\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2+\mathfrak{a}_3\beta_3)-\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ p' & q' & r' \\ p & q & r \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}\right]$$

Der Factor von $\frac{lf}{\sqrt{1-\mathfrak{b}_1^2}}$ ist

$$\Sigma m_i \left[\begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p & q & r \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ p & q & r \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} \right]$$

$$= \Sigma m_i \left[\begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ p' & q' & r' \\ p & q & r \end{vmatrix} \cdot (\mathfrak{a}_1 \gamma_1 + \mathfrak{a}_2 \gamma_2 + \mathfrak{a}_3 \gamma_3) + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ p' & q' & r' \\ p & q & r \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \right]$$

was auf ganz analoge Weise wie das Vorhergehende einleuchtet.

Auch der Factor von $-\dfrac{lk}{\sqrt{1-\mathfrak{b}_1^2}}$, nämlich

$$\Sigma m_i \left[\begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p & q & r \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p & q & r \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p & q & r \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p & q & r \end{vmatrix} \right]$$

ist linear homogen in

$$q'r - r'q, \quad r'p - p'r, \quad p'q - q'p$$

und man erhält z. B. den Factor von $q'r - r'q$ in der Parenthese in der Form

$$\begin{aligned} &(c_i\gamma_1 - a_i\gamma_3)(\mathfrak{a}_1\gamma_2 - \mathfrak{a}_2\gamma_1) - (a_i\gamma_2 - b_i\gamma_1)(\mathfrak{a}_3\gamma_1 - \mathfrak{a}_1\gamma_3) \\ &+ (c_i\beta_1 - a_i\beta_3)(\mathfrak{a}_1\beta_2 - \mathfrak{a}_2\beta_1) - (a_i\beta_2 - b_i\beta_1)(\mathfrak{a}_3\beta_1 - \mathfrak{a}_1\beta_3) \\ &= -c_i\mathfrak{a}_1\alpha_1\alpha_2 - c_i\mathfrak{a}_2(1-\alpha_1^2) - a_i\mathfrak{a}_2\alpha_1\alpha_3 \\ &+ a_i\mathfrak{a}_3\alpha_1\alpha_2 + b_i\mathfrak{a}_3(1-\alpha_1^2) + b_i\mathfrak{a}_1\alpha_1\alpha_3 \\ &= \alpha_1 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ a_i & b_i & c_i \end{vmatrix} + \mathfrak{a}_3 b_i - \mathfrak{a}_3 c_i. \end{aligned}$$

Der Beitrag dieser Glieder zum d'Alembert'schen Principe ist hienach

$$-\frac{klm_2}{\sqrt{1-\mathfrak{b}_1^2}} \left[\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ p & q & r \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q'r - r'q & a_2 & \mathfrak{a}_1 \\ r'p - p'r & b_2 & \mathfrak{a}_2 \\ p'q - q'p & c_2 & \mathfrak{a}_3 \end{vmatrix} \right]$$

Die dem Quadrate des Abstandes der Achsen der cardanischen Aufhängung proportionalen Glieder sind bei den Näherungen zur Lösung des vorliegenden Problemes übergangen worden; um ihre Gestalt zu zeigen, habe ich sie noch in den Ausdruck des d'Alembert'schen Principes aufgenommen, will hier aber die complicirte

Rechnungen, aus denen sie resultiren, übergehen. Das d'Alembert'sche Princip ergiebt nach allem Vorhergehenden

$$(15)\quad Ap'\frac{dp}{dt}+Bq'\frac{dq}{dt}+Cr'\frac{dr}{dt}$$

$$+\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ p & q & r \\ Ap & Bq & Cr \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p' & p & \mathfrak{A}(\gamma_1 e-\beta_1 f-\alpha_1 k) \\ q' & q & \mathfrak{B}(\gamma_2 e-\beta_2 f-\alpha_2 k) \\ r' & r & \mathfrak{C}(\gamma_3 e-\beta_3 f-\alpha_3 k) \end{vmatrix}$$

$$+\frac{lm_2}{\sqrt{1-\mathfrak{b}_1^2}}\left\{\left(\alpha_1\frac{dp}{dt}+\alpha_2\frac{dq}{dt}+\alpha_3\frac{dr}{dt}\right)\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right.$$

$$+(\alpha_1 p'+\alpha_2 q'+\alpha_3 r')\begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\left.+\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1\alpha_1+\mathfrak{a}_2\alpha_2+\mathfrak{a}_3\alpha_3 & \alpha_1 a_2+\alpha_2 b_2+\alpha_3 c_2 & 0 \\ \mathfrak{a}_1 p+\mathfrak{a}_2 q+\mathfrak{a}_3 r & a_2 p+b_2 q+c_2 r & p^2+q^2+r^2 \\ \mathfrak{a}_1 p'+\mathfrak{a}_2 q'+\mathfrak{a}_3 r' & a_2 p'+b_2 q'+c_2 r' & pp'+qq'+rr' \end{vmatrix}\right\}$$

$$+\frac{lm_2}{\sqrt{1-\mathfrak{b}_1^2}}\left\{e\left[(\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2+\mathfrak{a}_3\beta_3)\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ p & q & r \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right.\right.$$

$$\left.+\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ p & q & r \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}\right]$$

$$+f\left[(\mathfrak{a}_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2+\mathfrak{a}_3\gamma_3)\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ p & q & r \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ p & q & r \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}\right]$$

$$\left.+k\left[\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ p & q & r \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} q'r-r'q & \mathfrak{a}_1 & a_2 \\ r'p-p'r & \mathfrak{a}_2 & b_2 \\ p'q-q'p & \mathfrak{a}_3 & c_2 \end{vmatrix}\right]\right\}$$

$$-\frac{m_2 l^2}{1-\mathfrak{b}_1^2}\left\{(\mathfrak{a}_1 p'+\mathfrak{a}_2 q'+\mathfrak{a}_3 r')\left(\mathfrak{a}_1\frac{dp}{dt}+\mathfrak{a}_2\frac{dq}{dt}+\mathfrak{a}_3\frac{dr}{dt}\right)\right.$$

$$\left.+(\mathfrak{a}_1 p+\mathfrak{a}_2 q+\mathfrak{a}_3 r)\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ p & q & r \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \end{vmatrix}-\mathfrak{b}_1 k\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ p & q & r \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \end{vmatrix}\right\}$$

$$+T_1\left\{\frac{\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p & q & r \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p & q & r \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix}}{(\mathfrak{a}_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2+\mathfrak{a}_3\gamma_3)^2(\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2+\mathfrak{a}_3\beta_3)}\right.$$

$$
-\frac{\begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}}{(\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2+\mathfrak{a}_3\beta_3)(\mathfrak{a}_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2+\mathfrak{a}_3\gamma_3)}
$$

$$
-\frac{\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 p+\mathfrak{a}_2 q+\mathfrak{a}_3 r & \mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2+\mathfrak{a}_3\beta_3 \\ p^2+p^2+r^2 & \beta_1 p+\beta_2 q+\beta_3 r \end{vmatrix}}{(\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2+\mathfrak{a}_3\beta_3)(\mathfrak{a}_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2+\mathfrak{a}_3\gamma_3)} \cdot \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} \Bigg\}
$$

$$
= \lambda \begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}
$$

$$
-g m_2 \sin i \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} + g \cos i \left\{ \frac{m_2 l}{\sqrt{1-\mathfrak{d}_1^2}} \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} \right\}
$$

$$
-g m_\iota \cos i \frac{s_1}{\sqrt{1-\mathfrak{d}_1^2}} \left(\cos l_1 \frac{\mathfrak{a}_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2+\mathfrak{a}_3\gamma_3}{\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2+\mathfrak{a}_3\beta_3} + \sin l_1 \right) \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix}
$$

4.

Man kann aus der vorstehenden Gleichung sofort ein **Integral** nämlich dasjenige der lebendigen Kraft ableiten, indem man für die Grössen p', q', r' die Elementarrotationen $p\,dt$, $q\,dt$, $r\,dt$ setzt, die wenn sie an die Bedingung

$$
\begin{vmatrix} p\,dt & \mathfrak{a}_1 & \alpha_1 \\ q\,dt & \mathfrak{a}_2 & \alpha_2 \\ r\,dt & \mathfrak{a}_3 & \alpha_3 \end{vmatrix} = 0
$$

geknüpft sind, eine virtuelle Verrückung darstellen. Dann verschwinden eine Reihe Glieder, weil in den betreffenden Determinanten zwei Reihen nur durch einen constanten Factor dt verschieden sind, oder weil die Grössen

$$
q'r - r'q, \quad r'p - p'r, \quad p'q - q'p
$$

gleich Null werden. Man erhält nach Ausführung der Integration

[redacted]

$$(16)\quad \tfrac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2)+\frac{lm_2}{\sqrt{1-\mathfrak{d}_1^{\,2}}}(\alpha_1 p+\alpha_2 q\alpha_3 r)\begin{vmatrix} p & q & r \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$-\tfrac{1}{2}\frac{m_2 l^2}{1-\mathfrak{d}_1^{\,2}}(\mathfrak{a}_1 p+\mathfrak{a}_2 q+\mathfrak{a}_3 r)^2+\tfrac{1}{2}T_1\;\frac{\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p & q & r \end{vmatrix}^2}{(\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta+\mathfrak{a}_3\beta_3)^2}$$

$$= h'-gm_2\sin i\,(\alpha_1 a_2+\alpha_2 b_2+\alpha_3 c_2)$$

$$+gm_2\cos i\left\{\frac{l}{\sqrt{1-\mathfrak{d}_1^{\,2}}}(\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2+\mathfrak{a}_3\beta_3)+\gamma_1 a_2+\gamma_2 b_2+\gamma_3 c_3\right\}$$

$$+\frac{gm_1 s_1}{\sqrt{1-\mathfrak{d}_1^{\,2}}}\left\{\cos\iota_1(\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2+\mathfrak{a}_3\beta_3)-\sin\iota_1(\mathfrak{a}_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2+\mathfrak{a}_3\gamma_3)\right\}$$

wo h' die Integrationsconstante bedeuten möge. Hier ist das Integral der lebendigen Kraft für den ersten Körper (B) pag. 7. benutzt worden, $\frac{d\sigma}{dt}$ ist aus (14) pag. 13. entnommen, und w_1 auf analoge Weise wie v_1 ((14a) pag. 14.) berechnet worden, nämlich folgendermassen

$$w_1 = s_1\sin(\iota+(v,\ O_1 O_2))$$

$$=\frac{s_1}{\sqrt{1-\mathfrak{d}_1^{\,2}}}\left\{\cos\iota_1(\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2+\mathfrak{a}_3\beta_3)-\sin\iota_1(\mathfrak{a}_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2+\mathfrak{a}_3\gamma_3)\right\}$$

Die Differentialgleichungen der Bewegung können aus der Gleichung (15) dadurch erhalten werden, dass man die Factoren von p', q', r' auf beiden Seiten der Gleichung resp. einander gleichsetzt. Wir werden später die dritte Bewegungsgleichung, also die durch Gleichsetzung der Factoren von r' entstehende hinschreiben, weil wir sie allein explicite brauchen werden.

Bei der Behandlung des Drehungsproblemes werden die Differentialgleichungen im allgemeinen mit $\gamma_1 dt$, $\gamma_2 dt$, $\gamma_3 dt$ multiplicirt und addirt [1]. In dem Falle, wo auf den bewegten Körper dann nur constante parallele Beschleunigungen wirken, ist die entstehende Summe ein vollständiges Differential; allein schon in dem Falle, dass der um einen festen Punkt drehbare Körper ausserdem dem Einflusse der Erdrotation unterworfen ist, gelingt es im allgemeinen weder auf diesem noch auf einem anderen Wege ein vollständiges Integral der Bewegungsgleichungen zu erhalten. In unserem Falle, wo das System aus zwei starren Systemen zusammengesetzt ist, können wir um so weniger erwarten, ein vollständiges Integral zu erhalten.

---

1) u. a. Hansen a. a. O. pag. 22 ff.

Statt nun, wie gewöhnlich, die Differentialgleichungen resp. mit $\gamma_1 dt$, $\gamma_2 dt$, $\gamma_3 dt$ zu multipliciren und dann zu addiren, können wir auch in der Gleichung (15) des d'Alembert'schen Principes $\gamma_1 dt$, $\gamma_2 dt$, $\gamma_3 dt$ resp. für p', q', r' setzen, müssen dann aber, da $\gamma_1 dt$, $\gamma_2 dt$, $\gamma_3 dt$ im allgemeinen keine virtuelle Verrückung darstellen, den mit dem Lagrange'schen Coefficienten λ multiplicirten Ausdruck beibehalten. Man erkennt sofort, dass bei dem erwähnten Verfahren eine Reihe von Determinanten fortfällt, weil in ihnen zwei Horizontalreihen dann nur durch den constanten Factor dt verschieden sind.

Bei Ausführung der Integration ist Folgendes zu beachten:

1) Die auch im gewöhnlichen Drehungsproblem auftretenden Glieder geben integrirt

$$A\gamma_1 p + B\gamma_2 q + C\gamma_3 r.$$

2) Die von der Erdrotation abhängigen, in der Determinante

$$\begin{vmatrix} p' & p & \mathfrak{A}(\gamma_1 e - \beta_1 f - \alpha_1 k) \\ q' & q & \mathfrak{B}(\gamma_2 e - \beta_2 f - \alpha_2 k) \\ r' & r & \mathfrak{C}(\gamma_3 e - \beta_3 f - \alpha_3 k) \end{vmatrix}$$

vereinigten Glieder werden nach den Gliedern der dritten Verticalreihe geordnet, dann sind die Coefficienten derselben die Unterdeterminanten

$$\gamma_2 r\,dt - \gamma_3 q\,dt = d\gamma_1, \quad \gamma_3 p\,dt - \gamma_1 r\,dt = d\gamma_2$$
$$\gamma_1 q\,dt - \gamma_2 p\,dt = d\gamma_3$$

3) Von den mit $\frac{l m_2}{\sqrt{1-\mathfrak{b}_1^2}}$ proportionalen Gliedern fällt dasjenige mit dem Factor

$$\alpha_1 p' + \alpha_2 q' + \alpha_3 r'$$

fort, weil bekanntlich

$$\alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 + \alpha_3 \gamma_3 = 0$$

ist. Die folgende Determinante wird nach Gliedern der ersten Hori zontalreihe geordnet, und ergibt

$$dt\,\mathfrak{b}_1 \{a_2 [q(p\gamma_2 - q\gamma_1) + r(p\gamma_3 - r\gamma_1)] + b_2 [p(q\gamma_1 - p\gamma_2) + r(q\gamma_3 - r\gamma_2)]$$
$$+ c_2 [p(r\gamma_1 - p\gamma_3) + q(r\gamma_2 - q\gamma_3)]\}$$
$$+ dt(\alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 c_2)\{\mathfrak{a}_1 [q(q\gamma_1 - p\gamma_2) + r(r\gamma_1 - p\gamma_3)]$$
$$+ \mathfrak{a}_2 [p(p\gamma_2 - q\gamma_1) + r(r\gamma_2 - q\gamma_3)] + \mathfrak{a}_3 [p(p\gamma_3 - r\gamma_1) + q(q\gamma_3 - r\gamma_2)]\}$$

$$= \mathfrak{b}_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d\gamma_1 & d\gamma_2 & d\gamma_3 \\ p & q & r \end{vmatrix} + (\alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 c_2) \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ p & q & r \\ d\gamma_1 & d\gamma_2 & d\gamma_3 \end{vmatrix}$$

[redacted]

4) Die von der Natur des ersten Körpers abhängigen Glieder fallen aus dem bereits erwähnten Grunde sämtlich fort. Der Einfluss dieses ersten Körpers bleibt nur implicite in der Grösse λ enthalten.

5) Der Coefficient dieser Grösse gibt nach den Gliedern der zweiten Horizontalreihe entwickelt

$$
\begin{aligned}
&-dt(\mathfrak{a}_1(\gamma_2\alpha_3-\gamma_3\alpha_2)+\mathfrak{a}_2(\gamma_3\alpha_1-\gamma_1\alpha_3)+\mathfrak{a}_3(\gamma_1\alpha_2-\gamma_2\alpha_1))\\
&=-dt(\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2+\mathfrak{a}_3\beta_3)
\end{aligned}
$$

6) Die folgenden Glieder werden, sofern sie nicht ganz fortfallen, analog dem vorhergehenden nach den Gliedern ihrer ersten Horizontalreihen entwickelt und mit Hülfe der Identitäten der orthogonalen Substitution reducirt. Speciell ist noch

$$
\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} = (\mathfrak{a}_1\alpha_1+\mathfrak{a}_2\alpha_2+\mathfrak{a}_3\alpha_3)dt = \mathfrak{b}_1 dt
$$

Nach Ausführung der Integrationen ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
(17)\quad & A\gamma_1 p+B\gamma_2 q+C\gamma_3 r+\frac{e}{2}(\mathfrak{A}\gamma_1^2+\mathfrak{B}\gamma_2^2+\mathfrak{C}\gamma_3^2)\\
&-\mathfrak{A}\int d\gamma_1(f\beta_1+k\alpha_1)-\mathfrak{B}\int d\gamma_2(f\beta_2+k\alpha_2)-\mathfrak{C}\int d\gamma_3(f\beta_3+k\alpha_3)\\
&+\frac{m_2 l}{\sqrt{1-\mathfrak{b}_1^2}}\int\Bigg\{(\alpha_1 dp+\alpha_2 dq+\alpha_3 dr)\begin{vmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}\\
&+\mathfrak{b}_1\begin{vmatrix}a_2 & b_2 & c_2\\ d\gamma_1 & d\gamma_2 & d\gamma_3\\ p & q & r\end{vmatrix}+(\alpha_1 a_2+\alpha_2 b_2+\alpha_3 c_2)\begin{vmatrix}\mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3\\ p & q & r\\ d\gamma_1 & d\gamma_2 & d\gamma_3\end{vmatrix}\Bigg\}\\
&+\frac{m_2 le}{\sqrt{1-\mathfrak{b}_1^2}}\int\Bigg\{(\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2+\mathfrak{a}_3\beta_3)(a_2 d\gamma_1+b_2 d\gamma_2+c_2 d\gamma_3)\\
&+(\alpha_1 d\gamma_1+\alpha_2 d\gamma_2+\alpha_3 d\gamma_3)\begin{vmatrix}a_2 & b_2 & c_2\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3\end{vmatrix}\Bigg\}\\
&+\frac{m_2 lf}{\sqrt{1-\mathfrak{b}_1^2}}\int\Bigg\{(\mathfrak{c}_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2+\mathfrak{a}_3\gamma_3)(a_2 d\gamma_1+b_2 d\gamma_2+c_2 d\gamma_3)\\
&-(\alpha_1 d\gamma_1+\alpha_2 d\gamma_2+\alpha_3 d\gamma_3)\begin{vmatrix}a_2 & b_2 & c_2\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3\end{vmatrix}\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$+\frac{m_2 lk}{\sqrt{1-\mathfrak{d}_1^2}}\left\{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \end{vmatrix} - \int (\alpha_1 d\gamma_1 + \alpha_2 d\gamma_2 + \alpha_3 d\gamma_3)\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \end{vmatrix}\right\}$$

$$-\frac{m_2 l^2}{1-\mathfrak{d}_1^2}\left\{(\mathfrak{a}_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2+\mathfrak{a}_3\gamma_3)(\mathfrak{a}_1 p+\mathfrak{a}_2 q+\mathfrak{a}_3 r)-\mathfrak{d}_1 k(\mathfrak{a}_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2+\mathfrak{a}_3\gamma_3)\right\}$$

$$= \Gamma - \int \lambda(\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2+\mathfrak{a}_3\beta_3)dt + gm_2 \sin i \int (\beta_1 a_2+\beta_2 b_2+\beta_3 c_2)dt$$

$$+gm_2 l \cos i \frac{\mathfrak{d}_1 t}{\sqrt{1-\mathfrak{d}_1^2}}.$$

Es wurde schon pag. 23. erwähnt, dass die dritte Bewegungsgleichung Anwendung finden würde: dieselbe soll nämlich benutzt werden, um die Grösse λ auszudrücken, deren Wert in die vorig Gleichung zu substituiren ist. Die dritte Bewegungsgleichung lautet

$$(18)\quad C\frac{dr}{dt}+(B-A)pq+\mathfrak{B}p(\gamma_2 e-\beta_2 f-\alpha_2 k)-\mathfrak{A}q(\gamma_1 e-\beta_1 f-\alpha_1 k)$$

$$+\frac{m_2 l}{\sqrt{1-\mathfrak{d}_1^2}}\left\{(\mathfrak{a}_1 b_2-\mathfrak{a}_2 a_2)\left(\alpha_1\frac{dp}{dt}+\alpha_2\frac{dq}{dt}+\alpha_3\frac{dr}{dt}\right)\right.$$

$$\left.+\alpha_3\begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathfrak{d}_1 & \mathfrak{a}_1 p+\mathfrak{a}_2 q+\mathfrak{a}_3 r & \mathfrak{a}_3 \\ \alpha_1 a_2+\alpha_2 b_2+\alpha_3 c_2 & a_2 p+b_2 q+c_2 r & c_2 \\ 0 & p^2+q^2+r^2 & r \end{vmatrix}\right\}$$

$$+\frac{lm_2}{\sqrt{1-\mathfrak{d}_1^2}}\left\{\frac{d\alpha_3}{dt}\begin{vmatrix} a_2 & k\alpha_1+f\beta_1-e\gamma_1 & \mathfrak{a}_1 \\ b_2 & k\alpha_2+f\beta_2-e\gamma_2 & \mathfrak{a}_2 \\ c_2 & k\alpha_3+f\beta_3-f\gamma_3 & \mathfrak{a}_3 \end{vmatrix}\right.$$

$$\left.+(b_2 p-a_2 q)(\mathfrak{a}_1(e\beta_1+f\gamma_1)+\mathfrak{a}_2(e\beta_2+f\gamma_2)+\mathfrak{a}_3(e\beta_3+f\gamma_3))+k\begin{vmatrix} a_2 & -q & \mathfrak{a}_1 \\ b_2 & p & \mathfrak{a}_2 \\ c_2 & 0 & \mathfrak{a}_3 \end{vmatrix}\right\}$$

$$-\frac{l^2 m_2}{1-\mathfrak{d}_1^2}\left\{\mathfrak{a}_3\left(\mathfrak{a}_1\frac{dp}{dt}+\mathfrak{a}_2\frac{dq}{dt}+\mathfrak{a}_3\frac{dr}{dt}\right)\right.$$

$$\left.+(\mathfrak{a}_1 p+\mathfrak{a}_2 q+\mathfrak{a}_3 r)(\mathfrak{a}_2 p-\mathfrak{a}_1 q)-\mathfrak{d}_1 k(\mathfrak{a}_2 p-\mathfrak{a}_1 q)\right\}$$

$$+\frac{T_1(\mathfrak{a}_1\gamma_2-\mathfrak{a}_2\gamma_1)}{(\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2+\mathfrak{a}_3\beta_3)(\mathfrak{a}_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2+\mathfrak{a}_3\gamma_3)}\times$$

[redacted]

$$
\left\{ \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mathfrak{a}_1+\gamma_1\mathfrak{a}_2\gamma_2+\mathfrak{a}_3\gamma_3 & \mathfrak{a}_1 p+\mathfrak{a}_2 q+\mathfrak{a}_3 r \\ \mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2+\mathfrak{a}_3\beta_3 & 0 & \beta_1 p+\beta_2 q+\beta_3 r \\ \mathfrak{a}_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2+\mathfrak{a}_3\gamma_3 & \gamma_1 p+\gamma_2 q+\gamma_3 r & p^2+q^2+r^2 \end{vmatrix}}{\mathfrak{a}_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2+\mathfrak{a}_3\gamma_3} \right.
$$

$$
\left. - \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 p+\mathfrak{a}_2 q+\mathfrak{a}_3 r & p^2+q^2+r^2 \\ \mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2+\mathfrak{a}_3\beta_3 & \beta_1 p+\beta_2 q+\beta_3 r \end{vmatrix} \right\}
$$

$$
= \lambda(\mathfrak{a}_1\alpha_2-\mathfrak{a}_2\alpha_1)-gm_2\sin i(\alpha_2 a_2-\alpha_1 b_2)
$$

$$
+gm_2\cos i\left\{\frac{l}{\sqrt{1-\mathfrak{d}_1^{\,2}}}(\mathfrak{a}_1\beta_2-\mathfrak{a}_2\beta_1)+a_2\gamma_2-b_2\gamma_1\right\}
$$

$$
-\frac{gm_1 s_1\cos i}{\sqrt{1-\mathfrak{d}_1^{\,2}}}\left\{\cos\iota_1\frac{\mathfrak{a}_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2+\mathfrak{a}_3\gamma_3}{\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2+\mathfrak{a}_3\beta_3}+\sin\iota_1\right\}\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}.
$$

Bei der Ableitung dieser Formel ist benutzt worden, dass in einer Reihe von dem kleinen Abstande l und der Erdrotation abhängiger Glieder die Determinante

$$
\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ p & q & r \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}
$$

als Factor auftritt, worin

$$
p\,\alpha_2-q\,\alpha_1=-\frac{d\alpha_3}{dt}
$$

Coefficient von r' ist. Die Glieder, die diesen Coefficienten haben, lassen sich — was angewendet werde — zu einer einzigen Determinante zusammenfassen.

Ferner ist in einem der vom ersten Körper abhängigen Glieder das Multiplicationstheorem der Determinanten benutzt worden.

5.

Bei der Behandlung des Problemes der Drehung eines schweren Körpers um einen festen Punkt hat sich Lagrange genötigt gesehen beschränkende Voraussetzungen über die Natur des bewegten Körpers zu machen, indem er annahm, dass zwei Hauptträgheitsmomente desselben einander gleich seien, in der Achse des dritten aber der Schwerpunkt des Systemes liege. Dieselben Voraussetzungen macht Hansen [1]) bei der Behandlung des ausser durch die Schwerkraft

---

1) a. a. O. pag. 23. f.

noch durch die Erdrotation beeinflussten Körpers. Danach hätten wir zu setzen

$$A = B, \quad a_2 = b_2 = 0$$

Bei der Unvollkommenheit mechanischer Instrumente lässt sich indessen immer nur erwarten, dass diese Voraussetzungen näherungsweise erfüllt seien, und wir werden deshalb hinfort annehmen, dass $A-B$, a_2, b_2 kleine Grössen seien, deren Producte mit anderen ebenso beschaffenen Grössen oder mit sich selbst wir stets vernachlässigen werden.

Sind ferner die an das Gaussische Pendel in Beziehung auf Präcision zu stellenden Anforderungen näherungsweise erfüllt, so ist der Abstand l der beiden sich kreuzenden Geraden gering, ebenso der Cosinus $\mathfrak{d}_1$ des durch die beiden Achsen der cardanischen Aufhängung gebildeten Winkels; wir werden nun künftighin die Grössen $\mathfrak{d}_1^2$ und l^2, sowie $\mathfrak{d}_1 l$ vernachlässigen, und wollen ein mit $\mathfrak{d}_1 l$ proportionales Glied in (17), weil es zugleich die Zeit als Factor enthält, nur beibehalten, um zu zeigen, dass es sich gegen ein anderes durch Elimination von λ erscheinendes Glied fortheben wird; auch die Grössen la_2 und lb_2 werden von jetzt ab unterdrückt werden.

Wir führen ferner die Bezeichnungen ein:

$$A+B = 2E, \quad A-B = 2D, \quad \frac{A-B}{A+B} = \Delta,$$

und werden künftig auch die Grössen Δl und $\Delta \mathfrak{d}_1$ vernachlässigen. Nach der Bedeutung der Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ (vgl. pag. 14.) ergibt sich

$$\mathfrak{A} = \frac{B+C-A}{2}, \quad \mathfrak{B} = \frac{C+A-B}{2}, \quad \mathfrak{C} = \frac{A+B-C}{2}$$

$$\frac{\mathfrak{A}}{E} = \frac{C}{2E} - \Delta, \quad \frac{\mathfrak{B}}{E} = \frac{C}{2E} + \Delta, \quad \frac{\mathfrak{C}}{E} = 1 - \frac{C}{2E}$$

Auch die Grösse $\frac{T_1}{E}$ wird unbedeutend sein, denn einmal wird der erste — um die feste Achse schwingende — Körper bei zweckmässiger Construction des Apparates an Masse gegenüber dem um die bewegliche Achse schwingenden Körper bedeutend zurücktreten, und ferner werden auch die Massenteilchen desselben eine viel geringere Entfernung von der Umdrehungsachse haben, als die des zweiten Körpers — speciell die der massiven Linse. Der Umstand, dass der Hauptteil des Gaussischen Pendels eine an einer verhältnissmässig leichten Stange befindliche schwere Linse ist, bewirkt ferner, dass die den Schwerpunkt enthaltende oder doch in seiner Nähe vorbei-

gehende Hauptträgheitsachse diejenige des kleinsten Trägheitsmomentes ist, mit andern Worten, dass die Grösse $\frac{C}{E}$ von geringem Betrage sein wird. Wir werden dieselbe indessen nicht den anderen eben betrachteten Grössen an Ordnung gleichstellen, da sie wegen der bedeutenden Masse des Linsenkörpers jedenfalls grösser als $\frac{T_1}{E}$ sein wird. Spätere Betrachtungen sollen uns ein Urteil über den Betrag von $\frac{C}{E}$ verschaffen.

Nennt man ν den Winkel, welchen die bewegliche Achse mit ihrer Projection auf die Ebene der Achsen der beiden nahe gleichen Hauptträgheitsmomente bildet und rechnet ν positiv, wenn die (pag. 8) als positiv definirte Seite der beweglichen Rotationsachse in der Pendelage des Apparates oberhalb der *a*-*b*-ebene liegt, negativ, wenn sie unterhalb derselben hingeht, — und nennt man ferner μ den von der $+a$-achse nach der $+b$-achse und in dieser Richtung ev. weiter zu zählenden Winkel, den eben jene Projection mit der $+a$-achse bildet, so ist

$$\mathfrak{a}_1 = \cos\mu\cos\nu$$
$$\mathfrak{a}_2 = \sin\mu\cos\nu$$
$$\mathfrak{a}_3 = \sin\nu$$

Nun wird bei zweckmässiger Construction des Pendels $\mathfrak{a}_3$ sehr klein ein, und wir werden

$$\sin\nu = \nu, \quad \cos\nu = 1$$

setzen dürfen, so dass

$$\mathfrak{a}_1 = \cos\mu, \quad \mathfrak{a}_2 = \sin\mu, \quad \mathfrak{a}_3 = \nu$$

wird, und Producte, wie $\mathfrak{a}_3 \frac{T_1}{E}$ stets zu übergehen sein werden.

Ferner wird auch die Neigung i der festen Achse gegen die Horizontalebene als gering angesehen, also

$$\sin i = i, \quad \cos i = 1, \quad a_3 i = b_3 i = 0$$

gesetzt werden können. Eine sehr kleine Grösse ist ferner $\frac{m_1 s_1}{E}$, einmal weil die Masse des ersten Körpers gering ist, und dann weil der Abstand s_1 des Schwerpunktes des ersten Körpers von der festen Achse sehr gering sein wird, vom Mechaniker sogar fast gleich Null wird gemacht werden können, wir können aber jedenfalls die Grösse $\mathfrak{a}_3 \frac{m_1 s_1}{E}$ vernachlässigen.

Diese Erwägungen auf die Gleichungen (16) und (17) anwendend, erhält man nach Division derselben durch E, da

$$\frac{A}{E} = \frac{E+D}{E} = 1+\varDelta, \quad \frac{B}{E} = \frac{E-D}{E} = 1-\varDelta \quad \text{ist:}$$

$$(19) \quad \tfrac{1}{2}\left(p^2+q^2+\frac{C}{E}r^2+\varDelta(p^2-q^2)\right)+\frac{lm_2c_2}{E}(\alpha_1 p+\alpha_2 q+\alpha_3 r)(\mathfrak{a}_2 p-\mathfrak{a}_1 q)$$

$$+\tfrac{1}{2}\frac{T_1}{E}\frac{\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p & q & r \end{vmatrix}^2}{(\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2)^2} = \frac{h'}{2E}$$

$$-\frac{gm_2c_2}{E}i\alpha_3+\frac{gm_2}{E}\{l(\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2)+a_2\gamma_1+b_2\gamma_2+c_2\gamma_3\}$$

$$+\frac{gm_1s_1}{E}\begin{vmatrix} \cos\iota_1 & \mathfrak{a}_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2 \\ \sin\iota_1 & \mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2 \end{vmatrix}$$

$$(20) \quad \gamma_1 p+\gamma_2 q+\frac{C}{E}\gamma_3 r+\varDelta(\gamma_1 p-\gamma_2 q)+\frac{e}{2}\gamma_3^2+\frac{eC}{4E}(\gamma_1^2+\gamma_2^2-\gamma_3^2)$$

$$+\frac{\varDelta e}{2}(\gamma_2^2-\gamma_1^2)-\int(f\beta_3+k\alpha_3)d\gamma_3$$

$$-\frac{C}{2E}\int f(\beta_1 d\gamma_1+\beta_2 d\gamma_2-\beta_3 d\gamma_3)+k(\alpha_1 d\gamma_1+\alpha_2 d\gamma_2-\alpha_3 d\gamma_3)$$

$$+\varDelta\int[f(\beta_1 d\gamma_1-\beta_2 d\gamma_2)+k(\alpha_2 d\gamma_1-\alpha_2 d\gamma_2)]$$

$$+\frac{m_2lc_2}{E}\int\left((\alpha_1 dp+\alpha_2 dq+\alpha_3 dr)(\mathfrak{a}_2\gamma_1-\mathfrak{a}_1\gamma_2)+\alpha_3\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & 0 \\ p & q & r \\ d\gamma_1 & d\gamma_2 & d\gamma_3 \end{vmatrix}\right)$$

$$+\frac{m_2c_2le}{E}\int((\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2)d\gamma_3+(\mathfrak{a}_2\gamma_1-\mathfrak{a}_1\gamma_2)(\alpha_1 d\gamma_1+\alpha_3 d\gamma_2+\alpha_3 d\gamma_3))$$

$$+\frac{m_2c_2lf}{E}\int((\mathfrak{a}_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2)d\gamma_3-(\mathfrak{a}_2\beta_1-\mathfrak{a}_1\beta_2)(\alpha_1 d\gamma_1+\alpha_2 d\gamma_2+\alpha_3 d\gamma_3))$$

$$+\frac{m_2c_2lk}{E}\int((\mathfrak{a}_2 d\gamma_1-\mathfrak{a}_1 d\gamma_2)-(\mathfrak{a}_2\alpha_1-\mathfrak{a}_1\alpha_2)(\alpha_1 d\gamma_1+\alpha_2 d\gamma_2+\alpha_3 d\gamma_3))$$

$$=\frac{\Gamma}{E}-\int\frac{\lambda}{E}dt(\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2+\mathfrak{a}_3\beta_3)+\frac{gm_2c_2}{E}i\int\beta_3 dt+\frac{gm_2l}{E}\mathfrak{b}_1 t$$

Behandelt man schliesslich auch die Gleichung (18) auf die angegebene Weise und berechnet aus ihr gleich den Wert von $\frac{\lambda}{E}$, so erhält man

[redacted]

(21)

$$
\begin{aligned}
\frac{\lambda}{E} = \frac{1}{\mathfrak{a}_1\alpha_2-\mathfrak{a}_2\alpha_1}\Bigg\{&\frac{C}{E}\frac{dr}{dt}+\frac{C}{2E}\left[e(\gamma_2 p-\gamma_1 q)-f(\beta_2 p-\beta_1 q)-k(\alpha_2 p-\alpha_1 q)\right]\\
&+\Delta\left[-2pq+e(\gamma_2 p+\gamma_1 q)-f(\beta_2 p+\beta_1 q)-k(\alpha_2 p+\alpha_1 q)\right]\\
&+\frac{lm_2c_2}{E}\left[\mathfrak{a}_2\alpha_3\left(\frac{dp}{dt}-qr\right)-\mathfrak{a}_1\alpha_3\left(\frac{dq}{dt}+pr\right)\right.\\
&+\frac{d\alpha_3}{dt}\begin{vmatrix} k\alpha_1+f\beta_1-e\gamma_1 & \mathfrak{a}_1\\ k\alpha_2+f\beta_2-e\gamma_2 & \mathfrak{a}_2\end{vmatrix}-k(\mathfrak{a}_1 p+\mathfrak{a}_2 q]\\
&+\frac{T_1}{E}\frac{\mathfrak{a}_1\gamma_2-\mathfrak{a}_2\gamma_1}{(\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2)(\mathfrak{a}_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2)}\Bigg((\gamma_1 p+\gamma_2 q+\gamma_3 r)\Bigg[-\frac{\beta_1 p+\beta_2 q+\beta_3 r}{\mathfrak{a}_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2}\\
&+\frac{(\mathfrak{a}_1 p+\mathfrak{a}_2 q)(\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2)}{\mathfrak{a}_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2}\Bigg]-\begin{vmatrix}\mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & 0\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \frac{dp}{dt} & \frac{dq}{dt} & \frac{dr}{dt}\end{vmatrix}\Bigg)\\
&-\frac{gm_2}{E}\left[l(\mathfrak{a}_1\beta_2-\mathfrak{a}_2\beta_1)+a_2\gamma_2-b_2\gamma_1\right]\\
&+\frac{gm_1s_1}{\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2}\cdot\begin{vmatrix}\mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\cos\iota_1 & -\mathfrak{a}_1\beta_1-\mathfrak{a}_2\beta_2\\ \sin\iota_1 & \mathfrak{a}_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2\end{vmatrix}\Bigg\}
\end{aligned}
$$

Setzt man diesen Wert von $\frac{\lambda}{E}$ in Gleichung (20) ein, so ergeben jetzt die beiden Gleichungen (19) und (20) bei Berücksichtigung der Bedingungsgleichungen des Systemes

$$
\mathfrak{a}_1\alpha_1+\mathfrak{a}_2\alpha_2+\mathfrak{a}_3\alpha_3=\mathfrak{b}_1,\quad \begin{vmatrix}\mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ p & q & r\end{vmatrix}=0
$$

durch nochmalige Integration die Bewégung des Gaussischen Pendels.

6.

Der Weg der Integration ist aber derjenige der successiven Approximation, d. h. man nimmt zunächst an, dass die Entfernung des Körpers aus der Gleichgewichtslage so gering sei, dass man ihre höheren Potenzen gegen die niedrigeren vernachlässigen könne, nimmt dann in den betrachteten Gleichungen immer die nächst höheren Potenzen des Ausschlags hinzu, bis die Näherung genügend scheint.

Man hat für die weitere Behandlung des Drehungsproblems drei Winkel ϑ, ψ, χ eingeführt, die mit den Coefficienten α_1, β_1, γ_1 etc. der orthogonalen Substitution durch die Gleichungen

$$
\begin{array}{ll|l}
\alpha_1 = - \sin\chi\sin\psi + \cos\chi\cos\psi\cos\vartheta & & \\
\beta_1 = \quad \sin\chi\cos\psi + \cos\chi\sin\psi\cos\vartheta & & \alpha_3 = \cos\psi\sin\vartheta \\
\gamma_1 = - \cos\chi\sin\vartheta & & \beta_3 = \sin\psi\sin\vartheta \\
\hline
\alpha_2 = - \cos\chi\sin\psi - \sin\chi\cos\psi\cos\vartheta & & \gamma_3 = \cos\vartheta \\
\beta_2 = \quad \cos\chi\cos\psi - \sin\chi\sin\psi\cos\vartheta & & \\
\gamma_2 = \quad \sin\chi\sin\vartheta & &
\end{array}
$$
[1])

zusammenhangen. Es bedeutet dabei ϑ den Winkel, welchen die $+c$-achse mit der $+w$-achse bildet. Da bei genauer Erfüllung aller Anforderungen an Präcision der Winkel ϑ in der Ruhelage genau gleich Null ist, so eignet sich eine Entwickelung nach Potenzen von ϑ am besten für den Zweck der successiven Näherung. Der Winkel ψ wird von der durch die c-achse und die w-achse gelegten Ebene mit der durch die feste Drehachse und die Schwerkraft bestimmten Ebene gebildet. Endlich bedeutet χ den Winkel, den die c-w-ebene mit der ac-ebene bildet, und die beiden letzten Winkel sind auf der südlichen Hemisphäre im Sinne der Erdrotation, auf der nördlichen im entgegengesetzten Sinne zu zählen.

Die Bedingungsgleichung des Systems

$$\mathfrak{a}_1\alpha_1 + \mathfrak{a}_2\alpha_2 + \mathfrak{a}_3\alpha_3 = \mathfrak{b}_1$$

constituirt zugleich einen Zusammenhang zwischen den Winkeln, vermöge dessen sich einer von ihnen, z. B. χ, aus den beiden andern, also ϑ und ψ, berechnen lässt.

Wir werden bei allen folgenden Entwickelungen nur bis zu vierten Potenzen von ϑ aufsteigen, weil sich bei Berücksichtigung dieser schon complicirte Formeln ergeben, die charakteristischen Züge der Bewegung aber durch die höheren Glieder kaum wesentlich alterirt werden. Weil wir nun später die mit $\mathfrak{b}_1$, ν, l etc. multiplicirten Glieder erst in zweiter Näherung behandeln und bei dieser — also bei Berücksichtigung von sogenannten Störungen erster Ordnung stehen bleiben wollen, so wird es genügen in allen mit jenen kleinen Grössen multiplicirten Gliedern die beiden niedrigsten Potenzen von ϑ zu berücksichtigen, die in ihnen vorkommen. Schliesslich werden — wie erwähnt — die Producte jener kleinen Grössen künftig unterdrückt werden.

---

1) u. a. Hansen, a. a. O. pag. 20.

Mit Berücksichtigung dieser Bemerkungen findet man jene Relation zwischen den ϑ, ψ, χ durch Substitution der auf der vorigen Seite gegebenen Werte von α_1, β_1, γ_1 in die Bedingungsgleichung wie folgt

$$\mathfrak{d}_1 = \cos\mu\left(-\sin\chi\sin\psi + \cos\chi\cos\psi\left(1-\frac{\vartheta^2}{2}+\frac{\vartheta^4}{24}\right)\right)$$
$$+\sin\mu\left(-\cos\chi\sin\psi - \sin\chi\cos\psi\left(1-\frac{\vartheta^2}{2}+\frac{\vartheta^4}{24}\right)\right)$$
$$+\nu\cos\psi\vartheta$$
$$= \cos(\psi+\chi+\mu) - \cos\psi\cos(\chi+\mu)\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^4}{24}\right)+\nu\vartheta\cos\psi$$

Der Winkel $\psi+\chi+\mu$ ist in der Ruhelage der Winkel, um den die bewegliche Achse von der festen Achse absteht, und dieser war bis auf kleine Fehler gleich $\frac{\pi}{2}$ definirt, also wird

$$\cos(\chi+\psi+\mu) = \mathfrak{d}_1 - \nu\vartheta\cos\psi + \cos\psi\cos(\chi+\mu)\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^4}{24}\right)$$

$$\sin(\chi+\psi+\mu) = 1 - \mathfrak{d}_1\frac{\vartheta^2}{2}\cos\psi\cos(\chi+\mu) + \nu\frac{\vartheta^3}{2}\cos^2\psi\cos(\chi+\mu)$$
$$-\frac{\vartheta^4}{8}\cos^2\psi\cos^2(\chi+\mu)$$

$$\cos(\chi+\mu) = \cos(\chi+\psi+\psi\mu)\cos\psi + \sin(\chi+\psi+\mu)\sin\psi$$
$$= \sin\psi + \mathfrak{d}_1\cos\psi - \nu\vartheta\cos^2\psi + \frac{\vartheta^2}{2}\cos^2\psi\sin\psi,$$

wenn man die Entwickelung nur soweit treibt, als es zur Substitution des Wertes von $(\chi+\mu)$ in denjenigen von $\cos(\chi+\psi+\mu)$ nötig ist. Somit wird

$$\cos(\chi+\psi+\mu) = \mathfrak{d}_1 - \nu\vartheta\cos\psi + \frac{\vartheta^2}{2}\sin\psi\cos\psi$$
$$+\frac{\vartheta^4}{4}\left(\cos^3\psi\sin\psi - \tfrac{1}{6}\sin\psi\cos\psi\right)$$

$$\text{(I)}\quad \chi = \frac{\pi}{2} - \psi - \mu - \mathfrak{d}_1 + \nu\vartheta\cos\psi - \frac{\vartheta^2}{2}\sin\psi\cos\psi$$
$$-\frac{\vartheta^4}{4}\left(\cos^3\psi\sin\psi - \tfrac{1}{6}\sin\psi\cos\psi\right)$$

mit hinreichender Genauigkeit.

Auch die Grössen p, q, r sind durch die Grössen ϑ, ψ, χ und ihre Differentialquotienten auszudrücken, und zwar ist [1])

$$r = \frac{d\chi}{dt} + \cos\vartheta \frac{d\psi}{dt} = \frac{d(\chi+\psi)}{dt} - \left(\frac{\vartheta^2}{2} - \frac{\vartheta^4}{24}\right)\frac{d\psi}{dt}$$

$$q = \sin\chi \sin\vartheta \frac{d\psi}{dt} + \cos\chi \frac{d\vartheta}{dt}$$

$$p = -\cos\chi \sin\vartheta \frac{d\psi}{dt} + \sin\chi \frac{d\vartheta}{dt}$$

Aber aus Gleichung (I) folgt

$$\frac{d(\chi+\psi)}{dt} = \nu \frac{d(\vartheta\cos\psi)}{dt} - \vartheta \frac{d\vartheta}{dt}\sin\psi\cos\psi - \frac{\vartheta^2}{2}\cos2\psi\frac{d\psi}{dt}$$

$$- \vartheta^3 \frac{d\vartheta}{dt}\sin\psi\cos\psi(\cos^2\psi - \tfrac{1}{6}) - \frac{\vartheta^4}{4}(\cos\psi\cos3\psi - \tfrac{1}{6}\cos2\psi)\frac{d\psi}{dt}$$

$$\text{(II)} \quad r = \nu \frac{d(\vartheta\cos\psi)}{dt} - \vartheta \frac{d\vartheta}{dt}\sin\psi\cos\psi - \frac{\vartheta^2}{2}\cos^2\psi \frac{d\psi}{dt}$$

$$- \vartheta^3 \frac{d\vartheta}{dt}\sin\psi\cos\psi(\cos^2\psi - \tfrac{1}{6}) - \frac{\vartheta^4}{24}\cos\psi(6\cos3\psi - 2\cos\psi)\frac{d\psi}{dt}$$

also — ϑ und ν als Grössen erster Ordnung aufgefasst — bis auf Grössen zweiter Ordnung

$$r = \nu \frac{d(\vartheta\cos\psi)}{dt} - \vartheta\cos\psi \frac{d(\vartheta\sin\psi)}{dt}$$

Es leuchtet hienach ein, dass, während p und q Grössen erster Ordnung sind in Beziehung auf die Grössen ϑ, $\frac{d\vartheta}{dt}$, ν, ν_1; r von der zweiten Ordnung in Bezug auf dieselben ist.

Eine Grösse von besonderer Kleinheit ist die Rotationsgeschwindigkeit der Erde. Dieselbe beträgt in Winkelmaass $15'',041$, also in Bogenmaass $\frac{1}{13714}$ [2]). Wir werden daher, ohne die Grenzen der zu Grunde gelegten Genauigkeit zu verengern, sicherlich in den mit n multiplicirten, also den Grössen e, f, k proportionalen Gliedern nur bis zu dritten Potenzen von ϑ aufzusteigen nötig haben, dort aber, wo e, f, k mit anderen kleinen Werten, wie $\varDelta$ oder l multiplicirt auftreten, nur bis zu Quadraten von ϑ.

1) u. a. Hansen, pag. 20.

2) Hansen a. a. O. pag. 34 f., welcher pag. 31. n als eine Grösse zweiter oder höherer Ordnung bezeichnet.

Unter dieser Voraussetzung erkennt man leicht, dass in der Formel für $\frac{\lambda}{E}$ die ersten mit dem Factor $\frac{C}{E}$ multiplicirten Glieder von der zweiten Ordnung in ϑ, ν etc. sind, ebenso wie das Glied mit dem Factor $m_1 s_1$, wenn man diesen als von der ersten Ordnung rechnet, alle übrigen Glieder aber von höherer Ordnung sind.

In der Gleichung (20) kommt nun vor

$$-\int \frac{\lambda}{E}\, dt(\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2+\mathfrak{a}_3\beta_3),$$

im Ausdrucke für $\frac{\lambda}{E}$ ist also die Grösse in der Parenthese mit

$$-\frac{\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2+\mathfrak{a}_3\beta_3}{\mathfrak{a}_1\alpha_2-\mathfrak{a}_2\alpha_1}$$

zu multipliciren und das Product nach der Zeit zu integriren. Bei der Entwickelung des eben hingeschriebenen Factors ist demnach nur ein Aufsteigen bis zu Grössen zweiter Ordnung in ϑ und ν nötig, und da sich herausstellt, dass derselbe von 1 nur um Grössen zweiter Ordnung verschieden ist, so kann man das betreffende Glied der rechten Seite von Gleichung (20) einfach hinschreiben, indem man den Ausdruck in der Parenthese in Gleichung (21) integrirt und nur die aus der ersten Zeile desselben entspringenden Glieder vierter Ordnung hinzufügt. Um die Richtigkeit der über den Ausdruck

$$-\frac{\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2+\mathfrak{a}_3\beta_3}{\mathfrak{a}_1\alpha_2-\mathfrak{a}_2\alpha_1}$$

aufgestellten Behauptung zu beweisen, entwickeln wir zunächst die α_1, β_1, γ_1, etc. nach Potenzen von ϑ und erhalten

$$\alpha_1 = \cos(\chi+\psi)-\cos\chi\cos\psi\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^4}{24}\right)$$

$$\alpha_2 = -\sin(\chi+\psi)+\sin\chi\cos\psi\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^4}{24}\right)$$

$$\alpha_3 = \cos\psi\left(\vartheta-\frac{\vartheta^3}{6}\right)$$

$$\beta_1 = \sin(\chi+\psi)-\cos\chi\sin\psi\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^4}{24}\right)$$

$$\beta_2 = \cos(\chi+\psi)+\sin\chi\sin\psi\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^4}{24}\right)$$

$$\beta_3 = \sin\psi\left(\vartheta-\frac{\vartheta^3}{6}\right)$$

$$\gamma_1 = -\cos\chi\left(\vartheta - \frac{\vartheta^3}{6}\right)$$

$$\gamma_2 = \sin\chi\left(\vartheta - \frac{\vartheta^3}{6}\right)$$

$$\gamma_3 = 1 - \frac{\vartheta^2}{2} + \frac{\vartheta^4}{24}$$

Hiermit wird

$$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 = \sin(\chi+\psi+\mu) + \nu\vartheta\sin\psi - \frac{\vartheta^2}{2}\sin\psi\cos(\chi+\mu)$$

$$a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1 = -\sin(\chi+\psi+\mu) + \cos\psi\sin(\mu+\chi)\frac{\vartheta^2}{2}$$

und da wir die Entwickelung nur bis zu Quadraten von ϑ zu treiben brauchen, so entnehmen wir einfach von pag. 33.

$$\begin{aligned} \sin(\chi+\psi+\mu) &= 1 \\ \cos(\chi+\mu) &= \sin\psi \\ \sin(\chi+\mu) &= \cos\psi \end{aligned}$$

Demnach erhalten wir

$$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 = 1 + \nu\vartheta\sin\psi - \frac{\vartheta^2}{2}\sin^2\psi$$

$$a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1 = -\left(1 - \frac{\vartheta^2}{2}\cos^2\psi\right)$$

$$-\frac{a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3}{a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1} = 1 + \nu\vartheta\sin\psi + \frac{\vartheta^2}{2}\cos 2\psi$$

womit die obige Behauptung bewiesen ist.

Wenn wir jetzt die Gleichung (20) mit Rücksicht auf den Wert von

$$-\int\frac{\lambda}{E}(a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3)\,dt$$

hinschreiben, so dürfen wir von vornherein mehrere Glieder, die sich als solche von der fünften Ordnung erweisen, bei Seite lassen; wir wenden ferner auf die Reduction der Gleichung (20) nur noch die Identitäten

$$(\gamma_2 p - \gamma_1 q)\,dt = -d\gamma_3,$$

$$(\beta_2 p - \beta_3 q)\,dt = -d\beta_3\,(\alpha_2 p - \alpha_1 q) = -d\alpha_3$$

[redacted]

an, und erhalten bei passender Anordnung der Glieder die Gleichung

$$(22)\quad \gamma_1 p+\gamma_2 q+\frac{C}{E}\{(\gamma_3-1)r-\int dr\,(\nu\vartheta\sin\psi+\frac{\vartheta^2}{2}\cos 2\psi)\}$$

$$+\frac{e}{2}\gamma_3^2-\int(f\beta_3+k\alpha_3)d\gamma_3+\frac{C}{4E}e(\gamma_1^2+\gamma_2^2-\gamma_3^2+2\gamma_3)$$

$$-\frac{C}{2E}\int\{(f\beta_1+k\alpha_1)d\gamma_1+(f\beta_2+k\alpha_2)d\gamma_2-(f\beta_3+k\alpha_3)d\gamma_3\}$$

$$-\frac{C}{2E}(f\beta_3+k\alpha_3)-\frac{C}{2E}\int(fd\beta_3+kd\alpha_3)(\nu\vartheta\sin\psi+\frac{\vartheta^2}{2}\cos 2\psi)$$

$$+\Delta\Big(\gamma_1 p-\gamma_2 q+2\int pq\,dt+\frac{e}{2}(\gamma_2^2-\gamma_1^2-2\int(\gamma_2 p+\gamma_1 q)dt)\Big)$$

$$+\Delta\int\{f(\beta_1 d\gamma_1-\beta_2 d\gamma_2)+k(\alpha_1 d\gamma_1-\alpha_2 d\gamma_2)+f[(\beta_2 p+\beta_1 q)+k(\alpha_2 p+\alpha_1 q)]dt$$

$$+\frac{m_2 c_2 l}{E}\int\{(\alpha_1 dp+\alpha_2 dq)(\mathfrak{a}_2\gamma_1-\mathfrak{a}_1\gamma_2)-\alpha_3(\mathfrak{a}_2 dp-\mathfrak{a}_1 dq)\}$$

$$+\frac{m_2 c_2 l}{E}\Big(e\int\{(\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2)d\gamma_3+(\mathfrak{a}_2\gamma_1-\mathfrak{a}_1\gamma_2)(\alpha_1 d\gamma_1+\alpha_2 d\gamma_2)$$

$$-d\alpha_3(\mathfrak{a}_1\gamma_2-\mathfrak{a}_2\gamma_1)\}+f\int\{-(\mathfrak{a}_2\beta_1-\mathfrak{a}_1\beta_2)(\alpha_1 d\gamma_1+\alpha_2 d\gamma_2)-d\alpha_3(\mathfrak{a}_2\beta_1-\mathfrak{a}_1\beta_2)$$

$$+k\int\{(\mathfrak{a}_2 d\gamma_1-\mathfrak{a}_1 d\gamma_2)-(\mathfrak{a}_2\alpha_1-\mathfrak{a}_1\alpha_2)(\alpha_1 d\gamma_1+\alpha_2 d\gamma_2)-d\alpha_3(\mathfrak{a}_2\alpha_1-\mathfrak{a}_1\alpha_2)$$

$$+(\mathfrak{a}_1 p+\mathfrak{a}_2 q)dt\}\Big)-\int K_1\,dt=$$

$$\frac{\Gamma}{E}+\frac{gm_2 c_2}{E}i\int\beta_3\,dt+\frac{gm_2}{E}l\mathfrak{v}_1 t$$

$$-\frac{gm_2}{E}l\int dt(\mathfrak{a}_1\beta_2-\mathfrak{a}_2\beta_1)-\frac{gm_2}{E}\int(\mathfrak{a}_2\gamma_2-\mathfrak{b}_2\gamma_1)dt$$

$$+gm_1 s_1\int\left|\begin{matrix}\dfrac{\mathfrak{a}_1\gamma_2-\mathfrak{a}_2\gamma_1}{\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2} & \begin{matrix}\cos\iota_1\\ \sin\iota_1\end{matrix} & \begin{matrix}-\mathfrak{a}_1\beta_1-\mathfrak{a}_2\beta_2\\ \mathfrak{a}_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2\end{matrix}\end{matrix}\right|dt$$

wo unter K_1 die im Ausdrucke von $\frac{\lambda}{E}$ vorkommenden mit $\frac{T}{E}^{-1}$multiplicirten Glieder zusammengefasst sind. — In dieser Gleichung und in derjenigen der lebendigen Kraft (19), sind jetzt Entwickelungen nach Potenzen von ϑ vorzunehmen, die — wie erwähnt — im allgemeinen bis zur vierten Potenz von ϑ_1, in den mit kleinen Grössen multiplicirten Gliedern höchstens bis zur dritten, in den mit zwei kleinen Factoren, wie l und n behafteten Gliedern höchstens bis zur zweiten Potenz von ϑ getrieben werden sollen.

7.

In allen Gliedern, in denen man Grössen dritter gegen solche erster Ordnung vernachlässigt, ist

$$p = -\cos\chi\,\vartheta\frac{d\psi}{dt} + \sin\chi\frac{d\vartheta}{dt}\,; \quad q = \sin\chi\,\vartheta\frac{d\psi}{dt} + \cos\chi\frac{d\vartheta}{dt}$$

und da nach pag. (33) mit Vernachlässigung von Grössen zweiter gegen solche nullter Ordnung

$$\text{(a)} \qquad \frac{d\chi}{dt} = -\frac{d\psi}{dt}$$

ist, so hat man bei der erwähnten Genauigkeit

$$\text{(b)} \qquad p = \frac{d(\vartheta\sin\chi)}{dt} = \frac{d\gamma_2}{dt}, \quad q = \frac{d(\vartheta\cos\chi)}{dt} = -\frac{d\gamma_1}{dt}$$

und mit derselben Genauigkeit

$$\text{(c)} \qquad \alpha_1 = \cos(\chi+\psi) = \sin\mu, \quad \alpha_2 = -\sin(\chi+\psi) = -\cos\mu$$

$$\text{(d)} \quad \alpha_1 p + \alpha_2 q = \sin\mu\, p + \cos\mu\, q = \alpha_2 p - \alpha_1 q$$

$$= -\frac{d}{dt}\vartheta\cos(\chi+\mu) = -\frac{d}{dt}(\vartheta\sin\psi)$$

Mit derselben Genauigkeit ergibt sich

$$\text{(e)} \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p & q & r \end{vmatrix} = \gamma_3(\alpha_2 p - \alpha_1 q) = -\frac{d}{dt}(\vartheta\sin\psi)$$

$$\text{(f)} \qquad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 1 \quad \text{(vgl. pag. 36.)}$$

und wo — wie im Gliede $\frac{gm_2}{E} l(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)$ — das Quadrat von ϑ nicht vernachlässigt werden darf,

$$\text{(g)} \qquad \begin{aligned} \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 &= 1 - \frac{\vartheta^2}{2}\sin^2\psi \\ \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 &= -\vartheta\cos(\chi+\mu) \end{aligned}$$

Für die Umgestaltung der Gleichung (22) gilt

$$\text{(h)} \qquad \int\left(\nu\vartheta\sin\psi + \frac{\vartheta^2}{2}\cos 2\psi\right)dr = r\left(\nu\vartheta\sin\psi + \frac{\vartheta^2}{2}\cos 2\psi\right)$$

$$-\int r\{(\nu\sin\psi + \vartheta\cos 2\psi)\,d\vartheta + (\nu\vartheta\cos\psi - \vartheta^2\sin 2\psi)\,d\psi\}$$

Vernachlässigt man im folgenden Ausdrucke die Grösse $i\,n$, da sie nur in dritte Potenzen von ϑ multiplicirt auftritt, so erhält man

$$\text{(i)}\quad \int (f\beta_3 + k\alpha_3)\,d\gamma_3 = 2n\cos\varphi \int \vartheta^2 \cos(\psi + \mathfrak{A})\,d\vartheta$$

$$\text{(k)}\quad f\beta_3 + k\alpha_3 + \int (f\beta_1 + k\alpha_1)\,d\gamma_1 + \int (f\beta_2 + k\alpha_2)\,d\gamma_2$$

$$+ \int (f d\beta_3 + k d\alpha_3)\left(\nu\vartheta\sin\psi + \frac{\vartheta^2}{2}\cos 2\psi\right) =$$

$$\int f\left(\alpha_3 r\,dt - \gamma_3 d\beta_3 + d\beta_3\left(1 + \nu\vartheta\sin\psi + \frac{\vartheta^2}{2}\cos 2\psi\right)\right)$$

$$+ \int k\left(-\beta_3 r - \gamma_3 d\alpha_3 + d\alpha_3\left(1 + \nu\vartheta\sin\psi + \frac{\vartheta^2}{2}\cos 2\psi\right)\right),$$

wo die Relationen pag. 24. angewendet worden sind. Derselbe Ausdruck wird

$$= \int (f\alpha_3 - k\beta_3)\,r\,dt + \int (f d\beta_3 + k d\alpha_3)\left(\frac{\vartheta^2}{2} + \nu\vartheta\sin\psi + \frac{\vartheta^2}{2}\cos 2\psi\right)$$

$$= 2n\cos\varphi \int \left(-\vartheta\cos\psi\,\frac{d}{dt}(\vartheta\sin\psi) + \nu\,\frac{d}{dt}(\vartheta\cos\psi)\right)\vartheta\sin(\psi + \mathfrak{A})\,dt$$

$$- 2n\cos\varphi \int (\vartheta^2\cos^2\psi + \nu\vartheta\sin\psi)\,d(\vartheta\cos(\psi + \mathfrak{A})) =$$

$$- 2n\cos\varphi \int \vartheta\,d\vartheta\,(\vartheta\cos\psi\cos\mathfrak{A} - \nu\sin\mathfrak{A}).$$

Mit Hülfe der Formeln (b) ergibt sich ferner

$$\text{(l)}\quad \gamma_1\gamma_2 - \gamma_2\gamma_1 + 2\int pq\,dt = \int (\gamma_1\,dp - \gamma_2\,dq - 2pq\,dt + 2pq\,dt)$$

$$= \int \left(\gamma_2\,\frac{d^2\gamma_2}{dt^2} + \gamma_2\,\frac{d^2\gamma_1}{dt^2}\right)dt$$

$$\text{(m)}\quad \gamma_2^2 - \gamma_1^2 - 2\int (\gamma_2 p + \gamma_1 q)\,dt$$

$$= \gamma_2^2 - \gamma_1^2 - 2\int (\gamma_2\,d\gamma_2 - \gamma_1\,d\gamma_1) = c,$$

wo c die Integrationsconstante bedeutet, die zu $\int$ geschlagen wird. Auch die übrigen von Δ und der Erdrotation abhängigen Glieder ergeben mit Benutzung der Formeln (b) nur eine Integrationsconstante.

(n) $(\alpha_1 dp + \alpha_2 dq)(\mathfrak{a}_2\gamma_1 - \mathfrak{a}_1\gamma_2) - \alpha_3(\mathfrak{a}_2 dp - \mathfrak{a}_1 dq) =$
$- \alpha_3[(\alpha_1 + \mathfrak{a}_2) dp + (\alpha_2 - \mathfrak{a}_1) dq]$,

wobei benutzt ist, dass

$$\mathfrak{a}_2\gamma_1 - \mathfrak{a}_1\gamma_2 = -\sin(\mu + \chi)\vartheta = -\cos\psi\vartheta = -\alpha_3$$

ist. Nun ist

$$\alpha_1 = \cos(\chi + \psi) = \sin\mu, \quad \alpha_2 = -\sin(\chi + \psi) = -\cos\mu,$$

also mit Benutzung dieser Relationen und von (d)

$$- \alpha_3[(\alpha_1 + \mathfrak{a}_2)dp + (\alpha_2 - \mathfrak{a}_1)dq]$$
$$= -2\vartheta\cos\psi\, d(p\sin\mu - q\cos\mu) = +2\vartheta\cos\psi \frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\sin\psi)dt$$

(o) $\int ((\mathfrak{a}_1\beta_1 + \mathfrak{a}_2\beta_2)d\gamma_3 + (\mathfrak{a}_2\gamma_1 - \mathfrak{a}_1\gamma_2)(\alpha_1 d\gamma_1 + \alpha_2 d\gamma_2) - d\alpha_3(\mathfrak{a}_1\gamma_2 - \mathfrak{a}_2\gamma_1))$
$= \int (d\gamma_3 - \alpha_3(-\alpha_1 q + \alpha_2 p)dt - \alpha_3 d\alpha_3) = \int (d\gamma_3 + \alpha_3 d\alpha_3 - \alpha_3 d\alpha_3)$
$= [c+1] - \frac{\vartheta^2}{2}$,

wo c die Integrationsconstante bedeutet, die mit 1 zu $\frac{\Gamma}{E}$ geschlagen wird. Hier ist (b) benutzt worden.

(p) $\int -(\mathfrak{a}_2\beta_1 - \mathfrak{a}_1\beta_2)(\alpha_1 d\gamma_1 + \alpha_2 d\gamma_2 + d\alpha_3) = \text{const}$

wegen der eben unter (o) erlangten Relation

$$\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2 d\gamma_2 = -d\alpha_3$$

(q) $\int \{(\mathfrak{a}_2 d\gamma_1 - \mathfrak{a}_1 d\gamma_2) - (\mathfrak{a}_2\alpha_1 - \mathfrak{a}_1\alpha_2)(\alpha_1 d\gamma_1 + \alpha_2 d\gamma_2 + d\alpha_3)$
$+ (\mathfrak{a}_1 p + \mathfrak{a}_2 q) dt\} = \text{Const}$

nach dem unmittelbar Vorhergehenden und nach (b).

Lässt man in den folgenden vom ersten Körper abhängigen Gliedern gleich fort, was von höherer als der dritten Ordnung ist, so folgt

$$\int K_1 dt = \frac{T_1}{E}\int \frac{\mathfrak{a}_1\gamma_2 - \mathfrak{a}_2\gamma_1}{(\mathfrak{a}_1\beta_1 + \mathfrak{a}_2\beta_2)(\mathfrak{a}_1\gamma_1 + \mathfrak{a}_2\gamma_2)}\left\{\frac{\gamma_1 p + \gamma_2 q + \gamma_3 r}{\mathfrak{a}_1\gamma_1 + \mathfrak{a}_2\gamma_2} \times\right.$$
$$\left.[-\beta_1 p - \beta_2 q + (\mathfrak{a}_1 p + \mathfrak{a}_2 q)(\mathfrak{a}_1\beta_1 + \mathfrak{a}_2\beta_2)] - \beta_3\left(\mathfrak{a}_2\frac{dp}{dt} - \mathfrak{a}_1\frac{dq}{dt}\right)\right\} dt$$

Aber es ist hier zu setzen

$$\mathfrak{a}_1\gamma_2-\mathfrak{a}_2\gamma_1=\vartheta\cos\psi$$
$$\mathfrak{a}_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2=-\vartheta\sin\psi\,;\quad \mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2=1$$
$$-\beta_1 p-\beta_2 q+(\mathfrak{a}_1 p+\mathfrak{a}_2 q)(\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2)=p(\mathfrak{a}_1-\beta_1)+q(\mathfrak{a}_2-\beta_2)$$
$$=p(\cos\mu-\sin(\chi+\psi))+q(\sin\mu-\cos(\chi+\psi))=0$$

$$\int\frac{\mathfrak{a}_1\gamma_2-\mathfrak{a}_2\gamma_1}{(\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2)(\mathfrak{a}_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2)}\left(-\beta_3\left[\alpha_2\frac{dp}{dt}-\mathfrak{a}_1\frac{dq}{dt}\right]\right)dt=$$
$$-\int\operatorname{cotg}\psi\,(\sin\psi\,\vartheta\,\frac{d^2}{dt^2}\,(\vartheta\sin\psi)=-\int\vartheta\cos\psi\,\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\sin\psi)dt$$

nach (d), und hiernach

$$-\int K_1\,dt=\frac{T_1}{E}\int\vartheta\cos\psi\,\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\sin\psi)dt$$

Ferner wird

$$-\frac{gm_2l}{E}\int dt(\mathfrak{a}_1\beta_2-\mathfrak{a}_2\beta_2)=$$
$$-\frac{gm_2l}{E}\int dt\left(\cos(\chi+\psi+\mu)+\sin\psi\sin(\chi+\mu)\frac{\vartheta^2}{2}\right)$$
$$=-\frac{gm_2l}{E}\int dt\,(\mathfrak{b}_1+\frac{\vartheta^2}{2}\sin\psi\cos\psi+\frac{\vartheta^2}{2}\sin\psi\cos\psi)$$

nach pag. 33 f.

$$=-\frac{gm_2l}{E}\mathfrak{b}_1 t-\frac{gm_2l}{E}\int\vartheta^2\sin\psi\cos\psi\,dt,$$

womit gezeigt ist, dass das der Zeit proportionale Glied in Gleichung (22) aufgehoben wird.

Sodann setzen wir

$$a_2=s_2\cos\iota_2$$
$$b_2=s_2\sin\iota_2,$$

wo s_2 den Abstand des Schwerpunktes des zweiten Körpers von der Achse des kleinsten Hauptträgheitsmomentes und ι_2 den im Sinne der wachsenden ψ zu zählenden Winkel bedeutet, den das vom Schwerpunkte auf die c-achse gefällte Lot mit einer Parallelen zur a-achse bildet. Dann wird

$$\frac{gm_2}{E}\int(a_2\gamma_2-b_2\gamma_1)\,dt=\frac{gm_2}{E}s_2\int\vartheta\sin(\chi+\iota_2)\,dt$$

zu setzen sein, da ja in den Gliedern mit kleinen Coefficienten nur

die beiden niedrigsten mit ihnen multiplicirten Potenzen von ϑ bebehalten werden sollten. Ebendeshalb wird schliesslich noch

$$\frac{gm_1 s_1}{E}\int\frac{\mathfrak{a}_1\gamma_2-\mathfrak{a}_2\gamma_1}{\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2}(\cos\iota_1(\mathfrak{a}_1\gamma_1+\mathfrak{a}_2\gamma_2)+\sin\iota_1(\mathfrak{a}_1\beta_1+\mathfrak{a}_2\beta_2))\,dt$$
$$-\frac{gm_1}{E}s_1\int\vartheta\cos\psi(\cos\iota_1\vartheta\sin\psi-\sin\iota_1)\,dt$$

Durch die erwähnten Umgestaltungen, und wenn man alle bediesen Reductionen sich ergebenden Constanten zu $\frac{h'}{E}$ resp. $\frac{\Gamma}{E}$ schlägt, ohne deshalb die Bezeichnungen zu ändern, gehen die Gleichungen (19) und (22) in die folgenden über

$$(23)\quad\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2+\left(\vartheta^2-\frac{\vartheta^4}{3}\right)\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$$
$$+\frac{C}{E}\left\{-\vartheta\cos\psi\frac{d(\vartheta\sin\psi)}{dt}+\nu\frac{d(\vartheta\cos\psi)}{dt}\right\}^2$$
$$+\varDelta\left\{\cos2\chi\left(\vartheta^2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2-\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right)-2\sin2\chi\frac{d\psi}{dt}\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}\right\}$$
$$+\frac{2lm_2c_2}{E}\left(\frac{d(\vartheta\sin\psi)}{dt}\right)^2+\frac{T_1}{E}\left(\frac{d}{dt}(\vartheta\sin\psi)\right)^2=$$
$$\frac{h'}{E}-\frac{2gm_2c_2}{E}i\vartheta\cos\psi-\frac{2gm_2}{E}\left(\frac{l}{2}\vartheta^2\sin^2\psi+c_2\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^4}{24}\right)\right)$$
$$-\frac{2gm_2}{E}s_2\vartheta\cos(\chi+\iota_2)+\frac{2gm_1s_1}{E}\left(\vartheta\sin\psi\sin\iota_1-\frac{\vartheta^2}{2}\sin^2\psi\cos\iota_1\right)$$

$$(42)\quad\left(\vartheta^2-\frac{\vartheta^4}{3}\right)\frac{d\psi}{dt}-\frac{C}{E}\frac{\vartheta^2}{2}r-\frac{C}{E}\int dr\left(\nu\vartheta\sin\psi+\frac{\vartheta^2}{2}\cos2\psi\right)$$
$$-\frac{e}{2}\left(1-\frac{C}{2E}\right)\vartheta^2-2n\cos\varphi\left(1-\frac{C}{2E}\right)\int\vartheta^2\cos(\psi+\mathfrak{A})\,d\vartheta$$
$$+2n\cos\varphi\frac{C}{2E}\int\vartheta\,d\vartheta(\vartheta\cos\psi\cos\mathfrak{A}-\nu\sin\mathfrak{A})$$
$$-\varDelta\int\left(\vartheta\sin\chi\frac{d^2(\vartheta\cos\chi)}{dt^2}+\vartheta\cos\chi\frac{d^2(\vartheta\sin\chi)}{dt^2}\right)dt$$
$$+2\frac{m_2c_2l}{E}\int\vartheta\cos\psi\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\sin\psi)-\frac{m_2c_2le}{2E}\vartheta^2$$
$$+\frac{T_1}{E}\int\vartheta\cos\psi\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\sin\psi)=\frac{\Gamma}{E}-\frac{gm_2l}{E}\int\vartheta^2\sin\psi\cos\psi\,dt$$
$$+\frac{gm_2c_2}{E}i\int\vartheta\sin\psi\,dt-\frac{gm_2}{E}s_2\int\vartheta\sin(\chi+\iota_2)\,dt$$
$$+\frac{gm_1s_1}{E}\int\vartheta\cos\psi(\sin\iota_1-\cos\iota_1\vartheta\sin\psi)\,dt.$$

§ 2.

Erste Annäherung zur zweiten Integration der Differentialgleichungen der Bewegung.

8.

Um die ersten Integrale (23) und (24) der Bewegungsgleichungen nochmals zu integriren, will ich den Weg successiver Approximation einschlagen, und werde in erster Näherung die mit den kleinen Factoren

$$\nu,\ \Delta,\ l,\ \frac{T_1}{E},\ i,\ s_2,\ m_1 s_1,\ \mathfrak{b}_1$$

behafteten Glieder vernachlässigen, zugleich aber auch die dritten und vierten Potenzen von ϑ.

Ich setze also für die erste Näherung

$$(25)\qquad \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \vartheta^2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = h'' - \frac{2gm_2c_2}{E}\,\frac{\vartheta^2}{2}$$

$$(26)\qquad \vartheta^2\frac{d\psi}{dt} = \Gamma' + \frac{e}{2}\left(1 - \frac{C}{2E}\right)\vartheta^2$$

wo jetzt einfach mit Vernachlässigung von i

$$e = 2n\sin\varphi$$

zu setzen ist, Γ' und h'' sich aber von Constanten um Grössen unterscheiden, die wir in der ersten Näherung unterdrücken wollen. Abgesehen von einer Constanten im Ausdrucke von h'' haben wir

$$(27)\quad h'' = \vartheta^4\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 - \frac{C}{E}\left(-\vartheta\cos\psi\,\frac{d(\vartheta\sin\psi)}{dt} + \nu\,\frac{d(\vartheta\cos\psi)}{dt}\right)^2$$
$$+\Delta\left\{\left(\frac{d(\vartheta\cos\chi)}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d(\vartheta\sin\chi)}{dt}\right)^2\right.$$
$$-\left(\frac{T_1}{E} + 2\frac{lm_2c_2}{E}\right)\left(\frac{d(\vartheta\sin\psi)}{dt}\right)^2$$
$$-\frac{2gm_2c_2}{E}\,i\vartheta\cos\psi - \frac{2g\,m_2}{E}\left(\frac{l}{2}\vartheta^2\sin^2\psi - c_2\frac{\vartheta^4}{24}\right)$$
$$-\frac{2gm_2}{E}s_2\vartheta\cos(\chi+\iota_2) + \frac{2gm_1s_1}{E}\left(\vartheta\sin\psi\sin\iota_1 - \frac{\vartheta^2}{2}\sin^2\psi\cos\iota_1\right)^{1)}$$

---

1) Dieses Glied kommt wegen Unterdrückung von i in e in der Gleichung (26).

$$(28)\quad \frac{d\Gamma'}{dt} = \frac{4\vartheta^3}{3}\frac{d\vartheta}{dt}\frac{d\psi}{dt} + \frac{\vartheta^4}{3}\frac{d^2\psi}{dt^2} + \left(1-\frac{C}{2E}\right)2n\cos\varphi\cos\mathfrak{A}\, i\,\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}$$

$$+\frac{C}{E}\Big\}\,\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}\left(-\vartheta\cos\psi\frac{d(\vartheta\sin\psi)}{dt} + \nu\,\frac{d(\vartheta(\cos\psi))}{dt}\right)$$

$$+(\vartheta^2\cos^2\psi + \nu\vartheta\sin\psi)\frac{d}{dt}\left(-\vartheta\cos\psi\frac{d(\vartheta\sin\psi)}{dt} + \nu\,\frac{d(\vartheta\cos\psi)}{dt}\right)$$

$$+\Delta\left\{\vartheta\sin\chi\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\cos\chi) + \vartheta\cos\chi\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\sin\chi)\right\}$$

$$-\left(\frac{T_1}{E} + \frac{2m_2c_2}{E}l\right)\vartheta\cos\psi\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\sin\psi) + \frac{2m_2c_2}{E}le\,\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}$$

$$+2n\cos\varphi\left(1-\frac{C}{2E}\right)\vartheta^2\cos(\psi+\mathfrak{A})\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{C}{E}n\cos\varphi\cos\mathfrak{A}\,\vartheta^2\cos\psi\frac{d\vartheta}{dt}$$

$$+\nu\,\frac{C}{E}n\cos\varphi\sin\mathfrak{A}\,\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{gm_2c_2}{E}i\,\vartheta\sin\psi$$

$$-\frac{gm_2s_2}{E}\vartheta\sin(\chi+\iota_2) + \frac{gm_1s_1}{E}\vartheta\cos\psi(\sin\iota_1 - \vartheta\sin\psi\cos\iota_1)$$

Wir haben hier Producte der Grössen

$$\mathfrak{d}_1,\ l,\ \nu,\ \frac{T_1}{E},\ m_1s_1,\ \Delta,\ i$$

immer vernachlässigt.

So ist es gekommen, dass die Grösse $\mathfrak{d}_1$ im Ausdrucke der h'' und Γ' nicht mehr explicite vorkommt, und wenn sie auch implicite im Ausdrucke von

$$\chi = \frac{\pi}{2} - \psi - \mu - \mathfrak{d}_1 + \nu\vartheta\cos\psi - \frac{\vartheta^2}{2}\sin\psi\cos\psi$$
$$-\frac{\vartheta^4}{4}(\cos^3\psi\sin\psi - \tfrac{1}{6}\sin\psi\cos\psi)$$

vorkommt, so kann sie nach Ausführung der betreffenden Rechnungen doch immer nur als Factor einer anderen kleinen Grösse erscheinen, und wird deshalb auch in unsere schliesslichen Ergebnisse gar nicht eingehen, weil wir die durch Producte der störenden Kräfte bewirkten Aenderungen der Bewegung von der Betrachtung ausschliessen.

Wenn nun auch $\mathfrak{d}_1$ in die Störungen erster Ordnung gar nicht eingeht, so soll doch nicht behauptet werden, dass die Sorgfalt, die bei Anfertigung der cardanischen Aufhängung darauf verwendet wird, dass die Schneiden auf einander senkrecht stehen, ungerechtfertigt sei, weil immerhin Glieder mit den Factoren

$$l\mathfrak{d}_1,\quad \nu\mathfrak{d}_1,\quad \Delta\mathfrak{d}_1,\quad \frac{T_1}{E}\mathfrak{d}_1,\quad m_1 s_1\mathfrak{d}_1,\quad s_2\mathfrak{d}_1$$

von merklichem Einflusse auf das Endresultat sein könnten.

Dass $\mathfrak{d}_1$ im Ausdrucke von χ erscheint, ändert an der Bewegung nichts. da dieselbe ja schon durch die Variablen ϑ und ψ allein bestimmt ist [1]).

Um die Bedeutung der in den Gleichungen (25) und (26) als constant angesehenen Grössen zu erkennen, die mit h'' und Γ' bezeichnet sind, denke man sich das Pendel aus der Gleichgewichtslage um den Winkel ε entfernt und dort mit einer Geschwindigkeit v in der Richtung angestossen, die auf der durch die Lotlinie und den Schwerpunkt des Pendels bestimmten Ebene senkrecht steht, dann wird — da ja der Schwerpunkt des Ganzen vorläufig als in der c-achse liegend und diese in der Ruhelage mit der α-achse zusammenfallend angesehen wird — für den betrachteten Anfangspunkt der Bewegung

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = v, \quad \vartheta = \varepsilon$$

$$h'' = \varepsilon^2 v^2 + \frac{g m_2 c_2}{E}\varepsilon^2 \tag{29}$$

$$\Gamma' = \varepsilon^2 v - \frac{c}{2}\varepsilon^2\left(1 - \frac{C}{2E}\right)$$

womit h'' und Γ' durch zwei andere Grösssen ε und v ausgedrückt sind, die eine einfache mechanische Bedeutung haben. Sucht man umgekehrt ε und v durch h'' und Γ' auszudrücken, so werden ihre Werte mehrdeutig. Denn aus der zweiten Gleichung folgt:

$$v = \frac{\Gamma'}{\varepsilon^2} - \frac{c}{2}\left(1 - \frac{C}{2E}\right),$$

und dies in die erste Gleichung substituirt, liefert

$$h'' = \varepsilon^2\left(\frac{\Gamma'^2}{\varepsilon^4} - \frac{c\Gamma'}{\varepsilon^2}\left(1 - \frac{C}{2E}\right) + \frac{c^2}{4}\left(1 - \frac{C}{2E}\right)^2\right) + \frac{g m_2 c_2}{E}\varepsilon^2$$

und nach einigen Reductionen, wenn

---

1) Die wahre Bedeutung der cardanischen Aufhängung beruht in der Tat nicht auf einer mechanischen, sondern einer geometrischen Betrachtung. Diese lehrt, dass für kleine Werte von $\mathfrak{d}_1$ die gebräuchlichen Ausschläge des Apparates sämtlich möglich sind, und dass überhaupt nur, wenn $\mathfrak{d}_1$ einen beträchtlichen — mit Leichtigkeit zu vermeidenden — Wert hat, nicht mehr sämtliche grösseren Ausschläge zu erreichen sind.

$$(\delta)\qquad -4\Gamma'^2 = a, \quad 4\left(h'' - e\Gamma'\left(1 - \frac{C}{2E}\right)\right) = b,$$
$$\frac{gm_2c_2}{E} + \frac{e^2}{4}\left(1 - \frac{C}{2E}\right)^2 = \omega^2$$

gesetzt wird:

$$(\varepsilon)\qquad 0 = -a - b\varepsilon^2 + 4\omega^2\varepsilon^4$$
$$\varepsilon^2 = \frac{b \pm \sqrt{16a\omega^2 + b^2}}{8\omega^2}$$

wo man für ε^2 zwei positive reelle Wurzeln gefunden hat, deren grössere wir mit ε^2 weiter bezeichnen wollen, während wir für die kleinere die Benennung ε'^2 einführen wollen. Unter ε und ε' wollen wir fernerhin wesentlich positive Grössen verstehen.

Wir können jetzt noch Γ' und h'' durch ε^2 und ε'^2 ausdrücken.

In der quadratischen Gleichung (ε) für ε^2 ist nämlich

$$\varepsilon^2\varepsilon'^2 = -\frac{a}{4\omega^2}, \quad \varepsilon^2 + \varepsilon'^2 = \frac{b}{4\omega^2}$$

$$\varepsilon^2\varepsilon'^2 = \frac{\Gamma'^2}{4\omega^2}, \quad \varepsilon^2 + \varepsilon'^2 = \frac{h''}{\omega^2} - \frac{e\Gamma'}{\omega^2}\left(1 - \frac{C}{2E}\right)$$

Setzt man ferner fest, dass unter ω derjenige Wert von

$$\sqrt{\frac{gm_2c_2}{E} + \frac{e^2}{4}\left(1 - \frac{C}{2E}\right)^2}$$

verstanden werden soll, der mit Γ' gleiches Vorzeichen hat, also auch im allgemeinen mit v im Vorzeichen übereinstimmt[1]) — wenn nicht gerade

$$0 < v < \frac{e}{2}\left(1 - \frac{C}{2E}\right)$$

ist —, so erhält man die Relationen

$$(30)\qquad \Gamma' = \omega\varepsilon\varepsilon'$$
$$h'' = \omega^2(\varepsilon^2 + \varepsilon'^2) + e\,\omega\,\varepsilon\varepsilon'\left(1 - \frac{C}{2E}\right)$$

---

1) In dem Specialfalle, wo $\Gamma' = 0$ ist, soll ω auch positiv gerechnet werden; ω soll also positiv sein, wenn das Pendel im Sinne der wachsenden ψ herumschwingt oder durch die Ruhelage geht, negativ im anderen Falle.

[redacted]

Um jetzt die Differentialgleichungen (25) und (26) zu integriren, setzen wir den Wert von $\frac{d\psi}{dt}$ aus der zweiten in die erste ein, und erhalten

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \frac{e^2}{4}\vartheta^2\left(1 - \frac{C}{2E}\right)^2 + e\Gamma'\left(1 - \frac{C}{2E}\right) + \frac{\Gamma'}{\vartheta^2} = h'' - \frac{gm_2c_2}{E}\vartheta^2$$

Multiplicirt man die Gleichung mit $4\vartheta^2$, so lässt sie sich schreiben

$$\left(\frac{d(\vartheta^2)}{dt}\right)^2 = -4\Gamma'^2 + 4\vartheta^2\left(h'' - e\Gamma'\left(1 - \frac{C}{2E}\right)\right)$$
$$-4\vartheta^4\left(\frac{gm_2c_2}{E} - \frac{e^2}{4}\left(1 - \frac{C}{2E}\right)^2\right)$$

also nach den Bezeichnungen unter (δ) der vorigen Seite

$$dt = \frac{\pm d(\vartheta^2)}{\sqrt{a + b\vartheta^2 - 4\omega^2\vartheta^4}}$$

Aber der Nenner hat nach der vorigen Seite (ε) genau die Nullstellen ε^2 und ε'^2, also wird

$$dt = \frac{\pm (d\vartheta^2)}{\sqrt{4\omega^2(\varepsilon^2 - \vartheta^2)(\vartheta^2 - \varepsilon'^2)}}$$

und nach den Regeln der Integralrechnung

$$t = t_0 \mp \frac{2}{2\omega}\operatorname{arctang}\sqrt{\frac{\varepsilon^2 - \vartheta^2}{\vartheta^2 - \varepsilon'^2}}$$

wo t_0 die Integrationsconstante bedeutet. Hieraus

(31) $$\vartheta^2 = \varepsilon^2\cos^2(\omega t + \eta) + \varepsilon'^2\sin^2(\omega t + \eta),$$

wo jetzt

$$-\omega t_0 = \eta$$

die Integrationsconstante bedeutet. Man erkennt, dass ε und ε' resp. der grösste und der kleinste Wert sind, die ϑ annehmen kann.

In dem Ausdrucke für ω^2

$$\omega^2 = \frac{gm_2c_2}{E} + \frac{e^2}{4}\left(1 - \frac{C}{2E}\right)^2$$

dürfen wir unbedenklich den zweiten Teil vernachlässigen. Die

Wirkung dieses Termes wächst — wie Hansen [1]) gezeigt hat — mit der Länge des Pendels, und die Schwingungsdauer wird für das Secundenpendel dadurch um ihren drei- bis viertausend-millionsten Teil, für ein 900^m langes Pendel auch erst um ihren viermillionsten Teil geändert. Unter der Schwingungsdauer soll nämlich die Zeit verstanden werden, die von einer grössten Elongation des Pendels bis zur nächsten verstreicht. Dieselbe wird hiernach

$$T = \frac{\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{E}{g m_2 c_2}}.$$

Aus den Gleichungen (29) und (30) folgt

$$\varepsilon' = \frac{\Gamma'}{\omega \varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\omega}\left(v - \frac{e}{2}\left(1 - \frac{C}{2E}\right)\right)$$

Die kleinste Elongation hängt also — freilich in geringem Masse — von der Erdrotation ab, und ist, selbst wenn die anfänglich dem Pendel erteilte Geschwindigkeit Null ist, nicht gleich Null, während ω in diesem Falle einen geringen negativen Wert hat. Soll wie wir festgesetzt haben $\varepsilon > \varepsilon'$ sein, so muss der anfängliche Seitenstoss der Bedingung genügen

$$v \lesseqgtr \omega + \frac{e}{2}\left(1 - \frac{C}{2E}\right) \quad \text{für} \quad \omega \gtrless 0$$

9.

Um die Grösse ψ durch Integration als Function der Zeit zu ermitteln gehe ich auf Gleichung (26) zurück, die vermöge der Gleichungen (30) und (31) sich folgendermassen schreiben lässt

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{e}{2}\left(1 - \frac{C}{2E}\right) + \frac{\Gamma'}{\vartheta^2} = \frac{e}{2}\left(1 - \frac{C}{2E}\right)$$
$$+ \frac{\omega \varepsilon \varepsilon'}{\varepsilon^2 \cos^2(\omega t + \eta) + \varepsilon'^2 \sin^2(\omega t + \eta)}$$

und integrirt

1) a. a. O. pag. 35.

32) $$\psi - \psi_0 = \frac{e}{2}\left(1 - \frac{C}{2E}\right)t + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\operatorname{tang}(\omega t + \eta)\right)$$ [1]

gibt, wo ψ_0 die Integrationsconstante bedeutet.

In den grössten Elongationen des Pendels wird der zweite Teil dieses Ausdrucks gleich Null; der Wert, den der Winkel ψ in der grössten Elongationen hat, erleidet also eine der Zeit proportionale Aenderung, was man — für den Fall, dass das Pendel durch die Ruhelage hindurchschwingt, ε' also Null wird — so auszudrücken pflegt, dass die sogenannte Schwingungsebene eine der Zeit proportionale Drehung mit der Geschwindigkeit $\frac{e}{2}\left(1 - \frac{C}{2E}\right)$ erfährt. Die Theorie ergibt also bei Vernachlässigungen von $\frac{C}{2E}$ gegen 1, die bekannte Erscheinung. Das Glied

$$-\frac{e}{4}\,\frac{C}{E}\,t,$$

das im Ausdrucke von $\psi - \psi_0$ vorkommt, würde sich übrigens auch aus der Hansen'schen Formel für $\psi - \psi_0$ ergeben haben, die mit unseren Bezeichnungen lautet:

$$\psi - \psi_0 = \frac{e}{2}t + \tfrac{1}{2}n'\,\frac{C}{E}\,t + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\operatorname{tang}(\omega t + \eta)\right)$$ [2]

Hansen betrachtet nämlich ein — übrigens, unrealisirbares — Pendel, das um einen mit der Erde fest verbundenen Punkt in jedem Sinne ohne Reibung drehbar ist. Er nimmt an, dass dem Pendel um die durch diesen Aufhängungspunkt und den Schwerpunkt gelegte Achse eine Rotationsgeschwindigkeit n' erteilt sei, die das Pendel, wenn sie positiv ist, auf der südlichen Hemisphäre im Sinne der Erdrotation auf der nördlichen im entgegengesetzten Sinne bewegen, wenn sie negativ ist, aber die entgegengesetzte Wirkung äussern würde. Eine solche Geschwindigkeit um die genannte Achse besitzt aber auch das Gaussische Pendel, denn dasselbe erhält durch die Erdrotation um jene Achse die Drehungsgeschwindigkeit

$$\frac{e}{2} = n \sin\varphi$$

im Sinne der Erdrotation auf der nördlichen, im entgegengesetzten auf der südlichen Halbkugel, wo ja $\sin\varphi$ negativ ist.

---

1) Hansen a. a. O. pag. 36, 2) a. a. O. pag. 36. unten.

Wir haben also, wenn wir unsere Formel aus der Hansen'schen ableiten wollen,

$$n' = -n \sin\varphi = -\frac{e}{2}$$

zu setzen und erhalten

$$\tfrac{1}{2} n' \frac{C}{E} t = -\frac{e}{4} \frac{C}{E} t,$$

womit die Uebereinstimmung unseres Gliedes mit dem Hansen'schen constatirt ist.

Um über die Grösse der Wirkung dieses Gliedes ein Urteil zu gewinnen, werden wir das Verhältniss $\frac{C}{E}$ des kleinsten Trägheitsmomentes zur halben Summe der beiden grösseren Hauptträgheitsmomente unseres Pendels untersuchen.

Da das Pendel aus einer leichten Stange besteht, die am Ende eine schwere Linie trägt, so wird es — bei alleiniger Berücksichtigung der Linse — darauf ankommen, das Verhältniss des Trägheitsmomentes iner solchen um ihre Umdrehungsachse zu demjenigen um eine Achse zu berechnen, die auf dieser senkrecht steht. Die Linse sei aus zwe Kugelsegmenten zusammengesetzt. Bedeutet d die Höhe, l[1]) den Radius der ebenen Begrenzungsfläche eines solchen, ϱ die Dichtigkeit des homogen gedachten Körpers, so ergibt sich als Trägheitsmoment desselben um die Umdrehungsachse

$$C' = \tfrac{1}{2} \varrho \pi d \left(\frac{l^4}{3} + \frac{d^4}{5}\right),$$

also für eine bicouvexe Linse mit gleichen Radien der sphärischen Begrenzungsflächen, der Dicke $2d$ und dem Durchmesser $2l$:

$$\text{(I)} \quad C = \varrho \pi d \left(\frac{l^4}{3} + \frac{d^4}{5}\right) = M \frac{\frac{l^4}{3} + \frac{d^4}{5}}{l^2 + \frac{d^2}{3}},$$

wo

$$M = \varrho \pi d \left(l^2 + \frac{d^2}{3}\right)$$

die Masse der Linse bedeutet.

---

1) In dieser Bedeutung wird der Buchstabe l bald nicht mehr gebraucht werden.

Andererseits findet sich als Trägheitsmoment der Linse um eine durch ihren Mittelpunkt gehende zur Umdrehungsachse senkrechte Achse

$$\text{(II)} \quad F = \varrho\pi d\left(\tfrac{7}{6}d^2l^2 - \tfrac{4}{5}d^4 + \tfrac{1}{6}l^4\right) = M\frac{\frac{l^4}{6} + \frac{7}{6}d^2l^2 - \frac{4}{5}d^4}{l^2 + \frac{d^2}{3}}$$

Um eine mit der letzten Achse parallele, im Abstande c_2 von dieser befindliche Achse ist das Trägheitsmoment

$$\text{(III)} \quad E = M\left(c_2{}^2 + \frac{\frac{l^4}{6} + \frac{7}{6}d^2l^2 - \frac{4}{5}d^4}{l^2 + \frac{d^2}{3}}\right)$$

Im folgenden Täfelchen sind die Grössen $\frac{C}{Ml^2}$ und $\frac{F}{Ml^2}$ mit dem Argumente $\frac{d}{l}$ tabulirt, als Extreme, zu welchen die Linse degeneriren kann, sind die kreisförmige Scheibe für $\frac{d}{l} = 0$ und die Kugel für $\frac{d}{l} = 1$ mit in dasselbe aufgenommen worden.

d/l	$C : Ml^2$	$F : Ml^2$
0,0	0,33333	0,16667
0,1	0,33225	0,17766
0,2	0,32926	0,20926
0,3	0,32520	0,25746
0,4	0,32132	0,31632
0 5	0,31923	0,37692
0,6	0,32076	0,43124
0,7	0,32782	0,46957
0,8	0,34223	0,48267
0,9	0,36579	0,46204
1,0	0,40000	0,40000

Da der Abstand der letzterwähnten Achse von der Linse im Verhältniss zu den Dimensionen derselben ziemlich gross ist, werden wir für unsere Zwecke in dem Ausdrucke

$$\frac{C}{E} = \frac{C : Ml^2}{\frac{c_1^2}{l^2} + \frac{F}{Ml^2}}$$

das zweite Glied des Nenners gegen das erste vernachlässigen dürfen. Wir betrachten folgende Specialfälle:

1) Die Kugel.

Hier ist

$$\frac{\partial}{l} = 1, \quad \frac{C}{Ml^2} : \frac{c_2^2}{l^2} = 0{,}01 \quad \text{für} \quad \frac{l}{c_2} = \frac{1}{6{,}325}$$

$$= 0{,}001 \quad \text{für} \quad \frac{l}{c_2} = \frac{1}{20}$$

2) Die ebene Scheibe.

Hier ist

$$\frac{d}{l} = 0; \quad \frac{C}{Mc_2^2} = 0{,}01 \quad \text{für} \quad c_2 : l = 5{,}7735$$

$$= 0{,}001 \quad \text{für} \quad c_2 : l = 18{,}2575.$$

3) Die Linse, deren

$$\frac{d}{l} = 0{,}45$$

ist. Hier ist nämlich, wie man durch Differentiation findet, das Verhältniss $C : Mc_2^2$ so klein als möglich. Für diese günstigste Linsenform [1]) ergibt sich

$$C : Mc_2^2 = 0{,}001 \quad \text{etwa für} \quad c_2 : l = 17{,}9.$$

Jedenfalls ist aus diesen Betrachtungen klar, dass die Herabdrückung des Wertes von $\frac{C}{E}$ auf 0,001 immer zu erreichen ist, braucht doch bei günstigst möglicher Linsenform der Durchmesser der Linse kaum kleiner als der neunte Teil der Pendellänge zu sein.

Hiernach wird die Drehung der sogenannten Schwingungssebene jedenfalls kaum um mehr als den zweitausendsten Teil ihres Betrages durch das Glied $-\frac{e}{4}\frac{C}{E}$ verringert.

---

1) Es soll nicht behauptet werden, dass im Falle $\frac{d}{l} = 0{,}45$ die für die Zwecke des Apparates günstigste Linsenform sich ergebe, sondern das, dass dann jenes Verhältuiss am meisten herabgedrückt wird.

Die vom Aufhängungspunkt nach dem Schwerpunkte des Pendels gezogene Gerade schneidet eine in der Entfernung 1 vom Aufhängungspunkte befindliche Ebene im Laufe der Zeit in einer Curve, deren Gleichung wir ermitteln wollen.[1])

In dieser Ebene gehe die $+x$ achse nach Süden, die $+y$-achse nach Westen, so ist

$$x = \vartheta \cos(\psi + \mathfrak{A})$$

$$y = \vartheta \sin(\psi + \mathfrak{A})$$

und setzt man

$$\psi_0 + \mathfrak{A} = \alpha$$

$$M = \psi_0 + \mathfrak{A} + \frac{e}{2}\left(1 - \frac{C}{2E}\right) t = \alpha + \frac{e}{2}\left(1 - \frac{C}{2E}\right) t,$$

so wird nach Gleichung (32)

$$(33) \quad \operatorname{tang}(\psi - M + \mathfrak{A}) = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \operatorname{tang}(\omega t + \eta)$$

$$\cos^2(\omega t + \eta) = \frac{\varepsilon'^2 \cos^2(\psi - M + \mathfrak{A})}{\varepsilon'^2 \cos^2(\psi - M + \mathfrak{A}) + \varepsilon^2 \sin^2(\psi - M + \mathfrak{A})}$$

$$\sin^2(\omega t + \eta) = \frac{\varepsilon^2 \sin^2(\psi - M + \mathfrak{A})}{\varepsilon'^2 \cos^2(\psi - M + \mathfrak{A}) + \varepsilon^2 \sin^2(\psi - M + \mathfrak{A})}$$

Durch Substitution dieser Werte in die Formel

$$\vartheta^2 = \varepsilon^2 \cos^2(\omega t + \eta) + \varepsilon'^2 \sin^2(\omega t + \eta)$$

ergibt sich nach geringen Reductionen

$$(34) \quad \frac{\vartheta^2 \cos^2(\psi - M + \mathfrak{A})}{\varepsilon^2} + \frac{\vartheta^2 \sin^2(\psi - M + \mathfrak{A})}{\varepsilon'^2} = 1$$

und hieraus folgt das Resultat[2]), „dass das Pendel sich auf der Oberfläche eines geraden Kegels mit elliptischer Basis bewegt, deren Axen stets mit der Winkelgeschwindigkeit

$$n \sin \varphi \left(1 - \frac{C}{2E}\right)$$

ihre Lage gegen den Meridian des Beobachtungsortes ändern."

---

1) Hansen, a. a. O. pag. 37.

2) Hansen a. a. O. pag. 37. unten.

10 [1]).

Wir gehen etwas näher auf den Fall ein, wo der seitliche Stoss so geführt ist, dass nahe

$$\varepsilon = \varepsilon'$$

ist, wo also nahe

$$v = \omega + n \sin\varphi \left(1 - \frac{C}{2E}\right)$$

ist. Es sei

$$\varepsilon' = \varepsilon - \gamma$$

und γ in Beziehung auf ε und ε' eine kleine Grösse.

Dann folgt aus Gleichung (33), wenn zugleich, wie künftighin immer der Kürze halber

$$\frac{e}{2}\left(1 - \frac{C}{2E}\right) = \mathfrak{f}$$

gesetzt wird,

$$\text{tang}(\psi + \mathfrak{A} - \alpha - \mathfrak{f}t) = \text{tang}(\omega t + \eta) - \frac{\gamma}{\varepsilon}\,\text{tang}(\omega t + \eta)$$

$$\text{(35)} \quad \psi = \alpha - \mathfrak{A} + \eta + (\omega + \mathfrak{f})t - \frac{\gamma}{2\varepsilon}\sin 2(\omega t + \eta).$$

Die Zeit, welche — die Erdrotation fortgedacht — zu einem Umlaufe des Pendels erforderlich wäre, wird also durch die Erddrehung modificirt.

ω hat jetzt nahe den Wert

$$\omega = v - \mathfrak{f},$$

ist also positiv, wenn der anfängliche Stoss das Pendel im Sinne der wachsenden, negativ, wenn er es im Sinne der abnehmenden ψ bewegt, $\mathfrak{f}$ ist positiv auf der südlichen, negativ auf der nördlichen Halbkugel. Die Zeit eines Umlaufs wird also vermehrt, wenn das Pendel im Sinne der Erdrotation läuft, vermindert, wenn es im entgegengesetzten Sinne umläuft.

Die Gleichung (35) gibt für $t = 0$ [2])

$$\psi = \alpha - \mathfrak{A} + \eta.$$

---

1) Hansen a. a. O. pag. 39.

2) Hansen a. a. O. pag. 40.

[redacted]

Die Zeit, in welcher das Pendel i Umläufe macht, wird gefunden, indem man

$$\psi - \alpha + \mathfrak{A} - \eta = \pm 2 i \pi$$

setzt, wo das obere, resp. untere Zeichen gilt, jenachdem ω positiv oder negativ ist.

Bedeutet τ die Zeit des i-maligen Umlaufs, so ist also

$$\pm 2 i \pi = (\omega + \mathfrak{f})\tau - \frac{\gamma}{2\varepsilon} \sin 2(\omega t + \eta)$$

Also mit successiver Approximation

$$\tau = \pm \frac{2 i \pi}{\omega + \mathfrak{f}} = \pm \frac{2 i \pi}{\omega}\left(1 - \frac{\mathfrak{f}}{\omega}\right)$$

$$2\omega\tau = \pm 4\pi i \left(1 - \frac{\mathfrak{f}}{\omega}\right)$$

$$\sin 2\omega\tau = \mp \frac{4\pi i \mathfrak{f}}{\omega}$$

Durch diese Substitution erhalten wir in zweiter Näherung

$$\pm 2 i \pi = (\omega + \mathfrak{f})\,\tau \pm \frac{\gamma}{2\varepsilon}\,\frac{4\pi i \mathfrak{f}}{\omega}$$

(36) $$\tau = \pm \frac{2 i \pi \left(1 - \frac{\gamma}{\varepsilon}\,\frac{\mathfrak{f}}{\omega}\right)}{\omega + \mathfrak{f}} = - \frac{2 i \pi}{\omega}\left(1 - \frac{\mathfrak{f}}{\omega}\left(1 + \frac{\gamma}{\varepsilon}\right)\right)$$

Bedeutet demnach τ_2 die Zeit eines Umlaufes des Pendels im Sinne der wachsenden, τ_1 eines solchen im Sinne der abnehmenden ψ, so ist

(37) $$\tau_2 - \tau_1 = - \frac{4\pi}{\omega^2}\, \mathfrak{f} \left(1 + \frac{\gamma}{\varepsilon}\right)$$ [1]

Hierus folgert Hansen, dass der Unterschied $(\tau_2 - \tau_1)$ von der anfänglichen Elongation ε des Pendels von der Lotlinie unabhängig sei, wenn das Pendel genau in einem Kreise laufe, dass dieser Unterschied sich aber wenig ändere, wenn die Bahn von einem Kreise wenig verschwinden, $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ also klein sei,

---

1) Hansen erhält pag. 40. a. a. O. den Factor $1 + \frac{\gamma}{2\varepsilon}$ in Folge eines Rechenfehlers; der Unterschied ist nicht wesentlich.

Nach Gleichung (36) ist die Zahl der Umläufe des Körpers in einem mittleren Sonnentage

$$i = \pm \frac{86\,400\,\omega}{2\pi}\left(1+\frac{\mathfrak{f}}{\omega}\left(1+\frac{\gamma}{\varepsilon}\right)\right)$$

und hiernach die Zahl der Umläufe, die das Pendel in derselben Zeit vermöge der Erddrehung mehr oder weniger macht,

$$\pm\frac{86\,400}{2\pi}\,\mathfrak{f}\left(1+\frac{\gamma}{\varepsilon}\right) = \pm\frac{86\,400}{2\pi}\,n.\sin\varphi\left(1-\frac{C}{2E}\right)\left(1+\frac{\gamma}{\varepsilon}\right)$$

wo das untere Zeichen gilt, wenn die Umläufe im Sinne der abnehmenden, das obere, wenn sie im Sinne der wachsenden ψ stattfinden.

Nun ist

$$\frac{86\,400}{2\pi}\,n = 1{,}0027$$

nichts anderes als das Verhältniss des mittleren Sonnentages zum Sterntage. Die Zahl der vom Pendel innerhalb eines Sterntages mehr oder weniger vollführten Umläufe ist demnach

$$\pm\sin\varphi\left(1-\frac{C}{2E}\right)\left(1+\frac{\gamma}{\varepsilon}\right)$$

Läuft also z. B. das Pendel an einem der beiden Pole im Sinne der Erdrotation, so macht es für den mit der Erde fortbewegten Beobachter in einem Sterntage

$$\left(1-\frac{C}{2E}\right)\left(1+\frac{\gamma}{\varepsilon}\right) = 1-\frac{C}{2E}+\frac{\gamma}{\varepsilon}$$

Schwingungen weniger, im entgegengesetzten Sinne laufend aber ebensoviel mehr, als es, wenn die Erddrehung nicht vorhanden wäre, ausführen würde. Bei Vernachlässigung von $\frac{C}{2E}$, und $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ gegen 1 ist das genau eine Schwingung — ein Resultat, dass sich a priori hätte einsehen lassen.

11.

Das von uns betrachtete System ist seiner Lage nach zu einer bestimmten Zeit t vollständig bestimmt, wenn man die Werte zweier Variablen ϑ und ψ zu dieser Zeit kennt — haben wir doch vermöge des Zwanges des Systems die beim Drehungsproblem sonst noch gebrauchte Grösse χ durch ϑ und ψ ausgedrückt. Es war nämlich bis auf Grössen zweiter Ordnung in ϑ, ν, $\mathfrak{d}_1$, etc.

[redacted]

$$\chi = \frac{\pi}{2} - \psi - \mu - \mathfrak{b}_1 + \nu\vartheta \cos\psi - \frac{\vartheta^2}{2} \sin\varphi \cos\psi$$

und bei Vernachlässigung der Grössen zweiter Ordnung gegen die anderen:

$$\chi = \frac{\pi}{2} - \psi - \mu - \mathfrak{b}_1$$

Hieraus folgt, dass eine im Pendelkörper feste Ebene eine der Zeit proportionale Drehung erfährt, die derjenigen der sogenannten Schwingungsebene dem absoluten Werte nach gleich, dem Sinne nach aber entgegengesetzt ist.

Das hätte aus der Eigentümlichkeit des Zwanges der cardanischen Aufhängung sich a priori erschliessen lassen, und ist auch schon vorher bemerkt worden [1]).

Während also Hansen [2]) für sein unrealisirbares Pendel findet, dass eine Ebene, die zu einer gewissen Zeit durch die Ruhelage des Schwerpunktes und den Pendelkörper gelegt und im Pendelkörper fest bleibend angesehen wird, in jeder grössten Elongation wieder die Ruhelage des Schwerpunktes in sich enthält, finden wir hier, dass eine solche Ebene eine der Zeit proportionale Drehung im Sinne der Erdrotation erfährt. Freilich hätte aus einer Hansen'schen Formel [3]), die wir für unsere Zwecke

$$\chi = \mathrm{Const} + n'\left(1 - \frac{C}{2E}\right)t$$

schreiben wollen, dieses Resultat sich auch ableiten lassen, weil nach pag. 50. zu setzen ist:

$$n' = -n \sin\varphi$$

indem der Sinn der wachsenden Azimuthe ψ auf der südlichen Hemisphäre mit dem der Erdrotation übereinstimmt, auf der nördlichen ihr entgegengesetzt ist.

---

1) Vgl. Bruns a. a. O.

2) a. a. O. pag. 41. f.

3) a. a. O. pag. 41. unten.

§ 3.

Fernere Annäherungen zur Integration der Bewegungsgleichungen.

12.

Wir haben bisher die Gröscen h'' und Γ' als Constanten der ersten Integration angesehen, in Wahrheit sind sie aber Functionen der Zeit, und die Ausdrücke von h'' und $\frac{d\Gamma'}{dt}$ finden sich auf pag. 44 f. Sieht man h'' und Γ' nicht mehr als constant an, so werden die Grössen ε und ε', die sich aus den Gleichungen (30) pag. 46. durch h'' und Γ' einfach ausdrücken lassen, auch nicht mehr constant, ebensowenig aber auch die in der zweiten Integration durch die erste Näherung erlangten „Constanten," η (pag. 47. unten) und α (pag. 53.). Um von den erlangten Integralen zu richtigeren überzugehen, wird man also die Grössen

$$\varepsilon, \quad \varepsilon', \quad \eta, \quad \alpha$$

von nun ab als Functionen der Zeit ansehen, die sich freilich von Constanten wenig unterscheiden, und wird sich zu jenem Uebergange der Methode der Variation der Constanten bedienen, die Hansen zuerst auf die Theorie des Pendels angewendet hat. Der Uebergang wird aber hier wesentlich einfacher sein als bei Hansen, weil wir uns auf Glieder vierter Ordnung in ϑ in den Hauptgliedern beschränkt, und dieselben in die. die Bewegung störenden Glieder mit aufgenommen haben. Der Weg, auf dem Hansen zu genaueren Formeln gelangt, ist der folgende [1]):

$$(31) \qquad \vartheta'^2 = \varepsilon^2 \cos^2(\omega t + \eta) + \varepsilon'^2 \sin^2(\omega t + \eta)$$

$$(32) \quad \psi = \alpha - \mathfrak{A} + \mathfrak{f} t + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \operatorname{tang}(\omega t + \eta)\right)$$

wo

$$\psi_0 = \alpha - \mathfrak{A}$$

$$\mathfrak{f} = n \sin \varphi \left(1 - \frac{C}{2E}\right)$$

gesetzt ist, waren die in der ersten Näherung erlangten Integrale der Bewegungsgleichungen.

---

1) Hansen, a. a. O. pag. 43. ff.

[redacted]

In ihnen sind jetzt rechter Hand die Grössen

$$t;\quad \varepsilon,\quad \varepsilon',\quad \eta,\quad \alpha$$

als variabel zu betrachten. Da die Form der Integrale in der zweiten Annäherung dieselbe bleiben soll, so müssen auch ihre vollständigen Differentialquotienten nach der Zeit gelten. Es muss also sein

$$\text{(I)}\quad \begin{aligned} \frac{d(\vartheta^2)}{dt} &= \frac{\partial(\vartheta^2)}{dt} + \frac{\partial(\vartheta^2)}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial(\vartheta^2)}{\partial\varepsilon'}\frac{d\varepsilon'}{dt} + \frac{\partial(\vartheta^2)}{\partial\eta}\frac{d\eta}{dt} \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon'}\frac{d\varepsilon'}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{d\eta}{dt} \end{aligned}$$

Nun sind in erster Näherung ϑ^2 und ψ so bestimmt worden, dass

$$\frac{d(\vartheta^2)}{dt} = \frac{\partial(\vartheta^2)}{\partial t},\quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t}$$

ist Hieraus folgen die vier Gleichungen

$$\text{(A)}\quad \frac{\vartheta d\vartheta}{dt} = -\omega(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)\sin(\omega t + \eta)\cos(\omega t + \eta)$$

$$\text{(B)}\quad \frac{d\psi}{dt} = f + \frac{\omega\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon^2\cos^2(\omega t + \eta) + \varepsilon'^2\sin^2(\omega t + \eta)} = f + \frac{\omega\varepsilon\varepsilon'}{\vartheta^2}$$

$$\text{(C)}\quad \begin{aligned} 0 = {} & \varepsilon\cos^2(\omega t + \eta)\frac{d\varepsilon}{dt} + \varepsilon'\sin^2(\omega t + \eta)\frac{d\varepsilon'}{dt} \\ & -(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)\sin(\omega t + \eta)\cos(\omega t + \eta)\frac{d\eta}{dt} \end{aligned}$$

$$\text{(D)}\quad \begin{aligned} 0 = {} & \frac{d\alpha}{dt} - \frac{\varepsilon'}{\vartheta^2}\frac{d\varepsilon}{dt}\sin(\omega t + \eta)\cos(\omega t + \eta) \\ & + \frac{\varepsilon}{\vartheta^2}\frac{d\zeta'}{d\varepsilon}\sin(\omega t + \eta)\cos(\omega t + \eta) + \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\vartheta^2}\frac{d\eta}{dt} \end{aligned}$$

Die Gleichungen (A) und (B) müssen differentiirt noch gelten, also ergibt sich vermöge der Relation [1])

$$\begin{aligned} \frac{1}{\vartheta}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 &= \frac{\omega^2}{\vartheta^3}(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)^2\sin^2(\omega t + \eta)\cos^2(\omega t + \eta) \\ &= \omega^2\vartheta - \frac{\omega^2\varepsilon^2\varepsilon'^2}{\vartheta^3} - \frac{\omega^2(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)}{\vartheta}\cos 2(\omega t + \eta) \end{aligned}$$

---

1) Hansen a. a. O. pag. 45.

$$(II)\quad \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\omega^2\vartheta + \frac{\omega^2\varepsilon^2\varepsilon'^2}{\vartheta^3} - 2\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt}\frac{\omega}{\vartheta}\sin(\omega t+\eta)\cos(\omega t+\eta)$$

$$+2\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dt}\frac{\omega}{\vartheta}\sin(\omega t+\eta)\cos(\omega t+\eta) - \frac{\omega}{\vartheta}(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)\frac{d\eta}{dt}\cos 2(\omega t+\eta)$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{2\omega\varepsilon\varepsilon'}{\vartheta^3}\frac{d\vartheta}{dt} + \left(\varepsilon\frac{d\varepsilon'}{dt} - \varepsilon'\frac{d\varepsilon}{dt}\right)\frac{\omega}{\vartheta^4}(\varepsilon^2\cos^2(\omega t+\eta) - \varepsilon'^2\sin^2(\omega t+\eta))$$

$$+2\frac{\omega\varepsilon\varepsilon'}{\vartheta^4}\frac{d\eta}{dt}(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)\sin(\omega t+\eta)\cos(\omega t+\eta)$$

Wir hatten die Werte (31) und (32) von ϑ^2 und ψ durch Integration der Differentialgleichungen

$$(25)\quad \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \vartheta^2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = h'' - 2\frac{gm_2c_2}{E}\frac{\vartheta^2}{2} = h'' - \omega^2\vartheta^2$$

$$(26)\quad \vartheta^2\frac{d\psi}{\vartheta t} - \mathfrak{f}\,\vartheta^2 = \Gamma'$$

erlangt. Durch Differentiation dieser Gleichungen mit Rücksicht auf die Variabilität von Γ' und h'' ergeben sich andere Gleichungen für $\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$ und $\frac{d^2\psi}{dt^2}$ die mit den Gleichungen (II) verglichen, zwei neue Differentialgleichungen für die Grössen ε, ε' und η liefern müssen. Durch Differentiation von (25) und (26) ergibt sich:

$$2\frac{d\vartheta}{dt}\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -2\vartheta^2\frac{d\psi}{dt}\frac{d^2\psi}{dt^2} - 2\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 - 2\omega^2\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{dh''}{dt}$$

$$(III)\quad \vartheta^2\frac{d^2\psi}{dt^2} = -2\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}\frac{d\psi}{dt} + 2\mathfrak{f}\,\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{d\Gamma'}{dt}$$

und nach Substitution des Wertes von $\frac{d^2\psi}{dt^2}$ aus der zweiten in die erste von diesen Gleichungen

$$(IV)\quad 2\frac{d\vartheta}{dt}\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = 2\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 - 2\omega^2\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} - 4\mathfrak{f}\,\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}\frac{d\psi}{dt} - 2\frac{d\Gamma'}{dt}\frac{d\psi}{dt} + \frac{dh}{dt}$$

und mit Rücksicht auf die Gleichung (26)

$$(26)\quad \frac{d\psi}{dt} = \mathfrak{f} + \frac{\Gamma'}{\vartheta^2} = \mathfrak{f} + \frac{\omega\varepsilon\varepsilon'}{\vartheta^2}$$

unter Vernachlässigung von $\mathfrak{f}^2$ gegen ω^2 [1])

---

1) cf. pag. 47. unten.

$$\text{(IV)}\quad \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\omega^2\vartheta + \omega^2\frac{\varepsilon^2\varepsilon'^2}{\vartheta^3} + \frac{\frac{dh''}{dt}}{2\frac{d\vartheta}{dt}} - \frac{\frac{d\psi}{dt}\,\frac{d\Gamma'}{dt}}{\frac{d\vartheta}{dt}}$$

$$\text{(III)}\quad \frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{2\omega\varepsilon\varepsilon'}{\vartheta^3}\,\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{1}{\vartheta^2}\,\frac{d\Gamma'}{dt}$$

Demnach findet sich durch Vergleichung dieser beiden Gleichungen mit den Gleichungen (II)

$$\text{(E)}\quad \left(\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dt} - \varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt}\right)\frac{\omega}{\vartheta}\sin 2(\omega t+\eta) - \frac{\omega}{\vartheta}(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)\frac{d\eta}{dt}\cos 2(\omega t+\eta) = \frac{\frac{dh'}{dt}}{\frac{d\vartheta}{dt}} - \frac{\frac{d\psi}{dt}\,\frac{d\Gamma'}{dt}}{\frac{d\vartheta}{dt}}$$

$$\text{(F)}\quad \left(\varepsilon\frac{d\varepsilon'}{dt} - \varepsilon'\frac{d\varepsilon}{dt}\right)\frac{\omega}{\vartheta^4}\left(\varepsilon^2\cos^2(\omega t+\eta) - \varepsilon'^2\sin^2(\omega t+\eta)\right) + \frac{\omega\varepsilon\varepsilon'}{\vartheta^4}\,\frac{d\eta}{dt}\left(\varepsilon^2-\varepsilon'^2\right)\sin 2(\omega t+\eta) = \frac{1}{\vartheta^2}\,\frac{d\Gamma'}{dt}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\text{(G)}\quad \frac{\vartheta\frac{dh'}{dt}}{2\frac{d\vartheta}{dt}} - \frac{\vartheta\frac{d\psi}{dt}\cdot\frac{d\Gamma'}{dt}}{\frac{d\vartheta}{dt}} = G \text{ [1]}$$

$$\frac{d\Gamma'}{dt} = H \text{ [1]}$$

so findet sich durch Auflösung der Gleichungen (*C*), (*D*), (*E*), (*F*) nach $\frac{d\varepsilon}{dt}, \frac{d\varepsilon'}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\alpha}{dt}$ [2]

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{G\varepsilon}{2\omega\vartheta^2}\sin 2(\omega t+\eta) + \frac{H\varepsilon'}{\omega\vartheta^2}\sin^2(\omega t+\eta)$$

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \frac{G\varepsilon'}{2\omega\vartheta^2}\sin 2(\omega t+\eta) + \frac{H\varepsilon}{\omega\vartheta^2}\cos^2(\omega t+\eta)$$

(38)

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{G(\varepsilon^2\cos^2(\omega t+\eta) - \varepsilon'^2\sin^2(\omega t+\eta))}{\omega\vartheta^2(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)} + \frac{H\varepsilon\varepsilon'\sin 2(\omega t+\eta)}{\omega\vartheta^2(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{G\varepsilon\varepsilon'\cos 2(\omega t+\eta)}{\omega\vartheta^2(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)} - \frac{H(\varepsilon^2+\varepsilon'^2)}{2\omega\vartheta^2(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)}\sin 2(\omega t+\eta)$$

---

1) Bei Hansen pag. 51 a. a. O. resp. *D* und *E*.

2) a. a. O. pag. 46.

Man erkennt sofort, dass im Falle $\varepsilon = \varepsilon'$ die Formeln für $\frac{d\eta}{dt}$ und $\frac{d\alpha}{dt}$ unendlich grosse Werte ergeben, und im Falle, wo $\varepsilon - \varepsilon'$ einen im Verhältniss zu ε und ε' sehr kleinen Wert hat, $\frac{d\eta}{dt}$, und $\frac{d\alpha}{dt}$ sehr gross werden. Hansen hat daher für diese Fälle andere Variablen für ε, ε', η, α eingeführt, und für dieselben analoge Differentialgleichungen gegeben. Ich will indessen künftighin jenen Fall, wo die Formeln ungültig werden, von der Betrachtung ausschliessen. In die Formeln (38), in denen rechter Hand ε, ε', η und α als constant angesehen werden, sind jetzt successive die Glieder von $\frac{dh''}{dt}$ und $\frac{d\Gamma'}{dt}$ aus (27) und (28) pag. 43. f. einzusetzen.

13.

Die beträchtlichsten Terme von h'' und $\frac{d\Gamma'}{dt}$ sind

$$h'' = \frac{\vartheta^4}{3}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \frac{2gm_2c_2}{E}\,\frac{\vartheta^4}{24}$$

$$\frac{d\Gamma'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\vartheta^4}{3}\,\frac{d\psi}{dt}\right)$$

Nun war

$$\frac{gm_2c_2}{E} = \omega^2, \qquad \vartheta^2\,\frac{d\psi}{dt} = \omega\varepsilon\varepsilon' + \mathfrak{f}\,\vartheta^2$$

wo der zweite Teil gegen den ersten übergangen werden kann. Also wird

$$h'' = \frac{1}{3}\,\omega^2\varepsilon^2\varepsilon'^2 + \frac{\omega^2}{12}\,\vartheta^4$$

$$\frac{d\Gamma'}{dt} = \frac{1}{3}\,\frac{d}{dt}(\omega\varepsilon\varepsilon'\vartheta^2) = \frac{2}{3}\,\omega\varepsilon\varepsilon'\vartheta\,\frac{d\vartheta}{dt}$$

$$\frac{dh''}{dt} = \frac{\omega^2}{3}\,\vartheta^3\,\frac{d\vartheta}{dt}$$

Von diesen Gliedern kommt bei Hansen nur das letzte vor, dass bei ihm der Term

$$\frac{d\Gamma'}{dt} = \frac{2}{3}\,\omega\varepsilon\varepsilon'\vartheta\,\frac{d\vartheta}{dt}$$

fehlt, erklärt sich daher, dass er in erster Näherung den unsrigen ganz analoge Differentialgleichungen integrirt, speciell eine der Gleichung (26) analoge, die in unserer Bezeichnung lautet:

[redacted]

$$\frac{d\psi}{dt} = \mathfrak{f} + \frac{\omega\varepsilon\varepsilon'}{\vartheta^2}\ ^{1)}$$

in zweiter Näherung setzt er nun

$$\frac{d\psi}{dt} = \mathfrak{f} + \frac{k'}{\sin^2\vartheta}\ ^{2)}$$

wo Hansen's k' unsere Grösse Γ' bedeutet, das ändert aber die Bedeutung der Grösse $k' - \Gamma'$, die er immer

$$= \omega\varepsilon\varepsilon'$$

setzt. Hieraus ergeben sich im allgemeinen unwesentliche Abweichungen meiner von Hansen's Resultaten; nur wird das Hansen'sche der Zeit proport ionale Glied in der Veränderung von α bei mir um seinen achtfachen Betrag vermehrt erscheinen.

Vermöge der Glieder

$$\frac{dh''}{dt} = \frac{\omega^2}{3}\vartheta^3\frac{d\vartheta}{dt}, \quad \frac{d\Gamma'}{dt} = 0$$

findet Hansen [3]) ausser sehr geringen periodischen Variationen der Grössen ε, ε', η, α noch der Zeit proportionale Aenderungen von η] und α, nämlich

$$(39)\qquad \begin{aligned} \delta\eta &= -\tfrac{1}{16}\,\omega(\varepsilon^2 + \varepsilon'^2)t \\ \delta\alpha &= \tfrac{1}{24}\,\omega\varepsilon\varepsilon' t \end{aligned}$$

Nun ist jetzt zu setzen:

$$\begin{aligned} \vartheta^2 &= \varepsilon^2\cos^2(\omega t + \eta + \delta\eta) + \varepsilon'^2\sin^2(\omega t + \eta + \delta\eta) \\ &= \varepsilon^2\cos^2[\omega(1 - \tfrac{1}{16}(\varepsilon^2 + \varepsilon'^2))t + \eta] + \varepsilon'^2\sin^2[\omega(1 - \tfrac{1}{16}(\varepsilon^2 + \varepsilon'^2))t + \eta] \end{aligned}$$

Hiernach ergibt sich für die Schwingungsdauer im definirten Sinne der Wert

$$T = \frac{\pi}{\omega(1 - \frac{1}{16}(\varepsilon^2 + \varepsilon'^2))} = \frac{\pi}{\omega}(1 + \tfrac{1}{16}(\varepsilon^2 + \varepsilon'^2))$$

Bevor ich die Wirkung des obigen Wertes für $\delta\alpha$ betrachte, will ich mein Glied

$$\frac{d\Gamma'}{dt} = \frac{2}{3}\,\omega\varepsilon\varepsilon'\,\vartheta\,\frac{d\vartheta}{dt}$$

---

1) a. a. O. pag. 36.

2) Mit einer unwesentlichen Aenderung a. a. O. pag. 44.

3) a. a. O. pag. 49.

in die Differentialgleichungen einführen, will aber zuvor allgemein untersuchen, was aus den Differentialgleichungen (38) wird, wenn in $\frac{d\Gamma'}{dt}$ ein Glied vorkommt, das in $\frac{dh''}{dt}$ kein entsprechendes hat. In diesem Falle hat man

$$H = \frac{d\Gamma'}{dt}, \quad G = -\frac{\vartheta}{\frac{d\vartheta}{dt}} \frac{d\psi}{dt} \frac{d\Gamma'}{dt} = -\frac{\vartheta^2 \frac{d\psi}{dt}}{\vartheta \frac{d\vartheta}{dt}} H$$

(40) $$G = + \frac{\omega\varepsilon\varepsilon' H}{\omega(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)\sin(\omega t + \eta)\cos(\omega t + \eta)}$$

wo, wie im Folgenden immer

$$\vartheta^2 \frac{d\psi}{dt} = \omega\varepsilon\varepsilon'$$

gesetzt, und die Gleichung (A) (pag. 59.)

$$\vartheta \frac{d\vartheta}{dt} = -\omega(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)\sin(\omega t + \eta)\cos(\omega t + \eta)$$

benutzt ist. Setze ich den Ausdruck (40) in die Differentialgleichungen (38) ein, so erhalte ich mit Rücksicht auf die Gleichung

(31) $$\vartheta^2 = \varepsilon^2\cos^2(\omega t + \eta) + \varepsilon'^2\sin^2(\omega t + \eta)$$

(41)
$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{\varepsilon' H}{\omega(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)}$$

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = +\frac{\varepsilon H}{\omega(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{\varepsilon\varepsilon' H}{\omega(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)^2} \frac{\cos^2(\omega t + \eta) - \sin^2(\omega t + \eta)}{\sin(\omega t + \eta)\cos(\omega t + \eta)}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{H}{\omega(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)^2} \frac{\varepsilon'^2\cos^2(\omega t + \eta) - \varepsilon^2\sin^2(\omega t + \eta)}{\sin(\omega t + \eta)\cos(\omega t + \eta)}$$

Führt man in diese Differentialgleichungen

$$H = \frac{d\Gamma'}{dt} = \frac{2}{3}\omega\varepsilon\varepsilon'\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{2}{3}\omega^2\varepsilon\varepsilon'(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)\sin(\omega t + \eta)\cos(\omega t + \eta)$$

ein, so ergeben dieselben

[redacted]

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2}{3}\omega\varepsilon\varepsilon'^2 \sin(\omega t + \eta)\cos(\omega t + \eta)$$

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = -\frac{2}{3}\omega\varepsilon^2\varepsilon' \sin(\omega t + \eta)\cos(\omega t + \eta)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{2}{3}\omega\frac{\varepsilon^2\varepsilon'^2}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2}\cos 2(\omega t + \eta)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{\omega\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2}(\varepsilon'^2\cos^2(\omega t + \eta) - \varepsilon^2\sin^2(\omega t + \eta))$$

$$= \frac{2}{3}\frac{\omega\varepsilon\varepsilon'}{2} - \frac{2}{3}\frac{\omega\varepsilon\varepsilon'}{2}\frac{\varepsilon^2 + \varepsilon'^2}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2}\cos 2(\omega t + \eta)$$

Diese Differentialgleichungen sind zu integriren, und die auf diese Weise erlangten Variationen der Constanten derart zu bestimmen dass sie zu einer bestimmten Zeit, etwa $t_0 = 0$ (pag. 47 f.) null werden. Zu dieser Zeit ist aber $\eta = 0$. Also erhält man

$$\delta\varepsilon = \tfrac{1}{3}\varepsilon\varepsilon'^2\sin^2\omega t$$

$$\delta\varepsilon' = -\tfrac{1}{3}\varepsilon^2\varepsilon'\sin^2\omega t$$

$$\delta\eta = \frac{1}{3}\frac{\varepsilon^2\varepsilon'^2}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2}\sin 2\omega t$$

$$\delta\alpha = \tfrac{1}{3}\omega\varepsilon\varepsilon' t - \tfrac{1}{6}\varepsilon\varepsilon'\frac{\varepsilon^2 + \varepsilon'^2}{\varepsilon^2 + \varepsilon'^2}\sin 2\omega t$$

Von diesen Gliedern ist das einzige merkliche

$$\delta\alpha = \tfrac{1}{3}\omega\varepsilon\varepsilon' t,$$

es ist gerade achtmal so gross als das von Hansen erhaltene. Fassen wir beide Glieder zusammen, so erhalten wir

$$\delta\alpha = \tfrac{3}{8}\omega\varepsilon\varepsilon' t \text{ [1]}.$$

Die sogenannte Schwingungsebene erfährt also ausser der durch die Erdrotation bewirkten Drehung noch eine von dieser unabhängige.

---

1) Da dieser Wert von der Erdrotation unabhängig ist, so muss ein entsprechendes Glied in der Theorie des gewöhnlichen sphärischen Pendels vorkommen. Für dieses ist $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ zu setzen, und man erhält als Anfang einer Reihenentwickelung mit Hülfe von elliptischen Functionen (nach Vorlesungen von Herrn Prof. Bruns, vgl. auch Schellbach. Ellipt. Int. und Thetafunctionen § 193)

$$\delta\alpha = \frac{2\varepsilon\varepsilon' + \varepsilon'^2}{8}\sqrt{\frac{g}{l}}\, t.$$

Auf pag. 48. wurde erwähnt, dass, selbst wenn das Pendel keine anfängliche Seitengeschwindigkeit erhält, ε' einen von Null verschiedenen Wert hat, es wird nämlich

$$\varepsilon' = -\frac{\mathfrak{f}}{\omega}\,\varepsilon$$

und hiermit

$$\delta\alpha = -\tfrac{3}{8}\mathfrak{f}\,\varepsilon^2 t$$

Im Falle, wo der Seitenstoss null ist, wird also die Geschwindigkeit, mit der die Schwingungsebene sich dreht, vermindert. Ihr Wert wird

$$\mathfrak{f}(1 - \tfrac{3}{8}\varepsilon^2),$$

und man findet, dass das Zusatzglied nur in dem Falle kleiner als ein Tausendtel des Hauptgliedes ist, wenn

$$\varepsilon < \frac{1}{19{,}36}$$

oder in Winkelmass

$$\varepsilon < 2^0\,57',5$$

ist, welcher Wert bei den Versuchen indessen überschritten werden dürfte. Wird ε' grösser, so wächst damit die Wirkung unseres Störungsgliedes, und es wird, um die Bewegung der Schwinguugsebene von allem anderen als der Erdrotation unabhängig zu erhalten, darauf ankommen, ε' gering zu machen.

14.

Vernachlässigt man in den folgenden in h'' und $\frac{d\Gamma'}{dt}$ vorkommenden Gliedern zunächst $\frac{C}{E}\nu$ gegen $\frac{C}{E}$, so werden dieselben

$$h'' = -\frac{C}{E}\vartheta^2\cos^2\psi\left(\frac{d(\vartheta\sin\psi)}{dt}\right)^2$$

$$H = \frac{d\Gamma'}{dt} = \frac{C}{E}\left[\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}\left(-\vartheta\cos\psi\frac{d(\vartheta\sin\psi)}{dt}\right)\right.$$
$$\left. + \vartheta^2\cos^2\psi\frac{d}{dt}\left(-\vartheta\cos\psi\frac{d}{dt}(\vartheta\sin\psi)\right)\right]$$

oder einfacher

$$h'' = -\frac{C}{E}r^2$$

[redacted]

$$H = \frac{d\Gamma'}{dt} = \frac{C}{E}\left(r\,\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} + \vartheta^2 \cos^2\psi \frac{dr}{dt}\right),$$

Man kann um diese Glieder zugleich zu behandeln $H = \frac{d\Gamma'}{dt}$ in die Gleichungen (41) pag. 64. einsetzen und dazu rechter Hand die dem Gliede

$$h'' = -\frac{C}{E}r^2$$

entsprechenden fügen; aus diesem Gliede folgt

$$G = \frac{\vartheta^2 \frac{dh''}{dt}}{2\vartheta \frac{d\vartheta}{dt}} = +\frac{C}{E}\,\frac{\vartheta^2 r \frac{dr}{dt}}{\omega(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)\sin(\omega t + \eta)\cos(\omega t + \eta)}$$

und die vollständigen Differentialgleichungen werden somit

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{\varepsilon' H}{\omega(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)} - \frac{C}{E}\,\frac{\varepsilon r \frac{dr}{dt}}{\omega^2(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)}$$

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \frac{\varepsilon H}{\omega(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)} + \frac{C}{E}\,\frac{\varepsilon' r \frac{dr}{dt}}{\omega^2(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{2\varepsilon\varepsilon'}{\omega(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)^2} H \operatorname{cotg} 2(\omega t + \eta)$$
$$- \frac{C(\varepsilon^2\cos^2(\omega t + \eta) - \varepsilon'^2\sin^2(\omega t + \eta))\frac{d(r^2)}{dt}}{2E\omega^2(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)^2\sin(\omega t + \eta)\cos(\omega t + \eta)}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{H(\varepsilon'^2\cos^2(\omega t + \eta) - \varepsilon^2\sin^2(\omega t + \eta))}{\omega(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)^2\sin(\omega t + \eta)\cos(\omega t + \eta)}$$
$$+ \frac{C\varepsilon\varepsilon' \operatorname{cotg} 2(\omega t + \eta)}{\omega^2(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)^2}\,\frac{d(r^2)}{dt}$$

Den Zuwachs, den die Grössen ε, ε', η, α durch die betrachteten Glieder erhalten, die übrigens — wie man sich, nach ihrem Ursprunge suchend, leicht überzeugt — den Einfluss der cardanischen Aufhängung oder des Zwanges des Systems enthalten, findet man demnach durch Integration, wie folgt:

$$\delta\varepsilon = -\frac{\varepsilon'}{\omega(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)}\int H dt - \frac{C}{2E}\,\frac{\varepsilon r^2}{\omega^2(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)}$$

$$\delta\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\omega(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)}\int H dt + \frac{C}{2E}\,\frac{\varepsilon' r^2}{\omega^2(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)}$$

$$\delta\eta = -\frac{2\varepsilon\varepsilon'}{\omega(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)^2}\int H \operatorname{cotg} 2(\omega t+\eta)\,dt$$

$$-\frac{C}{2E\omega^2(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)^2}\int d(r^2)\,\frac{\varepsilon^2\cos^2(\omega t+\eta) - \varepsilon'^2\sin^2(\omega t+\eta)}{\sin(\omega t+\eta)\cos(\omega t+\eta)}$$

$$\delta\alpha = \frac{1}{\omega(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)^2}\int H(\varepsilon^2\operatorname{cotg}(\omega t+\eta) - \varepsilon'^2\operatorname{tang}(\omega t+\eta))$$

$$+\frac{C\varepsilon\varepsilon'}{E\omega^2(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)^2}\int d(r^2)\operatorname{cotg} 2(\omega t+\eta),$$

wo

$$H = \frac{C}{E}\left(r\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} + \vartheta^2\cos^2\psi\,\frac{dr}{dt}\right)$$

ist, und überall rechter Hand Constanten derart hinzuzufügen sind, dass für $t = t_0 = 0$, also $\eta = 0$

$$\delta\varepsilon = \delta\varepsilon' = \delta\eta = \delta\alpha = 0$$

werde.

Es ist nun nach pag. 53.

$$\vartheta\cos\psi = \varepsilon\cos(\omega t+\eta)\cos(M-\mathfrak{A}) - \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\sin(M-\mathfrak{A})$$

$$\vartheta\sin\psi = \varepsilon\cos(\omega t+\eta)\sin(M-\mathfrak{A}) + \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\cos(M-\mathfrak{A}),$$

und setzt man bei der Differentiation M constant voraus, was in den Endformeln einer Vernachlässigung von Grössen fünfter Ordnung gegenüber solchen vierter Ordnung entsprechen würde, so erhält man

$$-\frac{d}{dt}(\vartheta\sin\psi) = \omega(\varepsilon\sin(M-\mathfrak{A})\sin(\omega t+\eta) - \varepsilon'\cos(M-\mathfrak{A})\cos(\omega t+\eta))$$

$$r = -\vartheta\cos\psi\frac{d}{dt}(\vartheta\sin\psi) =$$

$$\frac{\omega}{4}\{(\varepsilon-\varepsilon')^2\cos^2(M-\mathfrak{A}-\omega t-\eta) - (\varepsilon+\varepsilon')^2\cos^2(M-\mathfrak{A}+\omega t+\eta)\}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\omega^2}{2}\{(\varepsilon-\varepsilon')^2\cos(M-\mathfrak{A}-\omega t-\eta)\sin(M-\mathfrak{A}-\omega t-\eta)$$

$$+(\varepsilon+\varepsilon')^2\cos(M-\mathfrak{A}+\omega t+\eta)\sin(M-\quad+\omega t+\eta)\}$$

$$\vartheta^2\cos 2\psi\frac{dr}{dt} = \frac{\omega^2}{8}\{(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)\cos 2(M-\mathfrak{A})[(\varepsilon-\varepsilon')^2\sin 2(M-\mathfrak{A}-\omega t-\eta)$$

$$+(\varepsilon+\varepsilon')^2\sin 2(M-\mathfrak{A}+\omega t+\eta)]$$

[redacted]

$$+\frac{(\varepsilon^2+\varepsilon'^2)(\varepsilon-\varepsilon')^2}{2}[\cos 2(M-\mathfrak{A})\sin 2(M-\mathfrak{A})$$

$$-\cos 2(M-\mathfrak{A})\sin(4\omega t+4\eta-2M+2\mathfrak{A})]$$

$$+\frac{(\varepsilon^2+\varepsilon'^2)(\varepsilon+\varepsilon)^2}{2}[\cos 2(M-\mathfrak{A})\sin 2(M-\mathfrak{A})$$

$$+\cos 2(M-\mathfrak{A})\sin(4\omega t+4\eta+2M-2\mathfrak{A})]$$

$$-\varepsilon\varepsilon'(\varepsilon-\varepsilon')^2[\sin 2(M-\mathfrak{A})\cos(4\omega t+4\eta-2M+2\mathfrak{A})-\sin 2(M-\mathfrak{A})\cos 2(M+\eta)]$$

$$-\varepsilon\varepsilon'(\varepsilon+\varepsilon')^2[\sin 2(M-\mathfrak{A})\cos 2(M-\mathfrak{A})-\sin 2(M-\mathfrak{A})\cos(2M-2\mathfrak{A}$$

$$+4\omega t+4\eta)]\}$$

Bei der Ausführung der Integration kann man M in allen — die trigonometrischen Functionen von $(\omega t+\eta)$ enthaltenden Gliedern — als constant ansehen. Dann wird

$$\int \vartheta^2\cos 2\psi dr = \frac{\omega}{16}(\varepsilon-\varepsilon'^2)\cos 2(M-\mathfrak{A})[(\varepsilon-\varepsilon')2\cos 2(M-\mathfrak{A}-\omega t-\eta)$$

$$-(\varepsilon+\varepsilon')^2\cos 2(M-\mathfrak{A}+\omega t+\eta)]$$

$$+\frac{\omega}{64}(\varepsilon^2+\varepsilon'^2)\cos 2(M-\mathfrak{A})[(\varepsilon-\varepsilon')^2\cos(4\omega t+4\eta-2M+2\mathfrak{A})$$

$$-(\varepsilon+\varepsilon')^2\cos(4\omega t+4\eta+2M-2\mathfrak{A})]$$

$$-\frac{\omega}{64}\varepsilon\varepsilon'\sin 2(M-\mathfrak{A})[(\varepsilon-\varepsilon')^2\sin(4(\omega t+\eta)-2(M-\mathfrak{A}))$$

$$-(\varepsilon+\varepsilon')^2\sin(4(\omega t+\eta)+2(M-\mathfrak{A}))]$$

$$+\frac{\omega^2}{16}\int(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)^2\sin 4(M-\mathfrak{A})dt$$

Die Glieder dieses Ausdrucks bringen bis auf das letzte — speciell wegen des hinzutretenden kleinen Factors $\frac{C}{2E}$, nur sehr kleine periodische Aenderungen in ε und ε' hervor, ebenso wie die in $\delta\varepsilon$ und $\delta\varepsilon'$ (pag. 68.) vorkommenden mit der kleinen periodischen Function r^2 proportionalen Ausdrücke sehr gering sind. Daher wird es genügen, mit alleiniger Berücksichtigung des letzten Gliedes

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=-\frac{C}{2E}\,\frac{\varepsilon'\omega}{16}(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)\sin 4(M-\mathfrak{A})$$

$$\frac{d\varepsilon'}{dt}=\frac{C}{2E}\,\frac{\varepsilon\omega}{16}(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)\sin 4(M-\mathfrak{A})$$

zu setzen und diese Gleichungen unter der Voraussetzung der Variabilität von

$$M=\psi_0+\mathfrak{f}t$$

zu integriren. Sollen die Veränderungen von ε und ε' im Anfange der Zeit, wo $M = \psi_0$ ist, null werden, so erhält man

(42)
$$\delta\varepsilon = \frac{C}{32E}\varepsilon'(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)\,\frac{\omega}{4\mathfrak{f}}(\cos 4(M - \mathfrak{A}) - \cos 4\psi_0)$$
$$\delta\varepsilon' = -\frac{C}{32E}\varepsilon(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)\,\frac{\omega}{4\mathfrak{f}}(\cos 4(M - \mathfrak{A}) - \cos 4\psi_0)$$

— Formeln, die in der Nähe des Aequators unbrauchbar werden, weil im Nenner

$$\mathfrak{f} = n \sin\varphi\left(1 - \frac{C}{2E}\right)$$

vorkommt. Hansen [1]) hat für diesen Fall bei ähnlichen Gliedern Reihenentwickelungen nach Potenzen der Zeit vorgenommen. Dieselben werden hier ergeben:

$$\delta\varepsilon = -\frac{C}{32E}\varepsilon'(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)\,\omega(t \sin 4\psi_0 + 2\mathfrak{f}\,t^2 \cos 4\psi_0)$$

$$\delta\varepsilon' = \frac{C}{32E}\varepsilon(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)\,\omega(t \sin 4\psi_0 + 2\mathfrak{f}\,t^2 \cos 4\psi_0)$$

wo wegen der Kleinheit von $\mathfrak{f}$ im genannten Falle das dem Quadrate der Zeit proportionale Glied nicht in Betracht kommt.

Im allgemeinen Falle aber erkennt man, dass speciell die Grösse ε', weil ihre Variation den Factor ε' nicht enthält, wegen des Factors $\mathfrak{f}$ im Nenner beträchtliche Variationen annehmen kann, deren Betrag von $\cos 4\psi_0$, also von dem Winkel abhangen wird, den die ursprüngliche Schwingungsebene gegen die feste Achse der cardanischen Aufhängung bildet. Im Maximum resp. Minimum wird die Klammergrösse in (42) ± 2, $\frac{C}{E}$ wollen wir nach früheren Betrachtungen $= 0{,}001$ setzen.

Demnach sind Maximum resp. Minimum von $\delta\varepsilon'$ — bei Vernachlässigung von ε'^2 gegen ε^2

$$\delta\varepsilon'_M = \pm\frac{\omega\varepsilon^3 13714}{64000}\operatorname{cosec}\varphi$$

also z. B. für das Secundenpendel, für das $\omega = \pi$ ist, und unter einer Breite von $42^0\,19'$

1) a. a. O. pag. 57.

$$\delta\varepsilon'_M = \pm\,\varepsilon^3$$

und z. B. für

$$\varepsilon = \tfrac{1}{9}\ ^{1)}$$

$$\delta\varepsilon' = \pm\,\frac{1}{729}$$

ein Wert, der die Bewegung der Schwingungsebene schon in merklicher Weise zu beeinflussen im Stande ist. Aber ε' behält nicht seinen Wert, es ändert sich periodisch in folgender Weise:

Anfänglich vollführe das Pendel sogenannte ebene Schwingungen unter zweckmässigst möglichem Azimuthe, d. h. es sei

$$\cos 4\psi_0 = 0$$

oder das Pendel schwinge anfänglich unter 22°,5 oder 67°,5 oder 112,5 oder 157,5 gegen die feste Achse, so wird dadurch das oben berechnete Maximum resp. Minimum der Variation von ε' auf die Hälfte herabgedrückt. Diese ebenen Schwingungen gehen nun allmählich in elliptische über. deren kleine Achse nach

$$\frac{3}{2\sin\vartheta}\ \text{Sternstunden}$$

ihr Maximum erreicht, dann gehen die Schwingungen allmählich wieder in ebene über und zwar in derselben Zeit, hierauf beginnt das Pendel elliptische Schwingungen in der entgegengesetzten Richtung auszuführen, deren kleine Achse nach genau derselben Zeit einen Maximalwert haben wird. Hierauf gehen die Schwingungen in derselben Zeit wieder in ebene über, und so geht es fort. Die Drehung der Schwingungsebene würde durch die betrachteten Glieder während $\frac{3}{\sin\varphi}$ Sternstunden beschleunigt, während der folgenden verzögert werden u. s. f. und zwar immer um denselben Betrag, so dass die Wirkung der betrachteten Glieder sich in je $\frac{6}{\sin\varphi}$ Sternstunden aufhebt.

Ob diese eigentümliche Wirkung des Zwanges unseres Systemes wirklich zu beobachten sein wird, muss dahin gestellt bleiben; es ist leicht möglich, dass höhere Glieder eine paralysirende Gegenwirkung darauf ausüben. Es wird aber immerhin zweckmässig sein, auch wegen dieser Glieder das Verhältniss $\frac{C}{E}$ so weit als möglich herabzudrücken, weshalb auch lange Pendel sich besser zu den Beobachtungen eignen werden, als kurze.

---

1) Ein Wert, den Hansen des öfteren als Beispiel wählt.

15.

Setzt man nach pag. 67. den Wert von

$$H = \frac{C}{2E}\left(\vartheta^2\cos^2\psi\frac{dr}{dt} + r\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}\right),$$

so ergibt sich bei Einführung der Bezeichnungen

$$\left.\begin{array}{l}\varrho\cos\sigma = \varepsilon\\ \varrho\sin\sigma = \varepsilon'\end{array}\right\} \quad M' = M - \mathfrak{A}$$

$$H = \frac{C}{E}\omega^2\varrho^4\left\{\frac{\sin 4M'}{64}2\cos^2 2\sigma + \frac{\cos 2(\omega t+\eta)}{8}\left(\sin 2M' + \sin 4M'\frac{\cos 2\sigma}{2}\right)\right.$$
$$+\frac{\sin 2(\omega t+\eta)}{8}(\sin 2\sigma\cos^2 2M' + \sin 4\sigma\cos^2 M'\cos 2M')$$
$$+\frac{\cos 4(\omega t+\eta)}{64}(\sin 4M'(3-\cos 4\sigma) + 8\sin 2M'\cos 2\sigma)$$
$$\left.+\frac{\sin 4(\omega t+\eta)}{16}((\cos 2M' - \sin^2 M')\sin 2\sigma + \cos^2 M'\sin 4\sigma)\right\}$$

Ferner kann man noch bilden:

$$r^2 = \omega^2\frac{\varrho^4}{16}\left\{\frac{1-\cos 4M'}{2}\sin^2 2(\omega t+\eta)\right.$$
$$-2\sin 2\sigma\sin 2M'\sin 2(\omega t+\eta)(1+\cos 2M'\cos 2(\omega t+\eta))$$
$$+\sin^2 2\sigma(1+\cos 2M'\cos 2(\omega t+\eta))$$
$$\left.+\cos^2 2M'\frac{1+\cos 4(\omega t+\eta)}{2}\right\}$$

$$\frac{dr^2}{dt} = \frac{\omega^3\varrho^4}{16}\{\sin^2 2M'\sin 4(\omega t+\eta) - 4\sin 2\sigma\sin 2M'\cos 2(\omega t+\eta)$$
$$-2\sin 2\sigma\sin 4M'\cos(\omega t+\eta)$$
$$-2\sin^2 2\sigma(\cos 2M'\sin 2(\omega t+\eta) + \cos^2 2M'\sin 4(\omega t+\eta))\}$$

Um nun die Variationen von η und α zu bestimmen, haben wir die eben erlangten Ausdrücke für H und $\frac{d(r^2)}{dt}$ nach einander mit $\operatorname{cotg} 2(\omega t+\eta)$, $\operatorname{cotg}(\omega t+\eta)$, $\operatorname{tang}(\omega t+\eta)$ zu multipliciren und dann zu integriren.

Nach pag. 68. ergibt sich somit der folgende Ausdruck für $\delta\eta$, wo in den trigonometrischen Functionen ωt für $\omega t+\eta$ geschrieben, und rechter Hand noch die passende Constante hinzuzudenken ist:

[redacted]

$$\delta\eta = -\frac{C}{E}\frac{\varrho^2}{\cos^2 2\sigma}\Big\{\frac{1}{32}\sin^2 2M'(\cos 2\sigma \sin 2\omega t + t\omega + \tfrac{1}{4}\sin 4\omega t)$$

$$-\frac{1}{16}\sin 2\sigma \sin 2M'(ln\, \mathrm{tang}\, \omega t + 4\cos^2\omega t)$$

$$-\frac{1}{16}\sin 2\sigma \cos 2\sigma \sin 2M' ln \sin 2\omega t$$

$$-\frac{1}{32}\sin 2\sigma \cos 2\sigma \sin 4M'(ln\, \mathrm{tang}\, \omega t + 4\cos^2\omega t + \cos 2\omega t)$$

$$-\frac{1}{32}\sin 2\sigma \sin 4M'(\tfrac{1}{2} ln\, \mathrm{tang}\, 2\omega t + 2\cos^2 2\omega t + \tfrac{1}{2} ln \sin 4\omega t)$$

$$-\frac{\omega t}{16}\sin^2 2\sigma \cos 2\sigma \cos 2M'$$

$$-\frac{1}{32}\sin^2 2\sigma \cos 2M' \sin 2\omega t$$

$$-\frac{1}{16}\sin^2 2\sigma \cos 2\sigma \cos^2 2M' \sin 2\omega t$$

$$-\frac{1}{16}\sin^2 2\sigma \cos^2 2M'(\omega t + \tfrac{1}{4}\sin 4\omega t)$$

$$+\frac{1}{64}\sin 2\sigma \cos^2 2\sigma \sin 4M' ln \sin 2\omega t$$

$$+\frac{1}{16}\sin 2\sigma(\sin 2M' + \tfrac{1}{2}\sin 4M' \cos 2\sigma)(ln\, \mathrm{tang}\, \omega t + 4\cos^2\omega t)$$

$$+\frac{1}{16}\sin 2\sigma \sin 2\omega t(\cos^2 2M' \sin 2\sigma + \sin 4\sigma \cos^2 M' \cos 2M')$$

$$+\frac{1}{256}\sin 2\sigma[\sin 4M'(3 - \cos 4\sigma) + 8\sin 2M' \cos 2\sigma]$$

$$\times\, [ln\, \mathrm{tang}\, 2\omega t + 4\cos^2 2\omega t + ln \sin 4\omega t]$$

$$+\frac{1}{16}\sin 2\sigma(t\omega + \tfrac{1}{4}\sin 4\omega t)[\sin 2\sigma(\cos 2M' - \sin^2 M')$$

$$+\cos^2 M' \sin 4\sigma]\Big\}$$

Durch den Strich ist angedeutet worden, wo die vom ersten Teile von $\delta\eta$ (pag. 68.) herrührenden Glieder aufhören. Ordnet man die Glieder von $\delta\eta$ so, dass man die der Zeit proportionalen Terme voranstellt, dann die periodischen folgen lässt, so erhält man den folgenden Ausdruck, bei dem in den trigonometrischen Functionen jetzt $\eta = 0$ gemacht ist, was der Bedingung $t_0 = 0$ entspricht, und Constanten hinzugefügt sind, die bewirken, dass zur Zeit $t = 0$ alles bis auf die logarithmischen Glieder null wird:

$$\delta\eta = -\frac{C}{E}\frac{\varrho^2}{\cos^2 2\sigma}\Big\{\omega t\Big[\frac{1}{32}\sin^2 2M' - \frac{1}{16}\sin^2 2\sigma\cos 2\sigma\cos 2M'$$

$$-\frac{1}{16}\sin^2 2\sigma\cos^2 2M' + \frac{1}{16}\sin 2\sigma\sin 4\sigma\cos^2 M'$$

$$+\frac{1}{16}\sin^2 2\sigma(\cos 2M' - \sin^2 M')\Big]$$

$$+\frac{1}{32}\sin 2\omega t[\cos 2\sigma\sin^2 2M' - \sin^2 2\sigma(\cos 2M' - 2\cos^2 2M')$$

$$-2\sin^2 2\sigma\cos 2\sigma(\cos^2 2M' - 2\cos 2M'\cos M')]$$

$$+\frac{1}{128}\sin 4\omega t[\sin^2 2M' - 2\sin^2 2\sigma(\cos^2 2M' - \cos 2M' + \sin^2 M')$$

$$+2\sin 2\sigma\sin 4\sigma\cos^2 M']$$

$$-\frac{1}{32}(\cos 2\omega t - 1)[\sin 2\sigma\cos 2\sigma\sin 4M' + 2\sin 2\sigma(\cos 2\omega t + 1)$$

$$\times \sin 4M'(1 - \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4}\cos 4\sigma)$$

$$-4\sin 2\sigma\cos 2\sigma(\cos 2\omega t + 1)\sin 2M']$$

$$-\frac{1}{16}\,ln\sin 2\omega t(\sin 2M'\sin 2\sigma\cos 2\sigma - \tfrac{1}{2}\sin 4M'\sin 2\sigma\cos^2 2\sigma)$$

$$-\frac{1}{64}(ln\,\mathrm{tang}\,2\omega t + ln\sin 4\omega t)[\sin 2\sigma\sin 4M'$$

$$-2\sin 2\sigma\cos 2\sigma\sin 2M' - \tfrac{1}{4}\sin 2\sigma(3 - \cos 4\sigma)\sin 4M']\Big\}$$

Die logarithmischen Glieder lassen sich auf folgende Weise zusammenfassen:

$$-\frac{1}{16}\,ln\sin 2\omega t\sin 2M'\sin 2\sigma\cos 2\sigma(1 - \tfrac{1}{2}\cos 2M'\cos 2\sigma)$$

$$+\frac{1}{32}(ln\,\mathrm{tang}\,2\omega t + ln\sin 4\omega t)\sin 2M'\sin 2\sigma\cos 2\sigma(1 - \tfrac{1}{2}\cos 2M'\cos 2\sigma)$$

$$= \frac{1}{32}\,ln 2[\sin 2M'\sin 2\sigma\cos 2\sigma(1 - \tfrac{1}{2}\cos 2\sigma\cos 2M')]$$

Diese Grösse war nun in Beziehung auf die Integration constant, wir haben also als passende Integrationsconstante rechter Hand dieselbe Grösse mit dem negativen Zeichen hinzuzufügen, womit bewiesen ist, dass diejenigen Glieder in obigem Ausdrucke, welche Unstetigkeiten in der Bewegung hervorrufen würden, fortfallen.

Die periodischen Glieder in $\delta\eta$ sind, wenn wir $\cos^2 2\sigma$ als nahe bei 1 liegend voraussetzen, völlig unmerklich; die der Zeit proportionalen Glieder bewirken dagegen eine Vergrösserung der Schwingungszeit, deren Wert mit Berücksichtigung von pag. 48 jetzt wird:

$$T = \frac{\pi}{\omega}\left\{1+\frac{\varrho^2}{16}\left[1+\frac{C}{2E\cos^2 2\sigma}(\sin^2 2M'+2\sin^2 2\sigma(\cos 2\sigma + \sin^2 M'[1-4\sin^2 M']))\right]\right\}$$

Den Fall $\varepsilon = \varepsilon'$, wo diese Formel unbrauchbar wird, haben wir von vornherein von der Betrachtung ausgeschlossen. Ist ε' so klein, dass wir sein Quadrat gegen dasjenige von ε vernachlässigen dürfen, so erkennt man, dass für $\frac{C}{E} = 0{,}001$ das neu erhaltene Glied imMaximo nur ein Zweitausendtel des Hauptstörungsgliedes ausmachen kann, die Schwingungsdauer also für den kaum in der Praxis vorkommenden Wert $\varepsilon = \frac{1}{8}$ um höchstens

$$\frac{1}{1152000}$$

ihres Betrages vermehrt wird. Aber $\sin^2 2M'$ ist nicht immer genau gleich Eins. In je

3 cosec φ Sternstunden

wächst $\sin^2 2M'$ von 0 bis 1, fällt dann von 1 bis 0 u. s. f. Nach einem Satze der Integralrechnung haben wir in einem solchen Zeitraume $\sin^2 2M'$ im Mittel $= \frac{1}{2}$ zu setzen und finden so, dass z. B. das Secundenpendel täglich im Durchschnitt $\frac{3}{80}$ Schwingungen weniger macht, als es ohne den Zwang der cardanischen Aufhängung machen würde, dass es also im Mittel täglich um $\frac{3}{80}$ Schwingungen zurückbleibt. Das zwei Secunden schwingende Pendel würde in cardanischer Aufhängung schwingend für $\varepsilon = \frac{1}{8}$ durchschnittlich pro Tag $\frac{3}{160}$ Schwingungen weniger machen.

Setzt man $\varepsilon = \frac{1}{9}$, so sind die entsprechenden Zahlen $\frac{1}{80}$ resp. $\frac{1}{160}$. Merklich dürfte diese Wirkung der Aufhängungsart also nicht sein.

16.

Nach pag. 68. ist

$$\begin{aligned}\delta\alpha = {} & \frac{1}{\omega\varrho^4\cos^2 2\sigma}\int\frac{\varrho^2\sin^2\sigma\cos^2(\omega t+\eta) - \varrho^2\cos^2\sigma\sin^2(\omega t+\eta)}{\sin(\omega t+\eta)\cos(\omega t+\eta)}H dt \\ & + \frac{C\sin\sigma\cos\sigma}{E\omega^2\varrho^2\cos^2 2\sigma}\int\operatorname{cotg} 2\omega t\, d(r^2) \\ & - \frac{\sin^2\sigma}{\omega\varrho^2\cos^2 2\sigma}\int H\operatorname{cotg}\omega t\, dt - \frac{\cos^2\sigma}{\omega\varrho^2\cos^2 2\sigma}\int H\operatorname{tang}\omega t\, dt \\ & + \frac{C\sin 2\sigma}{2E\omega^2\varrho^2\cos^2 2\sigma}\int\operatorname{cotg} 2\omega t\, d(r^2),\end{aligned}$$

wo in den trigonometrischen Functionen wie im Folgenden ωt für $\omega t+\eta$ geschrieben ist. Es wird

$$\delta\alpha=\frac{C}{E}\frac{\varrho^2}{\cos^2 2\sigma}\Big\{\sin^2\sigma\Big[\frac{1}{32}\cos^2 2\sigma\sin 4M' \ln\sin\omega t$$

$$+\frac{1}{16}(\sin 2M'+\tfrac{1}{2}\cos 2\sigma\sin 4M')(\ln\tan g\,\omega t+4\cos^2\omega t+\ln\sin 2\omega t)$$

$$+\frac{1}{8}(t\omega+\tfrac{1}{2}\sin 2\omega t)(\sin 2\sigma\cos^2 2M'+\sin 4\sigma\cos^2 M'\cos 2M')$$

$$+\frac{1}{128}(\ln tg\,\omega t+4\cos^2\omega t+\cos 2\omega t+\tfrac{1}{2}\ln tg\,2\omega t+2\cos^2 2\omega t$$

$$+\tfrac{1}{2}\ln\sin 4\omega t)(\sin 4M'[3-\cos 4\sigma]+8\sin 2M'\cos 2\sigma)$$

$$+\frac{1}{16}(\sin 2\omega t+t\omega+\tfrac{1}{4}\sin 4\omega t)(\sin 2\sigma[\cos 2M'-\sin^2 M']+\cos^2 M'\sin 4\sigma)\Big]$$

$$-\cos^2\sigma\Big[-\frac{1}{32}\cos^2 2\sigma\sin 4M'\ln\cos\omega t$$

$$+\frac{1}{16}(-\ln tg\,\omega t-4\cos^2\omega t+\ln\sin 2\omega t)(\sin 2M'+\tfrac{1}{2}\sin 4M'\cos 2\sigma)$$

$$+\frac{1}{8}(t\omega-\tfrac{1}{2}\sin 2\omega t)(\sin 2\sigma\cos^2 2M'+\sin 4\sigma\cos^2 M'\cos 2M')$$

$$+\frac{1}{128}(\ln tg\,\omega t+4\cos^2\omega t+\cos 2\omega t-\tfrac{1}{2}\ln tg\,2\omega t-2\cos^2 2\omega t$$

$$-\tfrac{1}{2}\ln\sin 4\omega t)(\sin 2\sigma[\cos 2M'-\sin^2 M']+\cos^2 M'\sin 4\sigma)\Big]$$

$$+\frac{\sin 2\sigma}{32}\Big[\sin^2 2M'(t\omega+\tfrac{1}{4}\sin 4\omega t)-2\sin 2\sigma\sin 2M'(\ln tg\,\omega t+4\cos^2\omega t)$$

$$-\tfrac{1}{2}\sin 2\sigma\sin 4M'(\ln tg\,2\omega t+4\cos^2 2\omega t+\ln\sin 4\omega t)$$

$$-\sin^2 2\sigma\cos 2M'\sin 2\omega t-2\sin^2 2\sigma\cos^2 2M'\Big(t\omega+\frac{\sin 4\omega t}{4}\Big)\Big]\Big\}$$

Hier sind noch rechter Hand Constanten derart hinzuzufügen, dass $\delta\alpha$ zu einer bestimmten Zeit t_0 null werde. Ordnet man die Glieder von $\delta\alpha$ analog denen von $\delta\eta$, so erkennt man leicht, dass die logarithmischen Glieder sich wieder gegen einander aufheben, so dass nur bleibt:

$$\delta\alpha=\frac{C}{E}\frac{\varrho^2}{\cos^2 2\sigma}\Big\{\frac{\omega t}{32}[\sin 2\sigma(4\cos 2M'-\tfrac{3}{2}\cos^2 2M')$$

$$+2\sin 4\sigma\cos M'\sin 3M'-\tfrac{1}{2}\sin 6\sigma(2\cos 2M'+\cos^2 2M')]$$

$$-\frac{1}{64}(\sin 2M'\sin\sigma\sin 3\sigma+(3\sin 4\sigma+14\cos^2\sigma\sin^2\sigma-\cos^4\sigma)\sin 4M')$$

$$-\frac{1}{128}\cos 2\omega t(\sin 4M'(9-4\cos 2\sigma-3\cos 4\sigma)+8\sin 2M'(3\cos 2\sigma-\cos 4\sigma))$$

[redacted]

$$+\frac{1}{128}\sin 2\omega t(\sin 2\sigma(2-5\cos 2M'+4\cos 4M')$$

$$+\sin 4\sigma(2\cos 4M'-2\cos 2M'+4)-\sin 6\sigma(2+4\cos 2M'))$$

$$+\frac{1}{128}\cos 4\omega t(8\cos 2\sigma\sin 2M'+2\cos^2 2\sigma\sin 4M')$$

$$+\frac{1}{128}\sin 4\omega t(3-\tfrac{7}{4}\cos 2M')\sin 4\omega t\Big\}$$

wo rechter Hand noch passende Constanten hinzuzufügen sind. Die periodischen Terme sind völlig unmerklich, der der Zeit proportionale ist

$$\frac{1}{4}\frac{C}{E}\frac{\rho^2\sin 2\sigma}{\cos^2 2\sigma}\,\omega . Ft = \frac{C}{2E}\left(\frac{\varepsilon^2+\varepsilon'^2}{\varepsilon^2-\varepsilon'^2}\right)^2\varepsilon\varepsilon'\omega Ft$$

wo — wie leicht zu sehen ist — F einen Factor bedeutet, der stets seinem absoluten Werte nach unterhalb 1 liegt; sieht man wie bisher ε' gegen ε als klein an, so erkennt man, dass für $\frac{C}{E} = 0{,}001$ dieses Glied 750 mal kleiner ist als das Hauptstörungsglied

$$\tfrac{3}{8}\,\omega\varepsilon\varepsilon' t$$

Hiermit schliessen wir die Discussion der der Eigentümlichkeit des cardanischen Zwanges entstammenden Glieder.

17.

In $\frac{d\Gamma'}{dt}$ kommen folgende Glieder vor:

$$2n\cos\varphi\left(1-\frac{C}{2E}\right)\vartheta^2\cos(\psi+\mathfrak{A})\frac{d\vartheta}{dt} - n\cos\varphi\frac{C}{E}\cos\psi\cos\mathfrak{A}\vartheta^2\frac{d\vartheta}{dt}$$

Das erste von diesen Gliedern tritt bis auf den Factor $\left(1-\frac{C}{2E}\right)$ schon bei Hansen auf. Denn da Hansen die Azimuthe ψ von der Meridianebene zählt, während wir sie von der durch die feste Achse gelegten Verticalebene ab rechnen, so ist unser $(\psi+\mathfrak{A})$ nichts anderes als Hansen's ψ und das Glied

$$2n\cos\varphi\cos\psi\,\vartheta^2\frac{d\vartheta}{dt}$$ [1]

das bei Hansen in $\frac{dx'}{dt}$ (bei uns $\frac{d\Gamma'}{dt}$) vorkommt, ist abgesehen von genanntem Factor der obige erste Term. Es genügt also auch auf

1) Hansen a. a. O. pag. 51 unten.

das Resultat der Integration bei Hansen[1]) zu verweisen, die nur unmerkliche periodische Glieder liefert, denen bei uns der constante Factor $\left(1-\frac{C}{2E}\right)$ hinzuzufügen wäre. Auch das Glied

$$-n\cos\varphi\cos\mathfrak{A}\frac{C}{E}\vartheta^2\cos\psi\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{d\Gamma'}{dt}=H$$

das in die Differentialgleichungen pag. 64 zu substituiren wäre, kann nur bei der Integration unmerkliche periodische Glieder in $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\eta$ und $\delta\alpha$ liefern. Denn nach pag. 68 ist

$$\vartheta\cos\psi=\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\cos(M-\mathfrak{A})-\varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\sin(M-\mathfrak{A})$$

in $\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}$ steckt aber der Factor

$$\sin(\omega t+\eta)\cos(\omega t+\eta)$$

also wird in jenen Differentialgleichungen die rechte Seite eine homogene Function ungeraden positiven Grades von $\sin(\omega t+\eta)$, $\cos(\omega t+\eta)$.

18.

Wir gehen zur Ermittelung des Einflusses über, den der erste — mitschwingende — Körper auf die Bewegung ausübt. Dieser Körper hat beim Gaussischen Pendel die Form eines Ringes, in einer von Dr. K. Onnes in Gröningen 1879 gegebenen Einrichtung[2]) die eines soliden Cylinders, der von beiden Seiten mit je einem keilförmigen bis zur Mitte seiner Höhe reichenden Einschnitte versehen ist, der auf dem anderen senkrecht steht.

Wir gehen von den Gleichungen aus:

$$h''=-\frac{T_1}{E}\left(\frac{d(\vartheta\sin\psi)}{dt}\right)^2+\frac{2gm_1s_1}{E}\left(\vartheta\sin\psi\sin\iota_1-\frac{\vartheta^2}{2}\sin^2\psi\cos\iota_1\right)$$

$$\frac{d\Gamma'}{dt}=-\frac{T_1}{E}\vartheta\cos\psi\frac{d^2(\vartheta\sin\psi)}{dt^2}+\frac{gm_1s_1}{E}\vartheta\cos\psi(\sin\iota_1-\vartheta\sin\psi\cos\iota_1)$$

$$\begin{aligned}\frac{dh''}{dt}=&-\frac{2T_1}{E}\frac{d(\vartheta\sin\psi)}{dt}\cdot\frac{d^2(\vartheta\sin\psi)}{dt^2}\\&+\frac{2gm_1s_1}{E}\vartheta\cos\psi(\sin\iota_1-\vartheta\sin\psi\cos\iota_1)\frac{d\psi}{dt}\\&+\frac{2gm_1s_1}{E}\frac{d\vartheta}{dt}\sin\psi(\sin\iota_1-\vartheta\sin\psi\cos\iota_1)\end{aligned}$$

1) a. a. O. pag. 61.

2) Zeitschrift für Instrumentenkunde Bd. III, pag. 359.

Wenn wir bei der Differentiation und Integration, wie bisher in der zweiten Näherung, $\mathfrak{f}$ gegen ω vernachlässigen, so ist nach pag. 68

$$\frac{d^2(\vartheta\cos\psi)}{dt^2} = -\omega^2\vartheta\cos\psi; \qquad \frac{d^2\vartheta\sin\psi}{dt^2} = -\omega^2\vartheta\sin\psi$$

und somit wird

$$H = \frac{d\Gamma''}{dt} = \frac{T_1}{E}\omega^2\vartheta^2\sin\psi\cos\psi + \frac{gm_1s_1}{E}\vartheta\cos\psi(\sin\iota_1 - \vartheta\sin\psi\cos\iota_1)$$

$$G = \frac{T_1}{E}\frac{\omega^2\vartheta\sin\psi}{\frac{d\vartheta}{dt}}\left(\frac{d(\vartheta\sin\psi)}{dt} - \vartheta\cos\psi\frac{d\psi}{dt}\right)$$
$$+ \frac{gm_1s_1}{E}\vartheta\sin\psi(\sin\iota_1 - \vartheta\sin\psi\cos\iota_1)$$

$$G = \left(\omega^2\frac{T_1}{E} - \frac{gm_1s_1}{E}\cos\iota_1\right)\vartheta^2\sin^2\psi + \frac{gm_1s_1}{E}\sin\iota_1\,\vartheta\sin\psi$$

$$H = \left(\omega^2\frac{T_1}{E} - \frac{gm_1s_1}{E}\cos\iota_1\right)\vartheta^2\sin\psi\cos\psi + \frac{gm_1s_1}{E}\sin\iota_1\,\vartheta\cos\psi$$

wenn man also zur Abkürzung

$$\omega'^2 = \omega^2\frac{T_1}{E} - \frac{gm_1s_1}{E}\cos\iota_1; \qquad g_1 = \frac{gm_1s_1}{E}\sin\iota_1$$
$$S = \omega'^2\vartheta^2\sin\psi + g_1\vartheta$$

setzt, so erhält man einfach

$$G = S\sin\psi, \quad H = S\cos\psi$$

und bei Substitution dieser Ausdrücke in die Differentialgleichungen pag. 61

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{S}{\omega\vartheta^2}\sin(\omega t+\eta)(\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\sin\psi - \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\cos\psi)$$

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \frac{S}{\omega\vartheta^2}\cos(\omega t+\eta)(\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\cos\psi + \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\sin\psi)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{S\varepsilon\cos(\omega t+\eta)}{\omega\vartheta^2(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)}(\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\sin\psi - \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\cos\psi)$$
$$+ \frac{S\varepsilon'\sin(\omega t+\eta)}{\omega\vartheta^2(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)}(\varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\sin\psi + \varepsilon\cos(\omega t+\eta)\cos\psi)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{S\varepsilon'\cos(\omega t+\eta)}{\omega\vartheta^2(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)}(\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\sin\psi - \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\cos\psi)$$
$$- \frac{S\varepsilon\sin(\omega t+\eta)}{\omega\vartheta^2(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)}(\varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\sin\psi + \varepsilon\cos(\omega t+\eta)\cos\psi)$$

Weil nun nach pag. 53

$$\varepsilon\cos(\omega t+\eta)=\vartheta\cos(\psi-M+\mathfrak{A})=\vartheta\cos(\psi-M',$$
$$\varepsilon'\sin(\omega t+\eta)=\vartheta\sin(\psi-M+\mathfrak{A})=\vartheta\sin(\psi-M')$$

ist, so ergiebt sich

$$\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\sin\psi-\varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\cos\psi=\vartheta\sin M'$$
$$\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\cos\psi+\varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\sin\psi=\vartheta\cos M'$$

und demnach

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=-\frac{S}{\omega\vartheta}\sin(\omega t+\eta)\sin M'$$

$$\frac{d\varepsilon'}{dt}=\frac{S}{\omega\vartheta}\cos(\omega t+\eta)\cos M'$$

$$\frac{d\eta}{dt}=-\frac{S}{\omega\vartheta(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)}(\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\sin M'-\varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\cos M')$$

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{S}{\omega\vartheta(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)}(\varepsilon'\cos(\omega t+\eta)\sin M'-\varepsilon\sin(\omega t+\eta)\cos M')$$

Der Ausdruck von S besteht aus zwei Teilen, deren zweiter $g_1\vartheta$ in diese Gleichungen substituirt die rechten Seiten zu linearen homogenen Functionen von $\sin(\omega t+\eta)$ und $\cos(\omega t+\eta)$ macht, und bei der Integration nur kleine periodische Functionen liefert, so zwar, dass der absolute Wert von $\delta\varepsilon$ und $\delta\varepsilon'$ nicht grösser als

$$\frac{g_1}{\omega^2}=\frac{gm_1 s_1\sin\iota_1}{gm_2 c_2}=\frac{m_1 s_1}{m_2 c_2}\sin\iota_1$$

werden kann; m_1 ist die geringe Masse des ersten Körpers, s_1 der Abstand seines Schwerpunktes von der festen Achse der Aufhängung und wird vom Mechaniker nahe gleich null gemacht werden können; schliesslich war ja ι_1 der Winkel, den das vom Schwerpunkte des ersten Körpers auf die feste Achse gefällte Lot mit der gemeinsamen Senkrechten beider Achsen bildet, ι_1 wird demnach fast gleich null sein, wenn der erste Körper symmetrisch gebaut und homogen ist. Hieraus folgt die Unbeträchtlichkeit von $\delta\varepsilon$ und $\delta\varepsilon'$. In $\delta\eta$ und $\delta\alpha$ bringt die Substitution von $g_1\vartheta$ allerdings Variationen hervor, die — weil ε im Nenner in der zweiten Potenz, im Zähler in der ersten Potenz vorkommt — für ganz kleine Grund von ε unbrauchbar sein werden; das hat seinen inneren Grund darin, dass das betrachtete Glied die Gleichgewichtslage des Systemes verändert, wie später zu zeigen sein wird. Die Substitution

[redacted]

$$S = \omega'^2 \vartheta^2 \sin\psi$$

bringt in den Variationen viel grössere Terme hervor. Denn es war

$$\vartheta \sin\psi = \varepsilon \cos(\omega t + \eta) \sin M' + \varepsilon' \sin(\omega t + \eta) \cos M',$$

und, dies in die Differentialgleichungen der vorigen Seite einsetzend, erhält man:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{\omega'^2}{\omega}\Big(\frac{\varepsilon'}{4}\sin 2M' - \frac{\varepsilon'}{4}\sin 2M' \cos 2(\omega t + \eta) + \frac{\varepsilon}{2}\sin^2 M' \sin 2(\omega t + \eta)\Big)$$

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = +\frac{\omega'^2}{\omega}\Big(\frac{\varepsilon}{4}\sin 2M' + \frac{\varepsilon}{4}\sin 2M' \cos 2(\omega t + \eta) + \frac{\varepsilon'}{4}\cos^2 M' \sin 2(\omega t + \eta)\Big)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{\omega'^2}{4\omega} + \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon'^2}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2}\,\frac{\omega'^2}{4\omega}\cos 2M' - \frac{\omega'^2}{\omega}\,\frac{\varepsilon'^2 \cos^2 M' + \varepsilon^2 \sin^2 M'}{2(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)}\cos 2(\omega t + \eta)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\omega'^2 \varepsilon\varepsilon'}{2\omega(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)}(\cos 2M' - \cos 2(\omega t + \eta)) - \frac{\omega'^2}{4\omega}\sin 2M' \sin 2(\omega t + \eta)$$

Hieraus folgt durch Integration bei Vernachlässigung von $\mathfrak{f}$ gegen ω und passende Bestimmung der Constanten der Integration

$$\delta\varepsilon = \frac{\omega'^2}{\omega}\frac{\varepsilon'}{8\mathfrak{f}}(\cos 2M' - \cos 2\psi_0) + \frac{\omega'^2}{4\omega^2}\sin M'(\varepsilon \sin M'[\cos 2\,\omega t - 1] + \varepsilon' \cos M' \sin 2\omega t)$$

$$\delta\varepsilon' = -\frac{\omega'^2}{\omega}\frac{\varepsilon}{8\mathfrak{f}}(\cos 2M' - \cos 2\psi_0) + \frac{\omega'^2}{4\omega^2}\cos M'(\varepsilon \sin M' \sin 2\omega t - \varepsilon' \cos M'[\cos 2\omega t - 1])$$

$$\delta\eta = -\frac{\omega'^2}{4\omega}t + \frac{(\varepsilon^2 + \varepsilon'^2)\,\omega'^2}{8(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)\mathfrak{f}\omega}(\sin 2M' - \sin 2\psi_0) - \frac{\omega'^2}{4\omega^2}\,\frac{\varepsilon'^2 \cos^2 M' + \varepsilon^2 \sin^2 M'}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2}\sin 2\omega t$$

$$\delta\alpha = -\frac{\omega'^2 \varepsilon\varepsilon'}{4\omega\mathfrak{f}(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)}(\sin 2M' - \sin 2\psi_0) + \frac{\omega'^2 \varepsilon\varepsilon'}{4\omega^2(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)}\sin 2\,\omega t - \frac{\omega'^2}{8\omega^2}\sin 2\,M'(\cos 2\omega t - 1)$$

wo $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\eta$, $\delta\alpha$ für $t = t_0 = 0$ zu null werden. Der einzige hier vorkommende der Zeit proportionale Term bewirkt eine Veränderung der Schwingungsdauer, die durch dieses Glied statt $\frac{\pi}{\omega}$

$$T = \frac{\pi}{\omega}\left(1 + \frac{\omega'^2}{4\omega^2}\right) = \frac{\pi}{\omega}\left(1 + \frac{T_1}{4E} - \frac{g m_1 s_1}{4 m_2 c_2}\cos\iota_1\right)$$

wird. Die Schwingungsdauer wird vermehrt, wenn

$$\frac{m_1 s_1 \cos\iota_1}{m_2 c_2} < \frac{T_1}{E}$$

ist, vermindert im entgegengesetzten Falle.

Projicirt man demnach den Abstand des Schwerpunktes von der festen Achse auf die gemeinsame Senkrechte beider Achsen, so wird, wenn jene Projection p_1 in der Ruhelage unterhalb der u-v-ebene liegt und so beschaffen ist, dass

$$\frac{m_1 p_1}{m_2 c_2} > \frac{T_1}{E}$$

ist, die Schwingungsdauer vermindert; wenn jene Brüche gleich sind, nicht geändert; im allgemeinen aber vermehrt werden.

Die anderen Glieder in den Variationen, die auf der vorigen Seite stehen, sind teilweise völlig unmerkliche periodische Glieder, teilweise periodische Glieder von beträchtlichem Maximalwerte, welche sogar unbrauchbar werden, wenn $\mathfrak{f}$ sehr klein, der Beobachtungsort also dem Aequator nahe ist.[1]) Die Natur der Variation von ε' bewirkt wieder, (wie die Glieder pag. 69), dass, wenn das Pendel auch ursprünglich sogenannte ebene Schwingungen ausführt, dieselben allmählich in elliptische, dann wieder in ebene übergehen u. s. f., und dass die kleine Achse der Ellipse dann am kleinsten bleibt, wenn $\cos 2\psi_0 = 0$ ist, d. h. wenn man das Pendel unter 45° oder 135° gegen die feste Achse anstösst. Nur bei dieser günstigst möglichen Anfangslage der sogenannten Schwingungsebene wird im Laufe der Bewegung die Wirkung von ε' auf die Drehung derselben allmählich wieder aufgehoben. Ob diese Wirkung, sowie die directe Wirkung in $\delta\alpha$ — wie sie auf der vorigen Seite erhalten wurde — merklich ist, das hängt von dem Werte von

$$\frac{\omega'^2}{4\omega\mathfrak{f}} = \frac{1}{4\omega\mathfrak{f}}\left(\frac{T_1}{E} - \frac{g m_1 s_1}{m_2 c_2}\cos\iota_1\right)$$

---

1) Für diesen Fall würde eine Reihenentwickelung analog der von pag. 70 zum Ziele führen.

[redacted]

ab, den ich leider nicht taxiren konnte, weil mir eine Kenntniss der Dimensionen des Apparates fehlt.

19.

Diejenigen Störungen der Bewegung, welche durch die Existenz eines kleinen Abstandes zwischen den Rotationsachsen bedingt sind, werden durch Berücksichtigung folgender Glieder erhalten:

$$h'' = -\frac{2lm_2c_2}{E}\left(\frac{d(\vartheta\sin\psi)}{dt}\right)^2 - \frac{gm_2}{E}l\vartheta^2\sin^2\psi$$

$$\frac{d\Gamma'}{dt} = -\frac{2lm_2c_2}{E}\vartheta\cos\psi\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\sin\psi) - \frac{gm_2}{E}l\vartheta^2\sin\psi\cos\psi + \frac{m_2c_2le}{E}\frac{d(\vartheta^2)}{dt}$$

Mit vorläufiger Uebergehung des letzten Gliedes in $\frac{d\Gamma'}{dt}$ bilden wir

$$\frac{dh''}{dt} = -\frac{4lm_2c_2}{E}\frac{d(\vartheta\sin\psi)}{dt}\frac{d^2(\vartheta\sin\psi)}{dt^2} - \frac{2gm_2}{E}l\vartheta\sin\psi\frac{d}{dt}(\vartheta\sin\psi)$$

und da bei Vernachlässigung von $\mathfrak{f}$ gegen ω

$$\frac{d^2(\vartheta\sin\psi)}{dt^2} = -\omega^2\vartheta\sin\psi$$

ist, so erhält man mit Einführung der Bezeichnung

$$\omega''^2 = \frac{2lm_2c_2}{E}\omega^2 - \frac{gm_2l}{E}$$

$$\frac{dh''}{dt} = 2\omega''^2\vartheta\sin\psi\frac{d}{dt}(\vartheta\sin\psi)$$

$$\frac{d\Gamma'}{dt} = \omega''^2\vartheta^2\sin\psi\cos\psi$$

und hieraus

$$G = \frac{\omega''^2\vartheta^2\sin\psi}{\frac{d\vartheta}{dt}}\left(\frac{d(\vartheta\sin\psi)}{dt} - \vartheta\cos\psi\frac{d\psi}{dt}\right) = \omega''^2\vartheta^2\sin^2\psi$$

$$H = \omega''^2\vartheta^2\sin\psi\cos\psi$$

Durch Vergleichung dieser Werte mit denen von G und H pag. 80 unten, erkennt man, dass die jetzt gesuchten Variationen der Constanten einfach gefunden werden können, wenn man nur in den pag. 81 gefundenen ω''^2 statt ω'^2 schreibt.

Wir schliessen also unmittelbar, dass der Ausdruck der Schwingungsdauer vermöge der betrachteten Glieder statt $\frac{\pi}{\omega}$ nach pag. 82

$$T = \frac{\pi}{\omega}\left(1+\frac{\omega''^2}{4\omega^2}\right) = \frac{\pi}{\omega}\left(1+\frac{lm_2 c_2}{2E}-\frac{gm_2 l}{4E\omega^2}\right)$$

wird Da nun nahezu $E = m_2 c_2^2$ ist, so ist nahe

$$T = \frac{\pi}{\omega}\left(1+\frac{l}{4c_2}\right)$$

Nach dem, was über das Vorzeichen von l festgesetzt wurde, wird also die Schwingungszeit vergrössert, wenn in der Ruhelage des Apparates die bewegliche Achse unterhalb, vermindert, wenn dieselbe oberhalb der festen Achse liegt. Bei der Vollkommenheit der mechanischen Technik wird $\frac{l}{c_2}$ kaum grösser als 0,0001 sein, die Schwingungszeit wird also durch diesen Fehler kaum um mehr als ein Vierzigtausendstel ihres Betrages modificirt werden.

Ausserdem bringt der betrachtete Fehler periodische Variationen der Constanten mit beträchtlichem Maximalwert hervor. Dieser Maximalwert ist z. B. für $\delta\alpha$, wenn $\sin 2\psi_0 = 0$ ist,

$$\delta\alpha_M = \frac{\omega''^2 \varepsilon\varepsilon'}{4\omega f(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)} = \frac{\omega\varepsilon\varepsilon' \operatorname{cosec}\varphi}{4n\left(1-\frac{C}{2E}\right)}\left(\frac{2lm_2 c_2}{E}-\frac{gm_2 l}{E\omega^2}\right)\frac{1}{\varepsilon^2-\varepsilon'^2}$$

Da nun nahezu

$$1-\frac{C}{2E} = 1$$

und

$$\frac{2lm_2 c_2}{E}-\frac{gm_2 l}{E\omega^2} = \frac{l}{c^2} = 0{,}0001$$

gesetzt werden kann,

$$\delta\alpha_M = \frac{13714}{40000}\frac{\omega\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon^2-\varepsilon'^2}\operatorname{cosec}\varphi$$

so erkennt man, dass dieses periodische Glied mindestens für diejenigen Werte von ε' sehr merklich sein wird, welche das Hauptstörungsglied in der Bewegung der Schwingungsebene:

$$\frac{3}{8}\omega\varepsilon\varepsilon' t$$

zu einer merklichen Wirkung gelangen lassen.

Ueber die Störung von ε' könnte nur dem auf pag. 82 Gesagten ganz Analoges hinzugefügt werden. Jedenfalls ist die höchste Sorgfalt auf ein genaues Sichschneiden der Achsen der cardanischen Aufhängung zu verwenden.

Das letzte Glied in $\frac{d\Gamma'}{dt}$ ist zwar von der Ordnung oben vernachlässigter Glieder, soll aber berücksichtigt werden, weil es einen der Zeit proportionalen Term liefert. Wir setzen es in die Gleichungen pag. 65 ein, und erhalten mit

$$H = \frac{d\Gamma'}{dt} - \frac{m_2 c_2 le}{E}\frac{d(\vartheta^2)}{dt} = -\omega\frac{m_2 c_2 le}{2E}(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)\sin 2(\omega t + \eta)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{\varepsilon'}{\omega(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)}\frac{m_2 c_2 le}{E}\frac{d(\vartheta^2)}{dt}$$

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \frac{\varepsilon}{\omega(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)}\frac{m_2 c_2 le}{E}\frac{d(\vartheta^2)}{dt}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = +\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2}\frac{m_2 c_2 le}{E}\cos 2(\omega t + \eta)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{m_2 c_2 le}{2E} - \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon'^2}{4(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)}\frac{m_2 c_2 le}{E}\cos 2(\omega t + \eta)$$

Bei der Integration ergeben sich fast nur unmerkliche periodische Glieder, das einzige der Zeit proportionale Glied

$$\delta\alpha = \frac{m_2 c_2 le}{2E}t$$

wird, wenn näherungsweise $E = m_2 c_2^2$ gesetzt wird,

$$\delta\alpha = \frac{l}{c_2}n\sin\varphi t$$

Bei dem angenommenen Werte von $\frac{l}{c_2}$ ergiebt sich, dass die Geschwindigkeit der Schwingungsebene um ein Zehntausendtel ihres Betrages vermehrt wird, wenn die bewegliche Achse unterhalb, um dasselbe Maass vermindert wird, wenn dieselbe oberhalb der festen Achse hinläuft.

20.

Wenn der Schwerpunkt des Hauptkörpers um s_2 von der Achse seines kleinsten Trägheitsmomentes entfernt liegt, ι_2 den im Sinne der wachsenden ϑ zu zählenden Winkel bedeutet, den das von jenem

Schwerpunkte auf die genannte Achse gefällte Lot mit der Richtung der a-achse bildet, so sind die Glieder

$$h'' = -\frac{2gm_2 s_2}{E} \vartheta \cos(\chi + \iota_2)$$

$$\frac{d\Gamma'}{dt} = -\frac{gm_2 s_2}{E} \vartheta \sin(\chi + \iota_2)$$

in Betracht zu ziehen. Nun gilt mit Vernachlässigung von Grössen zweiter Ordnung

$$\frac{d\chi}{dt} = -\frac{d\psi}{dt}$$

also

$$\text{(I)} \qquad H = \frac{d\Gamma'}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\partial h''}{\partial \psi}$$

$$\text{(II)} \qquad G = \frac{\vartheta}{2\frac{d\vartheta}{dt}}\left(\frac{dh''}{dt} - 2\frac{d\psi}{dt}\cdot\frac{d\Gamma'}{dt}\right)$$

$$= \frac{\vartheta}{2\frac{d\vartheta}{dt}}\left(\frac{\partial h''}{\partial \vartheta}\cdot\frac{d\vartheta}{dt} + \left[\frac{\partial h''}{\partial \psi}\frac{d\psi}{dt} - 2\frac{d\psi}{dt}\frac{d\Gamma'}{dt}\right]\right)$$

Aber vermöge der Gleichung (I) verschwindet die in eckigen Klammern eingeschlossene Grösse. Also wird immer, wenn eine Gleichung (I) existirt,

$$\text{(II)} \qquad G = \frac{1}{2}\vartheta\frac{\partial h''}{\partial \vartheta}$$

Bei unserer Bedeutung der Grössen h'' und $\frac{d\Gamma'}{dt}$ ergiebt sich

$$G = -\frac{gm_2 s_2}{E}\vartheta \cos(\chi + \iota_2)$$

$$H = -\frac{gm_2 s_2}{E}\vartheta \sin(\chi + \iota_2)$$

Wir haben Producte, wie $\mathfrak{b}_1 s_2$, immer vernachlässigt, setzen hier also

$$\chi = \frac{\pi}{2} - \psi - \mu$$

$$\cos(\chi + \iota_2) = \sin(\psi + \mu - \iota_2); \quad \sin(\chi + \iota_2) = \cos(\psi + \mu - \iota_2)$$

Durch Substitution dieser Werte in die Differentialgleichungen pag. 61 müssen sich Glieder ergeben, die denen von pag. 79 ganz analog sind, und aus ihnen dadurch hervorgehen, dass man $\psi + \mu - \iota_2$ statt ψ schreibt und

[redacted]

$$S = -\frac{g m_2 s_2}{E}\vartheta$$

setzt. Nun wird

$$\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\sin(\psi+\mu-\iota_2)-\varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\cos(\psi+\mu-\iota_2)=\vartheta\sin(M'+\mu-\iota_2)$$
$$\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\cos(\psi+\mu-\iota_2)+\varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\sin(\psi+\mu-\iota_2)=\vartheta\cos(M'+\mu-\iota_2)$$

folglich werden, durch Substitution der auf der vorigen Seite stehenden Werte von G und H in die Differentialgleichungen, die rechten Seiten derselben homogen und linear in $\sin(\omega t+\eta)$, $\cos(\omega t+\eta)$.

Die Variationen von $\delta\varepsilon$ und $\delta\varepsilon'$ werden also den unmerklichen Maximalwert

$$\frac{g m_2 s_2}{g m_2 c_2} = \frac{s_2}{c_2}$$

haben, während die Ausdrücke für $\delta\eta$ und $\delta\alpha$ freilich für sehr kleine Werte von ε unbrauchbar sein werden, was wiederum seinen Grund in der durch die betrachteten Glieder hervorgebrachten Veränderung der Gleichgewichtslage des Systemes hat. Wären die Glieder übrigens merklich, so würden sie von dem Winkel

$$\psi_0+\mu-\iota_2 = \alpha-\mathfrak{A}+\mu-\iota_2$$

abhangen, welchen die ursprüngliche Schwingungsebene mit einer Richtung bildet, die von dem aus dem Schwerpunkte auf die c-achse gefällten Lote um 90° im Sinne der abnehmenden ψ absteht, also auch von dem Winkel, den die Richtung jenes Lotes mit der ursprünglichen Schwingungsebene bildet.

21.

Den Einfluss eines Unterschiedes zwischen den beiden grösseren Hauptträgheitsmomenten ergeben die Gleichungen

$$h'' = \Delta\left\{\left(\frac{d(\vartheta\cos\chi)}{dt}\right)^2-\left(\frac{d(\vartheta\sin\chi)}{dt}\right)^2\right\}$$
$$\frac{d\Gamma'}{dt} = \Delta\left\{\vartheta\sin\chi\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\cos\chi)+\vartheta\cos\chi\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\sin\chi)\right\}$$

Da χ von $-\psi$ nur um einen constanten Winkel verschieden ist[1], so müssen — wenn bei der Differentiation $\mathfrak{f}$ gegen ω vernachlässigt wird — auch die Relationen

---

1) Natürlich bis auf Grössen zweiter Ordnung, die wir vernachlässigen.

$$\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\cos\chi) = -\omega^2\vartheta\cos\chi;\quad \frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\sin\chi) = -\omega^2\vartheta\sin\chi$$

statt haben; da aber

$$\frac{dh''}{dt} = 2\varDelta\left\{\frac{d}{dt}(\vartheta\cos\chi)\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\cos\chi) - \frac{d}{dt}(\vartheta\sin\chi)\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\sin\chi)\right\}$$

ist; so folgt hieraus

$$\frac{dh''}{dt} = -2\varDelta\omega^2\left(\vartheta\cos\chi\frac{d}{dt}(\vartheta\cos\chi) - \vartheta\sin\chi\frac{d}{dt}(\vartheta\sin\chi)\right)$$

$$\frac{d\Gamma'}{dt} = -\varDelta\omega^2\vartheta^2\sin 2\chi = H$$

$$G = \frac{\vartheta}{\frac{d\vartheta}{dt}}\left(-\varDelta\omega^2(\vartheta\cos^2\chi - \vartheta\sin^2\chi)\frac{d\vartheta}{dt} + 2\varDelta\omega^2\vartheta^2\sin\chi\cos\chi\frac{d(\chi+\psi)}{dt}\right)$$

Nun ist $\frac{d}{dt}(\chi+\psi)$ eine Grösse zweiter Ordnung, also wird

$$G = -\varDelta\omega^2\vartheta^2\cos 2\chi$$
$$H = -\varDelta\omega^2\vartheta^2\sin 2\chi$$

und die Substitution dieser Ausdrücke in die allgemeinen Differentialgleichungen pag. 61 muss auf der rechten Seite Ausdrücke hervorbringen, die aus denen der Differentialgleichungen von pag. 79 oben hervorgehen, wenn man $\frac{\pi}{2} - 2\chi$ für ψ schreibt und

$$S = -\varDelta\omega^2\vartheta^2$$

setzt. Sodann ergiebt sich auf die mehrfach erwähnte Art

$$\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\cos 2\chi - \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\sin 2\chi = -\vartheta\cos(\psi+M'+2\mu)$$
$$\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\sin 2\chi + \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\cos 2\chi = +\vartheta\sin(\psi+M'+2\mu)$$

und auf ähnliche Weise

$$\vartheta\cos(\psi+M'+2\mu) = \varepsilon\cos(\omega t+\eta)\cos 2(M'+\mu) - \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\sin 2(M'+\mu)$$
$$\vartheta\sin(\psi+M'+2\mu) = \varepsilon\cos(\omega t+\eta)\sin 2(M'+\mu) + \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\cos 2(M'+\mu)$$

Die Differentialgleichungen pag 79 ergeben also:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \varDelta\omega\sin(\omega t+\eta)(\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\cos 2(M'+\mu) - \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\sin 2(M'+\mu))$$

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = -\varDelta\omega\cos(\omega t+\eta)(\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\sin 2(M'+\mu) + \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\cos 2(M'+\mu))$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{\varDelta\omega\varepsilon}{\varepsilon^2-\varepsilon'^2}\cos(\omega t+\eta)(\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\cos 2(M'+\mu) - \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\sin 2(M'+\mu))$$
$$-\frac{\varDelta\omega\varepsilon'}{\varepsilon^2-\varepsilon'^2}\sin(\omega t+\eta)(\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\sin 2(M'+\mu) + \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\cos 2(M'+\mu))$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\varDelta\omega\varepsilon'}{\varepsilon^2-\varepsilon'^2}\cos(\omega t+\eta)(\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\cos 2(M'+\mu) - \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\sin 2(M'+\mu))$$
$$+\frac{\varDelta\omega\varepsilon}{\varepsilon^2-\varepsilon'^2}\sin(\omega t+\eta)(\varepsilon\cos(\omega t+\eta)\sin 2(M'+\mu) + \varepsilon'\sin(\omega t+\eta)\cos 2(M'+\mu))$$

und bei Ausführung der Integration unter Vernachlässigung von $\mathfrak{f}$ gegen ω erhält man:

$$\delta\varepsilon = -\frac{\varepsilon'\varDelta\omega}{4\mathfrak{f}}(\cos 2(M'+\mu) - \cos 2(\psi_0+\mu)) - \frac{\varDelta}{2}\sin\omega t(\varepsilon\sin\omega t\cos 2(M'+\mu) + \varepsilon'\cos\omega t\sin 2(M'+\mu))$$

$$\delta\varepsilon' = \frac{\varepsilon\varDelta\omega}{4\mathfrak{f}}(\cos 2(M'+\mu) - \cos 2(\psi_0+\mu)) - \frac{\varDelta}{2}\sin\omega t(\varepsilon\cos\omega t\sin 2(M'+\mu) + \varepsilon'\sin\omega t\cos 2(M'+\mu))$$

$$\delta\eta = -\frac{\varDelta\omega}{4\mathfrak{f}}\frac{\varepsilon^2+\varepsilon'^2}{\varepsilon^2-\varepsilon'^2}(\sin 2(M'+\mu) - \sin 2(\psi_0+\mu)) + \varDelta\sin\omega t\left(\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon^2-\varepsilon'^2}\sin\omega t\sin 2(M'+\mu) - \cos\omega t\cos 2(M'+\mu)\right)$$

$$\delta\alpha = \frac{\varDelta\omega\varepsilon\varepsilon'}{2\mathfrak{f}(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)}(\sin 2(M'+\mu) - \sin 2(\psi_0+\mu)) + \frac{\varDelta\omega}{2}\sin^2\omega t\sin 2(M'+\mu)$$

wo $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\eta$, $\delta\alpha$ zur Zeit $t = t_0 = 0$ oder für $\eta = 0$ null werden. Eine Reihe von Gliedern werden wieder für den Fall $\varphi = 0$ ungültig, für den dann Reihenentwickelungen vorzunehmen wären. Die Grösse

$$\varDelta = \frac{A-B}{A+B}$$

wird, da die a-achse die des grössten Hauptträgheitsmomentes sein sollte, wesentlich positiv sein, sie wird von der Beschaffenheit der Linse abhangen, ob diese homogen und präcise gearbeitet ist. Kaum wird $\varDelta$ grösser als ein Hunderttausendtel sein, weil ja in A und B gleichzeitig das wirksamste Glied $m_2 c_2^2$ ist. Für diesen Wert ist

$$\frac{\varDelta\omega}{4\mathfrak{f}} = \frac{13714\pi}{400000}\operatorname{cosec}\varphi = 0{,}1077\operatorname{cosec}\varphi$$

wenn man annimmt, dass das Pendel ein Secundenpendel ist. Und dann würde das Maximum von $\delta\alpha$ für $\sin 2(\psi_0 + \mu) = 0$ und $\varepsilon = \frac{1}{9}$

$$\delta\alpha_M = 17{,}44\,\varepsilon\varepsilon'\operatorname{cosec}\varphi$$

also würden diese Störungen immerhin für solche Werte von ε' merklich sein, die das Hauptglied

$$\tfrac{3}{8}\,\omega\varepsilon\varepsilon' t$$

zur Erscheinung kommen lassen.

Die Variationen hangen von dem Winkel $(\psi_0 + \mu)$ oder auch von $90^0 - \psi_0 - \mu$, d. h. von dem Winkel ab, unter dem die a-achse in der Ruhelage gegen die anfängliche Schwingungsebene geneigt ist.

Jedenfalls erscheint bei Anfertigung der Linse die grösste Sorgfalt in Beziehung auf Form und Homogeneität geboten.

22.

Der Neigungswinkel ν der beweglichen Achse gegen die Ebene der $a - b$ erscheint in den Formeln mit der Grösse $\frac{C}{E}$ multiplicirt, deren Maximum wir auf 0,001 taxirt haben; wenn also ν ungefähr $\frac{1}{2}^0$ beträgt — was sicherlich ein der Vollkommenheit der Technik nicht entsprechender Wert sein wird — so wird schon

$$\frac{C}{E}\nu = 0{,}00001$$

Die Wirkung des Fehlers muss also schon deshalb sehr gering sein. Die vorerst zu berücksichtigenden Glieder sind

$$h'' = \frac{2C}{E}\nu\vartheta\cos\psi\,\frac{d(\vartheta\sin\psi)}{dt}\cdot\frac{d(\vartheta\cos\psi)}{dt}$$

$$\frac{d\Gamma'}{dt} = \frac{C}{E}\nu\frac{d(\vartheta\cos\psi)}{dt}\left(\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} - \vartheta\sin\psi\frac{d}{dt}(\vartheta\sin\psi)\right)$$
$$+ \frac{C}{E}\nu\,\vartheta\cos\psi\left(\vartheta\cos\psi\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\cos\psi) - \vartheta\sin\psi\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\sin\psi)\right)$$

Da nun bei Vernachlässigung von $\mathfrak{f}$ gegen ω

$$\text{(I)}\qquad \frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\cos\psi) = -\omega^2\vartheta\cos\psi;\quad \frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\sin\psi) = -\omega^2\vartheta\sin\psi$$

und ausserdem

[redacted]

$$\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}-\vartheta\sin\psi\frac{d}{dt}(\vartheta\sin\psi)=\vartheta\cos\psi\frac{d}{dt}(\vartheta\cos\psi)$$

ist, und ferner aus (I) folgt

$$2\frac{d}{dt}(\vartheta\cos\psi)\,.\,\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta\cos\psi)=-2\omega^2\vartheta\cos\psi\,.\,\frac{d}{dt}(\vartheta\cos\psi)$$

$$\left(\frac{d}{dt}(\vartheta\cos\psi)\right)^2=-\omega^2\vartheta^2\cos^2\psi+F(M')$$

wo $F(M')$ eine uns nicht weiter interessirende Function von M' allein bedeutet, so ergiebt sich

$$\frac{dh''}{dt}=2\frac{C}{E}\nu\left\{\frac{d}{dt}(\vartheta\sin\psi)\left(\frac{d(\vartheta\cos\psi)}{dt}\right)^2-\omega^2\vartheta\cos\psi\left(\vartheta\sin\psi\frac{d}{dt}(\vartheta\cos\psi)+\vartheta\cos\psi\frac{d}{dt}(\vartheta\sin\psi)\right)\right\}$$

$$\frac{d\Gamma'}{dt}=\frac{C}{E}\nu\left\{\left(\frac{d(\vartheta\cos\psi)}{dt}\right)^2\vartheta\cos\psi-(\omega^2\vartheta^2\cos^2\psi-\omega^2\vartheta^2\sin^2\psi).\,\vartheta\cos\psi\right\}$$

$$\frac{dh''}{dt}=\frac{2C}{E}\nu\left\{-2\omega^2\vartheta^2\cos^2\psi\frac{d}{dt}(\vartheta\sin\psi)-\omega^2\vartheta^2\sin\psi\cos\psi\frac{d}{dt}\vartheta\cos\psi+\frac{d}{dt}(\vartheta\sin\psi).\,F(M')\right\}$$

$$\frac{d\Gamma'}{dt}=\frac{C}{E}\nu(-2\omega^2\vartheta^3\cos^3\psi+\omega^2\vartheta^3\sin^2\psi\cos\psi+F(M')\vartheta\cos\psi)$$

Demnach wird

$$G=\frac{\vartheta}{\frac{d\vartheta}{dt}}\cdot\frac{C}{E}\nu\left\{\left(-2\omega^2\vartheta^2\cos^2\psi+F(M')\right)\left(\frac{d}{dt}(\vartheta\sin\psi)-\vartheta\cos\psi\frac{d\psi}{dt}\right)-\omega^2\vartheta^2\sin\psi\cos\psi\left(\frac{d}{dt}(\vartheta\cos\psi)+\vartheta\sin\psi\frac{d\psi}{dt}\right)\right\}$$

$$G=\frac{C}{E}\nu\left\{-3\omega^2\vartheta^3\sin\psi\cos^2\psi+F(M')\vartheta\sin\psi\right\}$$

$$H=\frac{C}{E}\nu\left\{-3\omega^2\vartheta^3\cos^3\psi+\omega^2\vartheta^3\cos\psi+F(M')\vartheta\cos\psi\right\}$$

Von dem in H allein vorkommenden Gliede

$$\frac{C}{E}\nu\,\omega^2\vartheta^3\cos\psi$$

erkennt man auf oberflächliche Betrachtung, dass bei seiner Substitution in die allgemeinen Differentialgleichungen pag. 61 der Neu-

ner ϑ^2 sich forthebt, und die rechten Seiten sich vermöge des pag. 68 gegebenen Ausdrucks von $\vartheta \cos\psi$ als homogene Functionen ungeraden Grades von $\sin(\omega t + \eta)$, $\cos(\omega t + \eta)$ darstellen lassen, also integrirt durchaus unmerkliche Variationen liefern. Die andern Glieder von G und H lassen sich auf die Form

$$G = S \sin\psi \qquad H = S \cos\psi$$

bringen, wo

$$S = \frac{C}{E}\nu\left\{-3\omega^2\vartheta^3\cos^2\psi + F(M')\vartheta\right\}$$

gesetzt ist. Also sind die Differentialgleichungen pag. 79 unten anwendbar, und man erkennt, dass nach Forthebung von ϑ die rechten Seiten dieser Differentialgleichungen sich wieder als homogene Functionen ungeraden positiven Grades in $\sin(\omega t + \eta)$, $\cos(\omega t + \eta)$ darstellen lassen, die Integration also nur völlig unbeträchtliche Terme liefern kann.

Indessen kommt in $\frac{d\Gamma'}{dt}$ noch das Glied

$$\nu\frac{C}{2E} n \cos\varphi \sin\mathfrak{A}\frac{d(\vartheta^2)}{dt}$$

vor. Dasselbe ist von der Form eines auf pag. 85 betrachteten Gliedes, und da dieses von merklichen Termen nur einen der Zeit proportionalen in $\delta\alpha$ geliefert hat, so können wir direct schliessen, dass das oben hingeschriebene Glied als einzig wahrnehmbare Störung

$$\delta\alpha = \frac{\nu C}{4E} n \cos\varphi \sin\mathfrak{A} t$$

liefern muss. Aber selbst dieses Glied würde, wenn das Pendel einen ganzen Tag am Aequator schwingen würde und so aufgehängt wäre, dass

$$\mathfrak{A} = \pm 1$$

ist, d. h. dass die feste Achse von Westen nach Osten aufgelagert ist, bei den angenommenen Maximalwerten von $\frac{C}{E}$ und ν nur eine schliessliche Abweichung von 3″,2 ergeben. Ein Fehler ν in der Lage der beweglichen Achse gegen die Ebene der beiden grössten Hauptträgheitsmomente wird also, wenn sein Wert $\frac{1}{2}^0$ nicht überschreitet, sicher nicht zur Erscheinung kommen — es wäre denn in Gliedern die ausser ν noch eine andere kleine Grösse zum Factor haben.

[redacted]

23.

Um den Einfluss einer geringen Neigung der festen Achse gegen den Horizont auf die Bewegung des Apparates zu untersuchen, gehen wir von den Gleichungen

$$h'' = -\frac{2g m_2 c_2}{E} i\vartheta \cos\psi = -2\omega^2 i\vartheta \cos\psi$$

$$\frac{d\Gamma'}{dt} = \omega^2 i\vartheta \sin\psi + n\cos\varphi \cos\mathfrak{A}\, i\left(1 - \frac{C}{2E}\right)\frac{d(\vartheta^2)}{dt}$$

aus, von denen das letzte Glied in $\frac{d\Gamma'}{dt}$ mit dem eben betrachteten Gliede in der Form übereinstimmt. Dieses Glied liefert als merkliche Störung nur

$$\delta\alpha = n\cos\varphi \cos\mathfrak{A}\, i\left(1 - \frac{C}{2E}\right) t,$$

wegen der es sich empfehlen wird jene Neigung i so gering als möglich zu machen, die feste Achse aber weitest von Westen nach Osten aufzulegen, damit der absolute Wert von $\cos\mathfrak{A}$ klein bleibe.

Da zwischen den Gliedern

$$h'' = -2\omega^2 i\,\vartheta\cos\psi;\quad \frac{d\Gamma'}{dt} = \omega^2 i\vartheta \sin\psi$$

die Relation

$$\frac{d\Gamma'}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\partial h''}{\partial\psi}$$

stattfindet, so ergibt sich nach pag. 86

$$G = \tfrac{1}{2}\vartheta \frac{\partial h''}{\partial\vartheta} = -\omega^2 i\,\vartheta \cos\psi$$

$$H = \frac{d\Gamma'}{dt} = \omega^2 i\vartheta \sin\psi$$

und die Differentialgleichungen müssen aus den pag. 79. gegebenen hervorgehen, wenn man

$$S = \omega^2 i\vartheta$$

setzt und für

$$\sin\psi \text{ resp. } \cos\psi$$

$$-\cos\psi \text{ resp. } \sin\psi$$

schreibt. Man erhält so die Differentialgleichungen

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \omega i \sin(\omega t + \eta) \cos M'$$

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \omega i \cos(\omega t + \eta) \sin M'$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\omega i \varepsilon}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \cos(\omega t + \eta) \cos M' + \frac{\omega i \varepsilon'}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \sin(\omega t + \eta) \sin M'$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\omega i \varepsilon}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \cos(\omega t + \eta) \sin M' - \frac{\omega i \varepsilon'}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \sin(\omega t + \eta) \cos M'$$

Die Integration gibt bei Vernachlässigung von $\mathfrak{f}$ gegen ω und passender Bestimmung der Constanten

$$\delta\varepsilon = -i \cos M'(\cos \omega t - 1)$$
$$\delta\varepsilon' = i \sin M' \sin \omega t$$

$$\delta\eta = \frac{\varepsilon i}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \cos M' \sin \omega t - \frac{\varepsilon' i}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \sin M'(\cos \omega t - 1)$$

$$\delta\alpha = \frac{\varepsilon i}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \sin M'(\cos \omega t - 1) - \frac{\varepsilon' i}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \cos M' \sin \omega t.$$

Diese Glieder sind für kleine Werte von i unmerklich; die Ausdrücke für $\delta\eta$ und $\delta\alpha$ werden freilich für kleine Werte von ε unbrauchbar, aber das kommt daher, dass wir bisher die c-achse als in der Ruhelage mit der w-achse zusammenfallend angesehen haben, während sie vielmehr mit der ζ-achse zusammenfällt. Das wird sich bei der späteren Untersuchung der Gleichgewichtslage zeigen.

24 [1]).

Wir haben von der vorhergehenden Betrachtung die sogenannten Störungen zweiter Ordnung ausgeschlossen. Dass sie teilweise nicht unbeträchtlich sind, lässt sich folgendermassen einsehen:

Die beträchtlichsten Störungen sind von uns durch Integration der Differentialgleichungen [2])

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{1}{16}(\varepsilon^2 + \varepsilon'^2) \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{3}{8}\omega\varepsilon\varepsilon' \end{aligned}\right\}$$

1) Hansen a. a. O. pag, 58 f.

2) vgl. pag. 61. und 65. unten.

gefunden worden, indem rechter Hand ε und ε' als constant angesehen wurden. Das ist strenge genommen nicht richtig, wir haben vielmehr zur Ergänzung nach Variation der rechten Seiten in die Gleichungen

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{1}{8}(\varepsilon\delta\varepsilon + \varepsilon'\delta\varepsilon')$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{3}{8}\omega(\varepsilon\delta\varepsilon' + \varepsilon'\delta\varepsilon)$$

die im Laufe der Untersuchung erhaltenen Variationen von ε und ε' einzusetzen [1]). Substituirt man z. B. die pag. 81. erlangten Variationen, und zwar nur die wegen des Nenners $\mathfrak{f}$ bedeutendsten Glieder derselben, so erhält man

$$\frac{d\eta}{dt} = 0$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{3\omega'^2(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)}{64\mathfrak{f}}(\cos 2M' - \cos 2\psi_0)$$

und hieraus durch Integration und passende Wahl der Constanten

$$\delta\eta = 0;$$

$$\delta\alpha = \frac{3\omega'^2(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)}{64\mathfrak{f}}\cos 2\psi_0 t - \frac{3\omega'^2}{128\mathfrak{f}^2}(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)(\sin 2M' - \sin 2\psi_0)$$

Wenn hier auch das erste Glied durch passende Wahl von ψ_0 zum Verschwinden gebracht werden kann, so ist der zweite Term wegen der Factors $\mathfrak{f}^2$ im Nenner doch fähig die Bewegung sehr zu modificiren. Glieder von ähnlicher Natur und ebenso beträchtlicher Grösse — wie wir sie eben als Wirkung des ersten, mitschwingenden, Körpers erkannt haben — werden erhalten, wenn man in die auf der vorigen Seite unten stehenden Differentialgleichungen die der cardanischen Aufhängung entstammenden Variationen von pag. 70. einsetzt — oder die Variationen $\delta\varepsilon$ und $\delta\varepsilon'$, die in Abschnitt 19. betrachtet sind und von der Existenz eines geringen Abstandes zwischen den Achsen der cardanischen Aufhängung herrühren, — oder die Variationen, die ein geringer Unterschied zwischen den beiden grösseren Hauptträgheitsmomenten erzeugt.

25.

Wenn der Apparat absolut vollkommen gearbeitet wäre, so fiele der Schwerpunkt in die Achse des kleinsten Trägheitsmoments, diese

1) cf. die oberflächlichen Betrachtungen pag. 70. f., 82., 84. und 89.

in der Ruhelage in die Verticale, und ebenso fiele die w-achse — da $t = 0$ wäre — in die Verticale; somit wäre in der Ruhelage $\vartheta = 0$. Der Apparat schwingt jedenfalls um die Richtung der Schwerkraft, und wenn wir den Wert ϑ' finden können, den ϑ in der Ruhelage hat, so haben wir den Winkel bestimmt, den jene Richtung — wenn der Schwerpunkt in der c-achse läge — mit dieser bildet. Wir werden den Winkel ϑ' ohne die letzte Voraussetzung berechnen.

Um ϑ' und ψ' — den Wert von ψ in der Ruhelage — zu finden, suchen wir [1]) die Maximalbedingungen des Ausdruckes

$$U = -\frac{2gm_2c_2}{E} i\vartheta \cos\psi - \frac{2gm_2c_2}{E}\frac{\vartheta^2}{2} - \frac{2gm_2s_2}{E}\vartheta \sin(\psi + \mu - \iota_2) + \frac{2gm_1s_1}{E}\vartheta \sin\psi \sin\iota_1$$

welcher bis auf einige — hier weggelassene — kleine Glieder, die im Endresultate nur Producte kleiner Werte liefern würden, mit dem Ausdrucke rechter Hand in Gleichung (23) pag. 42. übereinstimmt. Differentiirt man diesen Ausdruck, nachdem man ihn durch $-\frac{2gm_2c_2}{E}$ dividirt hat, nach ϑ und ψ, so erhält man als Gleichungen für ϑ' und ψ'

$$\text{(I)} \qquad i\cos\psi'\vartheta' + \frac{s_2}{c_2}\sin(\psi' + \mu - \iota_2) - \frac{m_1s_1}{m_2c_2}\vartheta' \sin\psi' \sin\iota_1 = 0$$

$$\text{(II)} \qquad -i\sin\psi'\vartheta' + \frac{s_2}{c_2}\vartheta'\cos(\psi' + \mu - \iota_2) - \frac{m_1s_1}{m_2c_2}\vartheta'\cos\psi'\sin\iota_1 = 0.$$

Die zweite Gleichung wird nach Division durch $\vartheta'\cos\psi'$ und Auflösung von $\cos(\psi' + \mu - \iota_2)$ in $\operatorname{tang}\psi'$ linear und ergibt

$$\operatorname{tang}\psi' = \frac{\frac{s_2}{c_2}\cos(\mu - \iota_2) - \frac{m_1s_1}{m_2c_2}\sin\iota_1}{\frac{s_2}{c_2}\sin(\mu - \iota_2) + i}$$

$$\sin\psi' = \frac{1}{N}\left(\frac{s_2}{c_2}\cos(\mu - \iota_2) - \frac{m_1s_1}{m_2c_2}\sin\iota_1\right)$$

$$\cos\psi' = \frac{1}{N}\left(i + \frac{s_2}{c_2}\sin(\mu - \iota_2)\right)$$

wo

1) Abweichend von Hansen, der pag. 55. a. a. O. einen anderen Weg einschlägt.

[redacted]

$$N = \sqrt{\left(\frac{s_2}{c_2}\cos(\mu-\iota_2) - \frac{m_1 s_1}{m_2 c_2}\sin\iota_1\right)^2 + \left(\frac{s_2}{c_2}\sin(\mu-\iota_2) + i\right)^2}$$

gesetzt ist. Setzt man diese Werte in die Gleichung (I) ein, so erhält man nach einiger Reduction

$$\vartheta' = -N.$$

Durch ϑ' und ψ' ist die Gleichgewichtslage bestimmt. Speciell wird

1) für $\frac{m_1 s_1}{m_2 c_2}\sin\iota_1 = 0,\ \frac{s_2}{c_2} = 0$

$$\vartheta' = i;\quad \text{tang}\,\psi' = 0$$

2) für $\frac{s_2}{c_2} = 0,\ i = 0$

$$\vartheta' = \frac{m_1 s_1}{m_2 c_2}\sin\iota_1';\quad \text{tang}\,\psi' = -\infty$$

3) für $i = 0,\ \frac{m_1 s_1}{m_2 c_2}\sin\iota_1 = 0$

$$\vartheta' = \frac{s_2}{c_2},\quad \text{tang}\,\psi' = \text{cotg}\,(\mu - \iota_2).$$

In der pag. 52. definirten xy-ebene hat der Punkt, um den das Pendel schwingt — wie leicht zu sehen ist — die Coordinaten

$$x_0 = -i - \frac{s_2}{c_2}\sin(\mu - \iota_2)$$

$$y_0 = -\frac{s_2}{c_2}\cos(\mu - \iota_2) + \frac{m_1 s_1}{m_2 c_2}\sin\iota_1.$$

26.

Das der Untersuchung bisher zu Grunde gelegte System der u, v, w eignet sich nicht, um darin Beobachtungen anzustellen. Zu diesen wird man im allgemeinen sich des zuerst eingeführten Systemes der ξ, η, ζ bedienen und in Beziehung auf dasselbe die Coordinaten eines im Pendel festen Punktes a', b', c', der der Achse des kleinsten Trägheitsmomentes nahe liegen wird, in's Auge fassen. Die Transformation der Coordinaten geschieht durch die Gleichungen (2) pag. 5. und pag. 9. mit Rücksicht auf die Ausdrücke der $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{u}_3$ etc. und der α_1, β_1, γ_1 etc. Man gelangt dabei schliesslich — bei Vernachlässigung der Producte von a' und b' mit andern kleinen Werten — zu den Gleichungen

$$\xi = -l \sin \mathfrak{A}\,\vartheta \sin\psi + a' \sin(\mu - \mathfrak{A}) - b' \cos(\mu - \mathfrak{A})$$
$$+ c' \sin\vartheta \cos(\psi + \mathfrak{A}) + c' i \cos \mathfrak{A}$$

$$\eta = l \cos \mathfrak{A}\,\vartheta \sin\psi + a' \cos(\mu - \mathfrak{A}) + b' \sin(\mu - \mathfrak{A})$$
$$+ c' \sin\vartheta \sin(\psi + \mathfrak{A}) + c' i \sin \mathfrak{A}$$

$$\zeta = l - a'\vartheta \cos\chi + b'\vartheta \sin\chi + c' \cos\vartheta - ic'\vartheta \cos\psi.$$

Da ζ im Verhältniss zu den anderen Coordinaten geringen Aenderungen unterworfen ist, so eignen sich zur Beobachtung nur ξ und η.

Um die Variationen dieser Grössen zu erhalten, hat man in die Ausdrücke der ξ und η die im Laufe der Untersuchung erlangten Werte der $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\eta$ und $\delta\alpha$ einzusetzen; und, da wir Producte kleiner Grössen vernachlässigen, so ist diese Substitution nur in

$$\xi_1 = c' \sin\vartheta \cos(\psi + \mathfrak{A})$$
$$\eta_1 = c' \sin\vartheta \sin(\psi + \mathfrak{A})$$

nötig; da wir in den Störungsgliedern aber nur die beiden niedrigsten Potenzen von ϑ berücksichtigen, so hat man einfach

$$\xi^0{}_1 = c'\vartheta \cos(\psi + \mathfrak{A})$$
$$\eta^0{}_1 = c'\vartheta \sin(\psi + \mathfrak{A})$$

zu variiren nach ε, ε', η und α[1]. Setzt man in die entstehenden Gleichungen z. B. die durch den Fehler i bewirkten Variationen pag. 94. ein, so müssen sich – wie a priori klar ist — die Glieder $c' i \cos \mathfrak{A}$ und $c' i \sin \mathfrak{A}$ in ξ und η wieder fortheben.

Die Resultate der ersten Näherung stimmen mit Rücksicht auf die durch die Erdrotation bewirkte Drehung einer im Pendelkörper festen Ebene mit Hansen's Ergebnissen überein.

Von den Hauptgliedern der zweiten Näherung erscheint das Hansen'sche Störungsglied $\frac{1}{24}\omega\varepsilon\varepsilon' t$ der Bewegung der sogenannten Schwingungsebene bei uns verneunfacht — was auf ein Versehen von Hansen zurückzuführen ist.

---

1) Dabei ergeben sich genau die Ausdrücke von Hansen a. a. O. pag. 55. bis auf den hier hinzugefügten Factor c'.

[redacted]

Eine durch durch die cardanische Aufhängung erzeugte periodische Ungleichheit in der eben erwähnten Bewegung [1]) wird nur für verhältnissmässig grosse Werte von $\frac{C}{E}$, eine dadurch hervorgebrachte Veränderung der Schwingungsdauer wol niemals merklich sein. Die grösste Herabdrückung des Verhältnisses $\frac{C}{E}$ erscheint geboten.

Störungen, dadurch entstehend, dass die Achsen der Aufhängung sich nicht genau rechtwinklig schneiden, oder dass die bewegliche Achse mit den Achsen der grösseren Hauptträgsheitsmomente nicht genau in eine Ebene fällt, oder dass die Achse des kleinsten Trägheitsmomentes in der Nähe Schwerpunktes vorbei geht, ihn nicht enthält, haben sich nur völlig unmerklich er ergeben.. Der Umstand, dass an der Bewegung ein Körper von geringer Masse beteiligt ist, oder dass die Achsen der Aufhängung einen geringen Abstand haben, erzeugt periodische — vielleicht nicht unbeträchtliche — Variationen in der Bewegung der Schwingungsebene [1]), der letztere Umstand bringt aber auch eine der Zeit proportionale Aenderung derselben hervor, deren Wahrnehmbarkeit zweifelhaft bleibt, während beide Umstände die Schwingungsdauer modificiren.

Ein Unterschied zwischen den beiden grösseren Hauptträgheitsmomenten erzeugt periodische Störungen in der Bewegung der Schwingungsebene, die aber nur bei einiger Beträchtlichkeit des Fehlers zu beobachten sein dürften [2]).

Wegen einer durch das Vorhandensein einer geringen Neigung der festen Achse gegen die Horizontalebene erzeugten der Zeit proportionalen Variation der Bewegung der Schwingungsebene erscheint es vorteilhaft diesen Fehler weitest herabzudrücken und die genannte Achse von Westen nach Osten aufzulagern.

Einige durch Variation der Constanten gefundene sehr beträchtliche Störungen zweiter Ordnung [3]) lassen vermuten, dass die Art und Weise, in welcher jene Methode angewendet wurde, für eine weitere Behandlung des Problems nicht brauchbar sein wird.

---

1) Dieselbe ist eine Störung zweiter Ordnung (cf, pag. 70 f., 95 f,).

2) cf. die Bemerkung der vorigen Seite.

3) Es sind die in den Anmerkungen 1) dieser Seite betrachteten.

II.

Miscellen.

1.

Einige Bemerkungen über vollkommene Zahlen.

Der Aufsatz des Herrn Seelhoff: „Ueber vollkommene Zahlen, insbesondere aber die bis jetzt zweifelhaften Fälle $2^{40}(2^{41}-1)$ $2^{46}(2^{47}-1)$ und $2^{52}(2^{53}-1)$“ (Hoppe, Archiv. 2. Reihe, Band 2. 1855. S. 327. ff.) gab mir Veranlassung meine darauf bezüglichen Rechnungen aus dem Jahre 1872 wieder durchzusehen, und möchte ich mir erlauben, einige Bemerkungen an den bezeichneten Artikel anzuknüpfen.

Der Verfassser gibt

$$2^{41}-1 = 13767 . 164511353; \quad 2^{47}-1 = 2351 . 59862819377$$

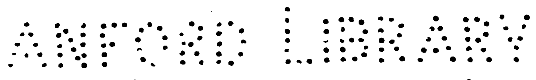
und

$$2^{53}-1 = 69431 . 129728784761.$$

Zunächst bemerke ich, dass hier der erste Factor von $2^{41}-1$ nicht 13767, sondern 13367 ist, was schon aus dem Umstande folgt, dass der in Frage stehende Factor die Form $2.41.y+1$ haben muss. Ferner fügt der Verfasser hinzu, dass in jedem Falle jeder der Factoren prim ist. Dem muss ich in Bezug auf den zweiten Factor $2^{53}-1$ widersprechen, denn es ist

$$129728784761 = 6361 . 20394401.$$

Mersenne sagt in Mersenni Cogitata physico-mathematica Parisiis 1644, praefatio generalis § XIX: Ubi fuerit operae pretium advertere



XXVIII numeros a Petro Bongo pro perfectis exhibitos, capite XXVIII libri de numeris, (der Titel des Buches lautet: De mystica numerorum significatione); es erschien in 10 Auflagen, (die erste 1583—84, die letzte 1684) non esse omnes perfectos, quippe 20 sunt imperfecti, adeout solos octo perfectos habeat, videlicet 6,28,496,8128,33550336, 8589869056, 137438691328 et 2305843008139952128 ... Porro numeri perfecti adeo rari sunt, ut undecim dumtaxat potuerint hactenus inveniri: hoc est alii tres a Bongianis differentes: neque enim ullus est alius perfectus ab illis octo nisi superes exponentem numerum 62, progressionis duplae ab 1 incipientis. Nonus enim perfectus est potestas exponentis 128 minus 1. Decimus, potestas exponentis 128 minus 1. Undecim denique potestas 258 minus 1, hoc est potestas 257 unitate decurtata, multiplicata per potestatem 256. etc.

Beweise für die im vorstehenden Citat gegebenen Behauptungen, sind mir in der mathematischen Litteratur nicht bekannt. Zwar stellt E. Ch. Catalan in seinen Mélanges mathématiques, Bruxelles Tom. I. 1885 p. 376. den Satz auf, dass, wenn $2^\lambda - 1 =$ einer Primzahl p ist, auch $2^p - 1$ wieder eine Primzahl ist; aber den Beweis bleibt er schuldig. Wäre diese Behauptung richtig, so würde allerdings folgen, dass $2^{127} - 1$ prim ist, da

$$2^7 - 1 = 127$$

eine Primzahl ist.

Um nun etwaige fernere hierauf bezügliche Rechnungen zu erleichtern, gebe ich den Wert von λ für diejenigen Zahlen $2^\lambda - 1$, welche ich bisher als zerlegbar gefunden habe; dies ist der Fall für $\lambda = 59, 73, 79, 83, 113, 131, 191, 233$. Für alle Zahlen $2^\lambda - 1$, für die Primzahlen $\lambda = 2$ bis $\lambda = 257$, erhält man daher folgende Zusammenstellung.

1) Als Primzahlen erwiesen sind die Zahlen:

$$2^2 - 1 = 2+1;\quad 2^3 - 1 = 2.3+1;\quad 2^5 - 1 = 2.5.(3)+1;$$
$$2^7 - 1 = 2.7.(3^2)+1;\quad 2^{13} - 1 = 2.13.(3^2.5.7)+1;$$
$$2^{17} - 1 = 2.17.(3.5.257)+1;\quad 2^{19} - 1 = 2.19.(3^3.7.73)+1;$$
$$2^{31} - 1 = 2.31.(3^2.7.11.151.331)+1.$$

2) Nach dem obigen Citat von Mersenne sollen ferner

$$2^{67} - 1,\quad 2^{127} - 1,\quad 2^{257} - 1$$

Primzahlen sein, was noch zu erweisen wäre.

3) Zerlegbar sind dagegen

$2^{11}-1 = 23.89 = (2.11+1)(2^3.11+1)$

$2^{23}-1 = 47.178481 = (2.23+1)(2^4.23.485+1)$

$2^{29}-1 = 1103.233.2089 = (2.29.19)+1)(2^3.29+1)(2^3.29.9+1)$

$2^{37}-1 = 223.616318177 = (2.37.3+1)(2^5.37.520539+1)$

$2^{41}-1 = 13367.164511353 = (2.41.163+1)(2^3.41.501559+1)$

$2^{43}-1 = 431.20408568497 = (2.43.5.+1)(2^4.43.29663617+1)$

$2^{47}-1 = 2351.59862819377 = (2.47.25+1)(2^4.47.79604813+1)$

$2^{53}-1 = 69431.6361.20394401$

$= (2.53.655+1)+(2^3.53.15+1)(2^5.53.12055+1$

$2^{59}-1 = 179951.p_{59} = (2.59.1525+1).p_{59}$

$2^{73}-1 = 439.p_{73} = (273.3+1).p_{73}$

$2^{79}-1 = 2687.p_{79} = (2.79.17+1).p_{79}$

$2^{83}-1 = 167p_{83} = (2.83+1).p_{83}$

$2^{113}-1 = 3391.p_{113} = (2.113.15+1).p_{113}$

$2^{131}-1 = 263.p_{131} = (2.131+1)p_{131}$

$2^{191}-1 = 383.p_{191} = (2.191+1).p_{191}$

$2^{233}-1 = 1399.p_{233} = (2.233.3+1).p_{233}$

4) Demnach bleibt noch für $\lambda = 61, 71, 89, 97, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 193, 199, 211, 223, 227, 229, 239, 241, 251$ zu untersuchen, ob $2^\lambda-1$ in Primfactoren zerfällt oder entgegen der Behauptung Mersenne's eine oder mehrere dieser Zahlen prim sind.

Ich bemerke übrigens, dass von $2^{37}-1$ an der zweite Factor p_α in ein oder dem andern Fall sehr wol selbst noch in Primfactoren zerfallen kann, doch erscheint mir eine dahin zielende Untersuchung bedeutungslos. Die unter 1) und 3) gegebenen Zahlen sind in der Form $2\lambda z+1$, resp. $(2\lambda z+1)(2^\alpha\lambda y-1)$ geschrieben. Versteht man nämlich unter z und y ungerade Zahlen, so muss jede Zahl $2^\lambda-1$ (λ ungerade Primzahl) von der Form $2\lambda z+1$ sein, und ist $2^\lambda-1 = p_1p_2p_3 \ldots$, so lässt sich leicht zeigen, dass einer und nur einer der Factoren p die Form $2\lambda z+1$ haben muss, während alle anderen Factoren von der Form $2^\alpha\lambda y+1$ sind, wo $\alpha > 1$ ist.

Ferner ist stets

$$2^{\lambda-1}-1 = \left(2^{\frac{\lambda-1}{2}}+1\right)\left(2^{\frac{\lambda-1}{2}}-1\right) \equiv 0 \mod \lambda$$

Ist also λ so beschaffen, dass sowol λ, als auch $\frac{\lambda-1}{2}$ prim sind, und

[redacted]

dass $2^{\frac{\lambda-1}{2}}+1$ nicht durch λ teilbar ist, so kann $2^{\frac{\lambda-1}{2}}-1$ keine Primzahl sein. Durch diese Schlüsse ergibt sich auf die einfachste Weise dass $2^{11}-1$, $2^{23}-1$, $2^{83}-1$, $2^{131}-1$, $2^{191}-1$ keine Primzahlen sein können.

Berlin, April 1886. G. Valentin.

2.

Ueber die Bestimmung der reellen Wurzeln trinomischer Gleichungen.

Das im zweiten 1885 erschienenen Teil dieses Journales, von Herrn Sanio angegebene Princip der Gleichungs-Auflösung durch Reihen bietet, soweit es sich um reelle Wurzeln handelt, in gewissen Fällen rechnerische Vorteile.

In Nachfolgendem möge die Anwendung dieses Principes auf die Bestimmung der reellen Wurzeln trinomischer Gleichungen dargetan werden, wobei nur diejenigen Fälle berücksichtigt sind, in denen positive Wurzeln vorhanden sind. Die negativen Wurzeln ergeben sich dann durch die Substitution

$$x = -z$$

Es kommen daher folgende Gleichungs-Formen in Betracht:

$$x^m + ax^n - b = 0 \qquad 1.$$

$$x^m - ax^n - b = 0 \qquad 2.$$

$$x^m - ax^n + b = 0 \qquad 3.$$

in denen m und n ganze positive, a und b positive Zahlen seien. $m > n$).

Erste Form.

$$x^m + ax^n - b - 0$$

Die gegebene Gleichung wird auf die Form

$$x = \left[\frac{b}{1+\frac{a}{x^{m-n}}}\right]^{\frac{1}{m}}$$

gebracht, und mittelst derselben die nachfolgende Reihe gebildet:

$$x_0 = c$$

$$x_1 = \left[\frac{b}{1+\frac{a}{x_0{}^{m-n}}}\right]^{\frac{1}{m}}$$

$$x_2 = \left[\frac{b}{1+\frac{a}{x_1{}^{m-n}}}\right]^{\frac{1}{m}}$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$x_p = \left[\frac{b}{1+\frac{a}{x_{p-1}{}^{m-n}}}\right]^{\frac{1}{m}}$$

in der

$$0 < c < \infty$$

und sämtliche Wurzelwerte positiv zu nehmen sind. (Letzteres gilt für sämtliche nachfolgenden Zahlenfolgen).

Diese Reihe strebt der gesuchten Wurzel als Grenzwert zu, was sich leicht ergibt, wenn man den Verlauf der beiden Functionen

$$y_1 = x$$

$$y_2 = \left(\frac{b}{1+\frac{a}{x^{m-n}}}\right)^{\frac{1}{m}} \qquad (1)$$

geometrisch darstellt.

Für $x = \infty$ ist

[redacted]

Ferner ist

$$y_2 = b^{\frac{1}{m}}$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{m-n}{m} \cdot \frac{y_1^{m+1}}{x^{m-n+1}}$$

d. h. für positive Werte stets positiv, woraus der Verlauf der Curve (1) zu ersehen.

Zweite Form.

$$x^m - ax^n - b = 0$$

Man benutzt die Gleichung

$$x = [ax^n + b]^{\frac{1}{m}}$$

und bildet die entsprechende Reihe mit beliebigem posit. Anfangswert. Die Brauchbarkeit dieser Reihe erhellt wiederum aus der geometrischen Darstellung der Functionen

$$y_1 = x$$

$$y_2 = (ax^n + b)^{\frac{1}{m}}$$

in welcher wieder auf den Verlauf der höheren Differentialverhältnisse keine Rücksicht genommen ist.

Dritte Form.

$$x^m - ax^n + b = 0$$

Im vorliegenden Falle ist die angegebene Methode nur dann vorteilhaft, wenn die beiden etwa vorhandenen Wurzeln sehr von einander verschieden sind. Anderenfalls convergiren die Reihen zu langsam. Für die beiden Wurzeln sind zwei verschiedene Reihen erforderlich.

Zur Bestimmung der kleineren Wurzeln bildet man unter Benutzung der Gleichung

$$x = \left(\frac{x^m + b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$$

die erwähnle Reihe, in der man

$$x_0 \overset{=}{<} \left(a \cdot \frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m-n}}$$

wählt.

Zur Bestimmung der zweiten Wurzel dient die Gleichung

$$x = (ax^n - b)^{\frac{1}{m}}$$

In der zugehörigen Reihe wählt man

$$\left(a \cdot \frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m}} < x_0 < a^{\frac{1}{m-n}}$$

Wendet man die beschriebene Methode beispielsweise auf die Gleichung

$$x^5 + x - 100 = 0$$

an, so findet man

$$x_0 = 2$$

setzend Folgendes:

$$x_1 = 2{,}481$$
$$x_2 = 2{,}4988$$
$$x_3 = 2{,}4992$$
$$x_4 = 2{,}499203.$$

Th. Baumgardt,
stud. electrotechn.

3.

Teilung einer Geraden nach dem goldenen Schnitt.

Die Gerade $AB = a$ ist gegeben. Man errichte auf ihr das Lot $BC = 2a$, halbire den Winkel BAC durch die Transversale AD; dann ist BD gleich dem grösseren Abschnitt des nach dem goldenen Schnitt geteilten AB.

Es verhält sich nämlich

[redacted]

also

$$BD : CD = AB : AC = 1 : \sqrt{5}$$

daher ist

$$BD : BC = 1 : 1 + \sqrt{5}$$

$$BD = \frac{2a}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, a$$

w. z. b. w.

Linz, April 1886.

M. Weidenholzer.

4.

Zur Summation endlicher Reihen von der Form $\Sigma k u_k$.

Bildet man aus den reciproken natürlichen Zahlen die Teilsummen

$$s_1 = 1,\quad s_2 = 1 + \tfrac{1}{2},\quad s_3 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3},\ \ldots\ s_n = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n},$$

so besteht die Beziehung

$$s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n = (n+1) s_n - n,$$

von der Herr Mansion gelegentlich Gebrauch macht [1]). Man kann dieselbe erhalten, indem man die Brüche, die die Summen auf der linken Seite bilden, in der Form

$$n.1 + (n-1)\tfrac{1}{2} + (n-2)\tfrac{1}{3} + \ldots + 2.\frac{1}{n-1} + 1.\frac{1}{n}$$

zusammenfasst und hierzu gliedweise die Identität

$$0 = 1.1 + 2.\tfrac{1}{2} + 3.\tfrac{1}{3} + \ldots + (n-1)\cdot\frac{1}{n-1} + n.\frac{1}{n} - n$$

addirt.

Dasselbe Verfahren wollen wir auf eine ganz beliebige Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = U_n$$

anwenden. Aus

---

1) „Sur la série harmonique et la formule de Stirling". Mathesis. I. S. 169, auch Messenger of Math. XI. S. 38.

$$
\begin{aligned}
U_1 &= u_1 \\
U_2 &= u_1 + u_2 \\
U_3 &= u_1 + u_2 + u_3 \\
&\vdots \\
U_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n
\end{aligned}
$$

folgt

$$U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n = nu_1 + (n-1)u_2 + (n-2)u_3 + \ldots + 2u_{n-1} + u_n,$$

und, wenn wir hier

$$u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \ldots + (n-1)u_{n-1} + nu_n$$

addiren und wieder subtrahiren, ergibt sich

$$U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n = (n+1)U_n - (u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \ldots + nu_n)$$

oder auch

$$\sum_1^n ku_k = (n+1)\sum_1^n u_k - \sum_1^n (u_1 + u_2 + \ldots + u_k) \qquad (1)$$

Die Summirung von Σku_k ist somit zurückgeführt auf die Summirung der einfachen u-Reihe und der summatorischen Function U_k derselben.

Die Formel ist übrigens ein specieller Fall des Abel'schen Satzes, wonach

$$\Sigma u_k v_k = \sum_1^{n-1} U_k(v_k - v_{k+1}) + U_n v_n$$

ist und aus dem sie für $v_{k=k}$ hervorgeht.

Anwendungen.

Es ist bekanntlich

$$(2) \quad \sum_1^n \sin kx = \frac{\sin \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{n+1}{2} x$$

$$\sum_1^n \cos kx = \frac{\sin \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{n+1}{2} x,$$

wie man z. B. finden kann, indem man die geometrische Reihe $\sum_1^n e^{kix}$ summirt und Reelles und Imaginäres trennt.

Sei nun $u_k = \sin kx$, so haben wir nach (1)

$$\sum_1^n k \sin kx = (n+1)\sum_1^n \sin kx - \sum_1^n U_k,$$

wobei

$$\sin\frac{x}{2}\, U_k = \sin\frac{kx}{2}\sin\frac{k+1}{2}x = \tfrac{1}{2}\left[\cos\frac{x}{2} - \cos\left(kx+\frac{x}{2}\right)\right],$$

also

$$2\sin\frac{x}{2}\sum_1^n U_k = n\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\,\Sigma\cos x + \sin\frac{x}{2}\,\Sigma\sin kx$$

st. Setzen wir für die Summen ihre Werte und multipliciren wir nochmals mit $2\sin\frac{x}{2}$, so folgt,

$$4\sin^2\frac{x}{2}\sum_1^n U_k = n\sin x - 2\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n+2}{2}x$$
$$= (n+1)\sin x - \sin(n+1)x.$$

Setzt man hier $n-1$ statt n und zieht das Resultat von dem eben erhaltenen Ausdruck ab, so entsteht

$$4\sin^2\frac{x}{2}\, U_n = \sin x - \sin(n+1)x + \sin nx.$$

Demnach ist

$$\text{(3a)}\quad \sum_1^n k\sin kx = (n+1\, U_n - \Sigma U_k$$
$$= \frac{(n+1)\sin nx - n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

Ebenso findet man für $u_k = \cos kx$ die Formel

$$\text{(3b)}\quad \sum_1^n k\cos kx = \frac{(n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x - 1}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

Beide Formeln lassen sich auch herleiten, indem man die Formeln (2) unter dem Summenzeichen nach x differentiirt.

Bildet man mit Hilfe der Formeln (3)

$$\cos y\,\Sigma k\sin kx + \sin y\,\Sigma k\cos kx$$

und

$$\cos y\,\Sigma k\cos kx - \sin y\,\Sigma k\sin kx,$$

so erhält man allgemeiner

$$\sum_1^k k\sin(kx+y) = \frac{(n+1)\sin(nx+y)-n\sin(\overline{n+1}y+y)-\sin y}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

(4)

$$\sum_1^n k\cos(kx+y) = \frac{(n+1)\cos(nx+y)-n\cos(\overline{n+1}x+y)\cos y}{4\sin^2}$$

woraus für $y = 0$ wieder die Formeln (3) entstehen.

Summation gleich hoher Potenzen der natürlichen Zahlen.

Wählen wir $u_k = k^p$, so geht (1) in

(5) $$\sum_1^n k^{p+1} = (n+1)\sum_1^n k^p - \sum_1^n (1+2^p+3^p+\ldots+k^p)$$

über, und diese Formel ermöglicht die successive Berechnung von Σk, Σk^2, Σk^3 u. s. w., ohne Zuhilfenahme der Theorie der arithmetischen Reihen höherer Ordnung.

Zunächst ist nämlich nach (5) für $p = 0$

$$\Sigma k = (n+1)n - \Sigma k,$$

also

$$\Sigma k = \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}.$$

Für $p = 1$ kommt

$$\Sigma k^2 = (n+1)\Sigma k - \sum_1^n\left(\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}\right) = \frac{(n+1)^2 n}{2} - \tfrac{1}{2}\Sigma k^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma k$$

also

$$3\Sigma k^2 = (n+1)^2 n - \frac{(n+1)n}{2} = \frac{(n+1)n}{2}(2n+2-1)$$

und endlich

$$\Sigma k^2 = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

$p = 2$ ergibt

$$\Sigma k^3 = (n+1)\Sigma k^2 - \sum_1^n\left(\frac{k^3}{3}+\frac{k^2}{2}+\frac{k}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)^2(2n+1) - \tfrac{1}{3}\Sigma k^3 - \frac{1}{12}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{12}n(n+1),$$

und man erhält

[redacted]

$$\Sigma k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = [\Sigma k]^2 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}.$$

Sei noch $p = 3$, so wird

$$\Sigma k^4 = (n+1)\Sigma k^3 - \Sigma\left(\frac{k^4}{4} + \frac{k^3}{2} + \frac{k^2}{2}\right),$$

woraus

$$\frac{5}{4}\Sigma k^4 = \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right)$$

und schliesslich

$$\Sigma k^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

folgt. Ebenso ergibt sich

$$\Sigma k^5 = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5}{12}n^4 - \frac{n^2}{12} = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1).$$

Formel (5) gestattet ferner einige Bemerkungen über die allgemeine Form der Potenzsummen.

Zunächst lässt sich durch Induction zeigen, dass $\overset{n}{\Sigma} k^p$ eine ganze rationale Function von n vom Grade $p+1$ ist. Denn sei dies für ein bestimmtes p der Fall, so dass

$$\sum_1^n k^p = (p)_{p+1}\,n^{p+1} + (p)_p\,n^p + \dots + (p)_1\,n + (p)_0$$

gesetzt werden kann, wobei die Coefficienten von p abhangen werden, so ist nach (5)

$$\Sigma k^{p+1} = (n+1)[(p)_{p+1}n^{p+1} + (p)_p n^p + \dots] - \Sigma[(p)_{p+1}k^{p+1} + (p)_p k^p + \dots],$$

also

$$(6)\quad [1+(p)_{p+1}]\Sigma k^{p+1} = (p)_{p+1}n^{p+2} + [(p)_{p+1} + (p)_p]n^{p+1} + \dots$$
$$- (p)_p\Sigma k^p - (p)_{p-1}\Sigma k^{p-1} - \dots,$$

und hier bilden die rechts stehenden Summen nach der Voraussetzung eine ganze rationale Function $(p+1)$ten Grades, so dass das erste Glied der rechten Seite den Grad des ganzen Ausdrucks bestimmt. Ist also Σk^p vom Grade $p+1$, so ist hiernach Σk^{p+1} vom Grade $p+2$; nun ist aber für $p = 0, 1, \dots$ die gemachte Annahme erfüllt, weil Σk^0 eine ganze, rationale Function von n vom Grade 1, Σk^1 eine eben solche vom Grade 2 ist; mithin gilt die behauptete Eigenschaft allgemein.

Was die Coefficienten betrifft, so sind dieselben im allgemeinen bekanntlich von der Bernoullischen abhängig [1]), indessen sind vier Eigenschaften derselben sofort zu übersehen.

1) Die Function enthält kein von n freies Glied. — Denn für $n = 0$ muss die Summe verschwinden, also $(p)_0 = 0$ sein.

2) Die Summe der Coefficienten ist gleich eins. — Dies folgt unmittelbar aus der Substitution $n = 1$.

3) Der Coefficient des höchsten Gliedes ist gleich dem reciproken Wert des Exponenten desselben.

Denn sei dies in Σk^p der Fall, so dass also

$$(p)_{p+1} = \frac{1}{p+1}$$

so ist der Coefficient von n^{p+2} in Σk^{p+1}, wie aus (6) ersichtlich,

$$\frac{(p)_{p+1}}{1+(p)_{p+1}} = \frac{\frac{1}{p+1}}{1+\frac{1}{p+1}} = \frac{1}{p+2}.$$

Die Voraussetzung trifft aber für $p = 0, 1, \ldots$ zu, gilt somit allgemein.

4) Der Coefficient des zweithöchsten Gliedes ist unabhängig von p und stets gleich $\frac{1}{2}$.

Ist nämlich in Σk^p dieser Coefficient $(p)_p = \frac{1}{2}$, so hat in Σk^{p+1} der Coefficient von n^{p+1} nach (6) den Wert

$$\frac{(p)_{p+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(p)_{p+1}}{1+(p)_{p+1}} = \frac{1}{2},$$

bleibt also unverändert. Nun ist für $p = 1, 2, \ldots$ jener Coefficient wirklich $\frac{1}{2}$, er behält also immer diesen Wert.

Mit Hilfe dieser 4 Regeln ist es leicht, die fraglichen Summen bis Σk^3 aufzustellen.

Berlin, im Juni 1886.

Dr. Heinrich Simon.

1) Man sehe z. B. die Arbeit von Arndt, Crelle Journ. Bd. 31. S. 249.

III.

Die Modulargleichungen der Galois'schen Moduln der 2. bis 5. Stufe.

Von

Georg Friedrich.

Einleitung.

Die nachfolgenden Untersuchungen auf dem Gebiete der elliptischen Modulfunctionen beschäftigen sich mit der Aufstellung der Modulargleichungen für diejenigen ausgezeichneten Hauptmoduln der ϱten Stufe, welche nur bei den *modulo* ϱ zur Identität congruenten Substitutionen ihres Argumentes ω ungeändert bleiben. Moduln dieser Art existiren nur bis einschliesslich der fünften Stufe, und zwar sind es die von anderer Seite her wohlbekannten: das Doppelverhältniss, die Tetraederirrationalität, die Oktaederirrationalität und die Ikosaederirrationalität. Da diese vier Hauptmoduln sich bei linearen ω-Substitutionen selbst linear substituiren, so hat infolgedessen die Modulargleichung die Eigenschaft, in sich überzugehen, wenn der ursprüngliche und der transformirte Modul gleichzeitig gewissen linearen Substitutionen unterworfen werden. Von dieser Eigenschaft ausgehend kann man die zugehörigen Modulargleichungen in der Weise aufstellen, dass man zunächst untersucht, wie Ausdrücke dieser Substitutionseigenschaft im allgemeinen gebaut sein müssen; zur Aufstellung der fertigen Modulargleichung hat man dann nur noch wenige Zahlencoefficienten auszurechnen, was durch Einsetzen der von anderer Seite her gleichfalls bekannten, nach Potenzen von $q = e^{i\pi\omega}$ fortschreitenden Reihen für die Moduln ohne principielle Schwierigkeit geschieht.

Dieser Ansatz rührt von Herrn Professor **Klein** her, dem ich die Anregung zu diesen Untersuchungen verdanke, und ist von ihm in seinem Aufsatze „Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen" (Mathem. Annalen Band XVII, Seite 69) im November 1879 zur Sprache gebracht worden. Die folgende Untersuchung, die sich die wirkliche Durchführung dieses Ansatzes zum Ziel gesteckt hat, gliedert sich in drei Teile. Im ersten Teil werden über die zu betrachtenden Moduln zunächst diejenigen Sätze zusammengestellt respective entwickelt, welche für die Theorie der zugehörigen Modulargleichungen nötig sind, und wird damit eine allgemeine Orientirung über die in Betracht kommenden Functionen gegeben. Zunächst wird die Existenz dieser und nur dieser vier ausgezeichneten Hauptmoduln aus dem Geschlecht des Fundamentalpolygones nachgewiesen. Darauf wird die Abhängigkeit der Moduln vom Hauptmodul der ersten Stufe, der absoluten Invariante $J(\omega)$ durch fertige Gleichungen angegeben. Diese Gleichungen haben die Eigenschaft, bei gewissen linearen Substitutionen in sich überzugehen, und diese Substitutionen sind, auf der Zahlenkugel interpretirt, Rotationen, welche gewisse Figuren in sich überführen, die mit den regulären Körpern in enger Beziehung stehen. Dadurch gewinnt die Theorie dieser Moduln Anschluss an die Theorie der Drehungen der regulären Körper, wie sie von Herrn Professor **Klein** in einer Reihe von Aufsätzen in den mathematischen Annalen, besonders im IX. Bande („Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich") und dann neuerdings in dem Buche „Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade" dargelegt ist, welchem letzteren daher ein Teil der zur Verwendung gekommenen Formeln entnommen ist. Schliesslich werden dann noch im ersten Teile die linearen Substitutionen der Moduln und ihre Zuordnung zu den linearen ω-Substitutionen festgelegt. — Im zweiten Teile werden die besprochenen Moduln einer Transformation n. Ordnung unterworfen, wobei der Transformationsgrad n stets teilerfremd zur Stufe ϱ angenommen wird, da sich dadurch die Untersuchungen wesentlich vereinfachen, und werden dann die zugehörigen Modulargleichungen hinsichtlich Grad, Irreducibilität und Vertauschbarkeit des ursprünglichen und des transformirten Moduls untersucht. Weiter besitzt die Modulargleichung eine gewisse Anzahl simultaner Substitutionen des ursprünglichen und des transformirten Moduls, die die Gleichung in sich überführen, und wird dann weiter die Zuordnung dieser Substitutionen festgestellt. Hieran schliesst sich die Untersuchung der Ausdrücke, welche beide Moduln enthalten und bei den simultanen Substitutionen derselben in sich übergehen, eine Fragestellung, die durch Einführung homogener Veränderlicher sofort aufs Gebiet der doppeltbinären Formen führt. Durch einfache Schlüsse und Verwendung weniger Sätze der **Inva-**

[redacted]

riantentheorie gelingt es, für alle in Betracht kommenden Fälle nachzuweisen, dass die Modulargleichung aus einer endlichen Anzahl doppeltbinärer Formen rational zusammensetzbar ist. — Nachdem dieser Nachweis geführt ist, wird im dritten Teile die Untersuchung, entsprechend den vier Moduln, in vier parallel nebeneinandergehende Untersuchungen gespalten, in denen für jeden dieser Moduln ausgerechnete Formeln fürs volle Formensystem, und schliesslich fertige Modulargleichungen für die niedersten Transformationsgrade angegeben werden.

Die hier gefundenen Resultate finden sich bereits mitgeteilt in einer Note des Herrn Professor Klein „Neue Untersuchungen über elliptische Modulfunctionen der niedersten Stufen" (Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Sitzung am 2. März 1885, Seite 79 ff.) Zugleich spreche ich noch an dieser Stelle meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Klein, meinen lebhaftesten Dank aus für die vielen Anregungen und Förderungen in meinen Studien, und insbesondere bei der vorliegenden Untersuchung.

Georg Friedrich.

Capitel I.

Galois'sche Hauptmoduln der zweiten bis fünften Stufe.

§ 1.

Die modulo ϱ zur Identität congruenten Substitutionen und ihre Fundamentalpolygone.

Die modulo ϱ zur Einheit congruenten ganzzahligen linearen Substitutionen der Determinante 1

$$\omega' = \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}, \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

worin α, β, γ, δ Ganzzahlen sein sollen, die den Congruenzen genügen

$$\alpha \equiv \delta \equiv 1 \pmod{\varrho}, \qquad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{\varrho}$$

wofür im Folgenden auch kurz

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta \equiv 1 : 0 : 0 : 1 \pmod{\varrho}$$

geschrieben werden soll, bilden bekanntlich eine in der Gesamtheit der linearen ganzzahligen Substitutionen der Determinante 1 enthaltene ausgezeichnete Untergruppe vom Index

$$P = \frac{\varrho^3}{x} \Pi\left(1 - \frac{1}{\sigma^2}\right) \tag{1}$$

wo Π über alle in ϱ enthaltenen Primzahlen σ zu erstrecken ist, und $x = 1$ für $\varrho = 2$, sonst $x = 2$.

Die Gesamtheit der linearen ganzzahligen Substitutionen der Determinante 1 gibt Veranlassung zu einer Einteilung der ω-Ebene in Felder, die die ganze Ebene einfach und lückenlos überdecken, und deren jedes sich in jedes andere durch eine der ebenerwähnten Substitutionen überführen lässt. Diese Felder sind dadurch noch nicht völlig bestimmt und kann man als solche z. B. Figuren annehmen, welche aus zwei mit einer Seite aneinanderstossenden Kreisbogendreiecken mit Winkeln $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, 0 bestehen, so dass sich die Ecken mit $\frac{\pi}{3}$ an den Stellen

$$\frac{\gamma + \delta\varrho}{\alpha + \beta\varrho} \left(\varrho = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\right), \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

die Ecken mit $\frac{\pi}{2}$ an den Stellen

$$\frac{\gamma + \delta i}{\alpha + \beta i} \left(i = \sqrt{-1}\right)$$

endlich die mit 0 auf der reellen Axe befinden[1]). Ebenso gilt auch jede in der Gesamtheit der linearen Substitutionen enthaltene Untergruppe, vom Index μ — also insbesondere auch die Eingangs erwähnte ausgezeichnete Untergruppe der modulo ϱ zur Identität congruenten Substitutionen — zu einer Gebietseinteilung Veranlassung, die so angeordnet werden kann, dass jedes Feld derselben, jedes sogenannte Fundamentalpolygon der Untergruppe, aus je μ Feldern der ersterwähnten Haupteinteilung besteht. Die μ Felder solch eines Polygones gehen aus irgend einem Felde der ω-Ebene durch ebensoviel Substitutionen hervor, von denen keine aus einer andern durch eine der Gruppe angehörige Substitution abgeleitet werden kann. Bei der im Folgenden ausschliesslich zu betrachtenden Gruppe der modulo

---

1) Ueber diese grundlegenden Sätze aus der Theorie der Modulfunctionen vergleiche man etwa Herrn Dedekind's „Schreiben über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen", Borchardt's Journal, t. 83. p. 265 ff.), ferner Herrn Hurwitz' Aufsatz: „Grundlagen zu einer independenten Theorie der Modulfunctionen und der zugehörigen Multiplicatorgleichungen". (Mathem. Annalen XVIII, p. 528 ff.), endlich vor allem Klein „Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen, Annalen XVII, p. 62 ff.

[redacted]

ϱ zur Identität congruenten Substitutionen bilden sie insbesondere ein „volles System modulo ϱ incongruenter Substitutionen"

$$\omega' = \frac{\gamma_k + \delta_k \omega}{\alpha_k + \beta_k \omega}$$

bei denen für kein Wertepaar kk' eine Relation

$$\alpha_k : \beta_k : \gamma_k : \delta_k \equiv \alpha_{k'} : \beta_{k'} : \gamma_{k'} : \delta_{k'} \pmod{\varrho}$$

existirt. Solcher Wertesysteme gibt es natürlich gerade P.

Die Kanten, welche das Fundamentalpolygon begrenzen, hangen vermittels der Substitutionen der Untergruppe paarweise zusammen. Durch stetiges Deformiren der Fläche im Sinne der *Analysis situs* und Zusammenfügen der entsprechenden Kanten erhält man eine geschlossene Fläche von gewissem Geschlecht, dem Geschlecht der Untergruppe [1]). Das Geschlecht p des Fundamentalpolygones für die modulo ϱ zur Einheit congruenten Substitutionen, des sog. Fundamentalpolygones der ϱten Stufe lässt sich mittels des Euler'schen Polyedersatzes

$$O + E = K - 2(p - 1)$$

bestimmen, worin O die Zahl der Felder (Ebenen) des Polyeders, E die der Eckpunkte, K die der Kanten bedeutet, und sich diese Zahlen auf die ursprüngliche Einteilung des Polygones in P Felder beziehen. O ist also gleich P zu setzen. Diese P Felder (Doppeldreiecke) ergeben $K = \frac{3}{2} P$ Kanten. Bei der Bestimmung von E beachte man, dass wenn im Fundamentalpolygon an einer Stelle $\omega = \omega_0$ τ Felder zusammenhangen, dann an jeder äquivalenten Stelle

$$\omega' = \frac{\gamma + \delta \omega_0}{\alpha + \beta \omega_0}$$

je ebensoviel Felder zusammenhangen müssen. Denn üben wir zunächst eine lineare Substitution auf die ω-Ebene aus, so bedeutet sie auf der, durch das Deformiren erhaltenen, geschlossenen Fläche, (die wir uns vielleicht in der bekannten Weise als eine Kugel mit p Henkeln vorstellen) zufolge der einfachen, lückenlosen Ueberdeckung der ω-Ebene mit Fundamentalpolygonen, und da wir es oben mit einer ausgezeichneten Untergruppe zu tun haben, eine ganz bestimmte (d. h. eindeutige) Verschiebung und Vertauschung der Felder, so dass jedem Feld ein bestimmtes neues Feld entspricht und die gegenseitige Lage der Felder gegeneinander eben infolge der Natur der ausgezeichneten Untergruppe erhalten bleibt. Hangen also an einer

---

1) Annalen XVII, p. 65. Citate mit blosser Angabe der Seitenzahl und Bandzahl beziehen sich auf die Klein'schen Arbeiten.

Stelle τ Felder zusammen, so gehen diese τ Felder in τ andere über, die an einer Stelle, und geschlossen, zusammenhangen, so dass an dieser neuen Stelle nicht mehr und nicht weniger als τ Felder zusammenstossen können. Wenn wir jetzt die Zahl E bestimmen wollen, so ergeben die P Dreiecke mit Winkeln $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$, 0 erstlich $2P$ Ecken mit Winkel $\frac{\pi}{3}$. Da von diesen je sechs in einem Punkte zusammenstossen, wie sich leicht aus der Betrachtung des Fundamentalpolygons ergibt, so liefern diese $2P$ Dreieckszipfel insgesamt $\frac{1}{3}P$ Punkte. Die noch übrigen P Ecken gruppiren sich in Cyklen zu ϱ; denn wenn $\omega = i\infty$ ein Eckpunkt des Fundamentalpolygones ist, so hangen dort wegen der Substitution

$$\omega' = \omega + \varrho (\equiv 1 \bmod \varrho)$$

ϱ Dreiecke mit der, dem Winkel 0 entsprechenden Ecke im Cyklus zusammen, und ergeben sich so $\frac{P}{\varrho}$ Punkte, so dass E gleich $\frac{P}{3} + \frac{P}{\varrho}$ wird. Daher ist

$$2(p-1) = K - O - E = \tfrac{3}{2}P - P - \tfrac{1}{3}P - \frac{1}{\varrho}P,$$

$$p = 1 + \frac{\varrho - 6}{12\varrho} P.$$

Ist ϱ Primzahl, also

$$P = \frac{\varrho^3}{x}\left(1 - \frac{1}{\varrho^2}\right),$$

so wird für $\varrho > 2$

$$p = \frac{(\varrho+2)(\varrho-3)(\varrho-5)}{24}$$

und dies ist null für $\varrho = 3$ und $\varrho = 5$. Ist ϱ nicht Primzahl, so wird

$$p = 1 + \frac{\varrho^2(\varrho - 6)}{24} \Pi\left(1 - \frac{1}{\sigma^2}\right),$$

und dies ist für $\varrho \geqq 6$ sicher grösser als null. $\varrho = 4$ ergibt, wie leicht zu verificiren, $p = 0$, ebenso noch $\varrho = 2$.

Das Fundamentalpolygon für die modulo ϱ zur Einheit congruenten Substitutionen hat also nur in den Fällen $\varrho = 2, 3, 4, 5$ das Geschlecht Null.

[redacted]

§ 2.

Die zugehörigen Hauptmoduln der 2. bis 5. Stufe.

Wenn das Fundamentalpolygon das Geschlecht Null hat, so kann man stets eine einfachste Function annehmen, die im gesamten Fundamentalpolygon jeden Wert nur einmal annimmt[1]). Diese Function bezeichnet man als einen zur Untergruppe gehörigen Hauptmodul. Sei m solch ein Hauptmodul, so ist natürlich jede lineare Function desselben $m' = \frac{am+b}{cm+d}$ (wobei a, b, c, d nicht reelle ganze Zahlen zu sein brauchen), ein ebenso berechtigter Hauptmodul, und da m' von drei willkürlichen Constanten (den Verhältnissen $a:b:c:d$) abhängt, so kann man m', und somit dem bei der Betrachtung zu Grunde zu legenden Hauptmodul noch an drei bestimmten Stellen des Fundamentalpolygones beliebige Werte vorschreiben. Als Function von ω betrachtet, bleibt der Hauptmodul bei allen zur Untergruppe gehörigen ω-Substitutionen ungeändert. Die Moduln, welche zu der ausgezeichneten Untergruppe der *modulo* ϱ zur Identität congruenten Substitutionen gehören, bezeichnet man aus einem später noch anzuführenden Grunde als Galois'sche Moduln. Galois'sche Hauptmoduln existiren also nur bis einschliesslich für die fünfte Stufe.

Alle Functionen von ω, welche bei den nämlichen Substitutionen ungeändert bleiben, und im Fundamentalpolygon keine wesentlichen Singularitäten zeigen, drücken sich rational durch die zu dieser Substitutionsgruppe gehörigen Hauptmoduln aus. Insbesondere ist der Hauptmodul J, der bei allen ω-Substitutionen ungeändert bleibt, durch jeden Galois'schen Hauptmodul der ϱ ten Stufe rational darstellbar. ($J(\omega)$ ist bekanntlich die absolute Invariante des elliptischen Integrals erster Gattung mit dem Periodenverhältniss ω und identisch mit der Valenz des Herrn Dedekind[2])). J nimmt in jedem der P Felder des Fundamentalpolygones jeden Wert je einmal an, jedem Wert J entsprechen also P Punkte des Polygones der ϱ ten Stufe, also auch P Werte des Hauptmoduls m, der etwa, um die Ideen zu fixiren, so festgelegt sei, dass den drei Werten ω_0, ω_0', ω_0'' die Werte m_0, m_0', m_0'' von m entsprechen. Umgekehrt gehört zu jedem Werte m ein Wert J und besteht daher zwischen m und J eine Gleichung von der Form

$$J.\varphi(m)+\psi(m)=0,$$

1) Vergl. Annalen XVII, p. 64.

2) Vergl. Annalen XIV, p. 112, 120. XVII, p. 65 und Dedekind Crelle's Journal t. 83, pg. 274.

worin φ und ψ ganze rationale Functionen Pter Ordnung von m bedeuten. Diese Gleichung muss für die zu $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ äquivalenten Werte ω, d. h. für $J = 0$ lauter dreifache Wurzeln m ergeben. Denn nähert sich J dem Werte null, so rücken die entsprechenden Punkte ω zu dreien in die zu $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ äquivalenten Punkte zusammen, d. h. werden je drei der zu einem bestimmten Werte J gehörigen Werte m einander gleich. Ebenso sieht man ein, dass diese Gleichung für $J = 1$ lauter Doppelwurzeln und für $J = \infty$ ($\varphi = 0$) lauter ϱ fache Wurzeln ergeben muss. Diese Eigenschaften zusammenfassend' kann man daher die zwischen J und m bestehende Gleichung in der Form schreiben

$$J : (J-1) : 1 = F_1(m)^3 : F_2(m)^2 : F_3(m)^\varrho \qquad (2)$$

F_1, F_2, F_3 sind darin ganze Rationalfunctionen der Ordnungen $\frac{1}{3}P$, $\frac{1}{2}P$, $\frac{1}{\varrho}P$ zwischen denen die Identität bestehen muss

$$F_1^3 = F_2^2 + F_3^\varrho$$

Diese Gleichung (2) hat eine wesentliche Eigenschaft, welche ein Mittel an die Hand gibt, die Functionen von F_1, F_2, F_3 für die verschiedenen Stufen aufzustellen.

Durch diese Gleichung wird nämlich eine conforme Abbildung der P-blättrigen J-Ebene auf die einblättrige m-Ebene veranlasst. Die Blätter der ersteren hangen bei $J = 0$ in Cyklen zu 3, bei $J = 1$ zu je 2, bei $J = \infty$ in Cyklen zu je ϱ Blättern zusammen. Weitere Verzweigungen sind nicht möglich, da sonst das Geschlecht der Fläche nicht null sein könnte. Die J-Fläche ist also regulär verzweigt, die zu einem Werte J gehörigen P Werte m stellen die P Functionen dar, die in den J-Ebenen gleichverzweigt sind, sich also rational durcheinander darstellen. Da sich jeder Zweig durch jeden andern und umgekehrt rational darstellt, so kann diese Abhängigkeit nur linear sein, d. h. die einzelnen P Functionen m hangen mittels linearer Substitutionen zusammen. Diese linearen Substitutionen bilden eine Gruppe von P Operationen (die identische Operation $m' = m$ mitgezählt). Da bei diesen Substitutionen der Wert von J nicht geändert wird, so folgt:

Die Gleichung (2) geht bei P linearen Substitutionen des m in sich über.

Da weiter jede lineare (ganzzahlige) ω-Substitution zwar den Wert J ungeändert lässt, den Wert m aber im allgemeinen ändert, so folgt:

Die Galois'schen Hauptmoduln der 2. bis 5. Stufe substituiren sich linear, wenn ihr Argument ω ganzzahligen linearen Substitutionen der Determinante 1 unterworfen wird.

§ 3.

Weitere Discussion und Aufstellung der Definitionsgleichungen für die zu betrachtenden Hauptmoduln.

Um einen weiteren Aufschluss über die Gleichung (2) zu erhalten, betrachten wir die durch sie hervorgerufene conforme Abbildung der P-blättrigen J-Ebene auf die einblättrige m-Fläche. Diese Abbildung ist überall conform, mit Ausnahme der $J = 0$, 1, ∞ entsprechenden Stellen der m-Ebene, deren Werte m sich aus $F_1(m) = 0$, respective $F_2 = 0$ oder $F_3 = 0$ ergeben. Zerschneiden wir jetzt die J-Ebene längs der reellen Axe in P positive und ebenso viel negative Halbblätter, und denken uns etwa die ersteren schraffirt, so haben wir in der m-Ebene eine Einteilung in P schraffirte und ebensoviel nicht schraffirte Felder. Die Begrenzungslinien derselben müssen im allgemeinen stetig verlaufen, d. h. dürfen keine Ecken zeigen, mit Ausnahme der $J = 0, 1, \infty$ entsprechenden Stellen, an denen sich Ecken mit den Winkeln $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{\varrho}$ bilden.

Nun geht Gleichung (2) bei P linearen Substitutionen des m in sich über. Dabei werden die Werte J erhalten, die Blätter der J Ebene jedoch vertauscht. Für die m-Ebene bedeuten diese linearen Substitutionen lineare Transformationen, bei denen die P schraffirten Felder der Gebietseinteilung ineinander übergeführt, untereinander vertauscht werden; ebenso werden natürlich die nichtschraffirten Felder vertauscht. Diese Vertauschungen bilden ebenso, wie die linearen Transformationen von Gleichung (2) in sich, eine Gruppe.

Interpretiren wir jetzt die Werte von m auf der Zahlenkugel, so bedeuten die linearen Transformationen Rotationen um die beiden bei der betreffenden Transformation festbleibenden Punkte, Rotationen der Kugel um die Verbindungsgerade dieser beiden Punkte als Axe. Sollen eine Anzahl solcher Rotationen eine Gruppe bilden, so müssen sich die Axen derselben in einem Punkte des Kugelinneren schneiden [1]). Durch eine lineare Transformation der Kugel — und diese

1) Annalen IX, pg. 186 ff.

ist irrelevant, da ja eben m noch linearen Transformationen beliebig unterworfen werden kann — kann man dann noch erreichen, dass der gemeinsame Axenschnittpunkt in den Kugelschnittmittelpunkt fällt.

Die Substitutionen von Gleichung (2) in sich bedeuten daher, auf der Zahlenkugel interpretirt, Rotationen der Kugelfläche um centrale Axen.

Bei diesen Rotationen wird jedes Feld in ein congruentes übergeführt, d. h. die P schraffirten Felder der Kugeleinteilung sind unter sich congruent, und ebenso die P nicht schraffirten.

Was die gegenseitige Lage dieser Felder betrifft, so folgt aus der regulären Verzweigung der J-Ebene, dass an den $F_1(m) = 0$ entsprechenden Stellen abwechselnd je drei schraffirte und ebensoviel nicht schraffirte Felder im Cyklus zusammenhangen, ebenso an den $F_2(m) = 0$ entsprechenden Ecken 2 schraffirte und 2 nicht schraffirte mit Winkeln $\frac{\pi}{2}$, endlich an den Stellen $F_3(m) = 0$ je 2 Felder.

Jetzt greife man eines dieser dreieckigen Felder heraus, etwa ein der positiven J-Halbebene entsprechendes (schraffirtes) und verbinde die drei Ecken durch Hauptkreisbögen. Dann lässt sich stets, und zwar, wie Herr Schwarz gezeigt hat[1]), mittels eines gewissen Quotienten zweier hypergeometrischen Reihen, der mit s bezeichnet sei, die positive J-Halbebene auf dieses Kreisbogendreieck auf eindeutige Weise conform abbilden, so dass den Punkten $J = 0, 1, \infty$ gerade die Ecken des Dreiecks entsprechen. In den durch Spiegelung des Dreiecks an den Seiten erhaltenen symmetrischen Dreiecken, die natürlich dieselben Winkel tragen, nimmt dann J vermöge derselben conformen Abbildung jeden der negativen J Halbebene angehörigen Wert einmal an, d. h. es wird die gesamte J-Ebene auf ein Doppeldreieck abgebildet. Durch diesen Spiegelungsprocess kann die Function $s(J)$ über das Doppeldreieck hinaus weiter analytisch fortgesetzt werden.

Wir haben nun nur noch einzusehen, dass die Fortsetzung der Function s durch Spiegelung an den Seiten der Kreisbogendreiecke identisch ist mit der Fortsetzung der Function $m(J)$ über die reelle J-Axe durch Spiegelung, d. h. haben einzusehen, dass die Felder der

1) Ueber diejenigen Fälle, in denen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres 4. Argumentes darstellt. (Crelle's Journal t. 75, pg. 311).

Kugeleinteilung Kreisbogendreiecke sind. Hätte die Gleichung (2) lauter reelle Coefficienten, so wäre das selbstverständlich, da dann unter den Begrenzungslinien der Kugelfelder der der reellen m-Axe entsprechende Hauptkreis ist, (denn reellen Werten m entsprechen dann reelle Werte J) und daher infolge der Kugelrotationen alle Seiten der Kugelfelder Kreisbogendreiecke sind.

Vervielfältigen wir jetzt das ebenbeschriebene Kreisbogendreieck durch die P Rotationen, welche die Felder der ursprünglichen Gebietseinteilung ineinander überführten, so entsteht auf der Kugel ein Netz von P Dreiecken. Diese mögen die Winkel α, β, γ haben, entsprechend den Stellen, wo die dreieckigen Felder die Winkel $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{\varrho}$ aufweisen; dann müssen die Zwischenräume zwischen den entsprechenden Dreieckszipfeln die Winkel $\frac{2\pi}{3} - \alpha$, $\pi - \beta$, $\frac{2\pi}{\varrho} - \gamma$ haben zufolge der Periodicität der Kugeldrehungen, welche den betreffenden Punkt festlassen. Die Zwischenräume zwischen den Dreiecken entsprechenden nicht schraffirten Gebieten der ersten Kugeleinteilung, und müssen untereinander congruent sein, da sie durch die Kugelrotationen gleichfalls auseinander hervorgehen, und sind der Zahl nach gleichfalls P. Sie sind sicher Kreisbogendreiecke, da die Winkel $\frac{2\pi}{3} - \alpha$, $\pi - \beta$, $\frac{2\pi}{\varrho} - \gamma$ je P mal auftreten, und ausser diesen $3P$ Winkeln keine weiteren für die P congruenten Kreisbogenpolygone der Zwischenräume vorhanden sind. Da weiter die Seiten dieser Zwischendreiecke gleich denen der Dreiecke mit den Winkeln α, β, γ sein müssen, so ist das nicht anders möglich, als so, dass die Zwischendreiecke dieselben Winkel haben, wie die ersteren Dreiecke, d. h. die Winkel $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{\varrho}$. Die Zwischendreiecke sind den anderen Dreiecken natürlich nicht congruent, sondern symmetrisch. Wir erhalten also dieselbe Kugeleinteilung, wenn wir das erste angenommene Kreisbogendreieck, das die Winkel $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{\varrho}$ hat, durch die P Rotationen vervielfältigen, oder, wenn wir durch Spiegelung die Function s fortsetzen. Da die $2P$ durch Spiegelung erhaltenen Dreiecke die Kugel lückenlos überdecken, so bildet die Function s die P-blättrige J-Ebene conform und eindeutig auf die einfach überdeckte Kugel ab. Jedem Punkte der J-Ebene entspricht ein Punkt s und ebenso ein Punkt m auf der Kugel, d. h. jedem Zahlenwerte s entspricht ein Wert m und umgekehrt jedem Werte m ein Wert s. Daher müssen m und s durch eine bilineare Gleichung verbunden sein, und wir können statt m ebensogut auch s als den

Galois'schen Modul der ϱten Stufe betrachten. (Da übrigens s so gewählt werden kann, dass in den drei Ecken eines Dreiecks $m = s$ wird, so sind m und s sogar direct identisch). Hieraus folgt:

Durch Gleichung (2) werden die $2P$ Halbblätter der JEbene auf $2P$ congruente resp. symmetrische Dreiecke der Zahlenkugel abgebildet.

In der Zahlenebene für m erhält man eine Gebietseinteilung in $2P$ Kreisbogendreiecke', die durch Spiegelung (Transformation mittels reciproker Radien) an den Seiten auseinander hervorgehen. Durch die Substitutionen, die Gleichung (2) in sich überführen, werden diese Felder untereinander vertauscht.

Wir beachten noch, dass jeder Kugelkreis, von dem ein Stück bei dieser Einteilung zur Verwendung kommt, vollständig auf der Kugel zur Einteilung benutzt wird, da an jeder Ecke nur Winkel der nämlichen Grösse auftreten, und zu jedem der dort zusammenstossenden Kreisbögen ein anderer gefunden werden kann, der mit ihm den Winkel π bildet. Diese Kreise auf der Kugel sind Bilder der reellen Axe der J-Ebene.

Die Einteilung der Kugel in die $2P$ Dreiecke wird viel übersichtlicher, wenn wir die Dreiecke in gewisser Weise zusammenfassen. Greifen wir nämlich die Punkte heraus, an denen je 6 Dreiecke $\left(\text{mit Winkel } \frac{\pi}{3}\right)$ zusammenstossen, so vereinigen sich diese 6 Dreiecke zu einem grösseren, gleichseitigen sphärischen Dreiecke mit den drei Winkeln $\frac{2\pi}{\varrho}$. Denn zunächst setzt sich an die dem Winkel $\frac{\pi}{\varrho}$ gegenüberliegende Seite ein symmetrisches Dreieck an, und diese beiden bilden ein gleichschenkliges Dreieck mit den Winkeln $\frac{\pi}{\varrho}, \frac{\pi}{\varrho}, \frac{2\pi}{3}$, und solcher Dreiecke stossen in jeder Ecke mit Winkel $\frac{2\pi}{3}$ je drei zusammen und bilden eben das gleichseitige Dreieck mit den Winkeln $\frac{2\pi}{\varrho}$. Auf diese Weise erhalten wir eine neue Kugeleinteilung in $\frac{1}{3}P$ gleichseitige, congruente Dreiecke, von denen in jeder Ecke je ϱ zusammenstossen. Bei der dritten Stufe erhalten wir auf diese Weise aus den 24 Dreiecken mit Winkeln $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ zwei verschiedene vollständige Einteilungen, die die Kugel einfach, aber vollständig bedecken.

Im Falle $\varrho = 2$ erhalten wir zwei congruente Dreiecke mit Winkeln π, π, π, d. h. zwei Halbkugeln, die in je sechs congruente Teile durch die Kreisbögen geteilt sind, die von den Polen des die Halbkugeln trennnenden Hauptkreises unter Winkeln von $\frac{\pi}{3}$ gegeneinander geneigt ausgehen. Von den sechs äquidistanten Aequatorpunkten betrachte man drei um $\frac{2\pi}{3}$ entfernte als Eckpunkte des Dreiecks; sie sind durch $F_3(m) = 0$ bestimmt. Die drei zwischenliegenden Aequatorpunkte haben die Bedeutung der Seitenmitten und sind durch $F_2(m) = 0$ bestimmt, endlich die Pole sind durch $F_1(m) = 0$ gegeben.

In den Fällen $\varrho = 3, 4, 5$ haben wir auf der Kugel respective 4, 8, 20 congruente Dreiecke, von denen an jeder Ecke gerade 3, 4, respective 5 zusammenstossen, und es ist nicht schwer einzusehen, dass solch eine Kugeleinteilung mit der Kugeleinteilung identisch sein muss, die man erhält, wenn man ein reguläres Tetraeder, respective Oktaeder oder Ikosaeder, central auf die umbeschriebene Kugel projicirt. Zugleich erkennt man, da die Eckpunkte dieser Einteilung denjenigen Stellen der ursprünglichen Einteilung entsprechen, wo Dreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{\varrho}$ zusammenstiessen, dass die Ecken der obenerwähnten regulären Körper durch $F_3(m)$ gegeben sind. $F_2(m)$ verschwindet an den Stellen, wo der Winkel $\frac{\pi}{2}$ auftritt, d. h. ergibt, gleich Null gesetzt, die Kantenmitten der regulären Körper und endlich $F_1(m) = 0$ stellt die Flächenmitten oder präciser die Centralprojectionen der Flächenmitten unserer regulären Körper auf die Kugel dar.

Es ist hiernach nicht schwer, bei geeigneter Fixirung der Lage der regulären Körper gegen das Coordinatensystem die Functionen F_1, F_2, F_3 für die vier Stufen wirklich aufzustellen und sei in Bezug darauf auf das bereits erwähnte Buch des Herrn Klein, insbesondere auf Seite 47. ff. und 60. verwiesen, in welchem jedoch die F_1, F_2, F_3 entsprechenden Formeln auf anderem Wege abgeleitet werden, nämlich aus den Substitutionen, die den Rotationen analytisch entsprechen. Wir werden bei den folgenden Untersuchungen der Gleichung (2) die nachstehenden Gestalten für die verschiedenen Stufen geben, wobei wir noch homogene Variabeln m_1, m_2 $\left(\frac{m_1}{m_2} = m\right)$ einführen, um den Punkt $m = \infty$ nicht auszuzeichnen.

Für die zweite Stufe erhalten wir, wenn wir den Modul der zweiten Stufe mit $\delta = \frac{\delta_1}{\delta_2}$ bezeichnen:

$$J : J-1 = 4\delta_1^3 d_2^3 : -(\delta_1^3 - \delta_2^3)^2 : (\delta_1^3 + \delta_2^3)^2.$$

Gewöhnlich betrachtet man jedoch als Galois'schen Hauptmodul der 2- Stufe nicht die eben definirte Function δ, die man als Diëderirrationalität bezeichnen könnte, sondern das zur absoluten Invariante J gehörige Doppelverhältniss λ, dessen Abhängigkeit von J sich mittels der Gleichung ausdrücken lässt[1]):

$$J:J-1:1 = 4(\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2)^3:(2\lambda_1^3-3\lambda_1^2\lambda_2-3\lambda_1\lambda_2^2+2\lambda_2^3)^2: \\ 27(\lambda_1^2\lambda_2-\lambda_1\lambda_2^2)^2 \quad (3a)$$

δ und λ hangen linear miteinander zusammen und kann man dieser Abhängigkeit wegen der Sechswertigkeit von δ und λ 6 verschiedene Formen geben.

Für die dritte Stufe verwenden wir die Gleichung:

$$J:J-1:1=64(a_1^3a_2-a_2^4)^3:-(a_1^6-20a_1^3a_2^3-8a_2^6)^2:(a_1^4+8a_1a_2^3)^3; \quad (3b)$$

für die vierte Stufe:

$$J:J-1:1 = (o_1^8+14o_1^4o_2^4+o_2^8)^3 \\ :(o_1^{12}-33o_1^8o_2^4-33o_1^4o_2^8+o_2^{12})^2:108(o_1^5o_2-o_1o_2^5)^4 \quad (3c)$$

endlich für die fünfte Stufe:

$$J:J-1:1=(-\eta_1^{20}+228\eta_1^{15}\eta_2^5-494\eta_1^{10}\eta_2^{10}-228\eta_1^5\eta_2^{15}+\eta_2^{20})^3 \\ :-(\eta_1^{30}+522\eta_1^{25}\eta_2^5-10005\eta_1^{20}\eta_2^{10}-10005\eta_1^{10}\eta_2^{20}-522\eta_1^5\eta_2^{25}+\eta_2^{30})^2 \\ :1728(\eta_1^{11}\eta_2+11\eta_1^6\eta_2^6-\eta_1\eta_2^{11})^5 \quad (3d)$$

Die Gleichungen (3*b*), (3*c*), (3*d*) sind als Tetraedergleichung, Oktaedergleichung, Ikosaedergleichung, die Grössen $a = \frac{a_1}{a_2}$, $o = \frac{o_1}{o_2}$, $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$ als Tetraederirrationalität, Oktaederirrationalität, Ikosaederirrationalität bekannt. Die P linearen Substitutionen, welche die Gleichungen (3a) bis (3d) in sich überführen, sollen im Folgenden auch kurz als „Substitutionen der ϱten Stufe" bezeichnet werden.

---

1) Man vergleiche z. B. Annalen XIV, p. 114., oder Dedekind in Crelle's Journal t. 83, pg. 284. Die dort mit $v = \text{val}(\omega)$ bezeichnete Grösse ist mit der absoluten Invariante J identisch.

Wir schliessen hieran einige Bemerkungen, die die Stellung der soeben durchgeführten Betrachtungen zu früheren Untersuchungen kennzeichnen sollen. Zunächst hätte man die Gleichungen (8) noch kürzer ableiten können, wenn man auf den im bereits erwähnten Buche „Theorie des Ikosaeders u. s. w." mitgeteilten Beweis (pg. 115. ff.) Bezug nahm, dass es nur fünf endliche Gruppen linearer Substitutionen gibt, nämlich die cyklische Gruppe, die Diëdergruppe, Tetraedergruppe, Oktaedergruppe und Ikosaedergruppe. Man sieht leicht ein, dass die P Substitutionen der ϱten Stufe keine cyklische Gruppe bilden können, und nur im Falle $\varrho=2$ eine Diëdergruppe, dass daher Gleichung (2) für $\varrho = 3, 4, 5$ durch eine Gruppe von Tetraedersubstitutionen, Oktaedersubstitutionen respective Ikosaedersubstitutionen in sich übergeht, und dass daher Gleichung (2) für die zweite Stufe die Bedeutung einer gewissen Diëdergleichung, für die dritte Stufe die einer Tetraedergleichung u. s. w. hat. Dann kann man (l. c. pg. 49, 60) für diese Gleichungen Formeln, wie die Gleichungen (3) angeben Weiter vergleiche man Annalen XIV. pg. 148 ff. Dort zeigt Herr Klein, dass die Galois-sche Resolvente der Transformationsgleichung der Transformation n-Ordnung der absoluten Invariante J nur in den Fällen $n = 2, 3, 4, 5$, das Geschlecht null hat, dass sie weiter in diesen Fällen die gleiche Verzweigung hat, wie die Doppelverhältnissgleichung, respective Tetraedergleichung, Oktaedergleichung oder Ikosaedergleichung, und dass diese Gleichungen die einfachsten Formen sind, die man der Galois'schen Resolvente der Transformationsgleichung der Transformation 2. bis 5. Ordnung von J erteilen kann. Beachtet man noch, dass die Gleichungen (3) ihre eigenen Galois'schen Resolventen sind (vergl. Ikosaeder, pg. 92.), so ist damit auch die Bezeichnung „Galois'sche" Moduln erklärt. Weiter werden in dem erwähnten Aufsatze noch Formeln angegeben, welche direct den Uebergang von den Transformationsgleichungen für J zu den Galois'schen Resolventen vermitteln, und schliesslich werden aus diesen Formeln für die vier einzelnen Irrationalitäten explicite Potenzreihen abgeleitet, die nach Potenzen von $q = e^{i\pi\omega}$ fortschreiten.

Um endlich m auch als Function von ω zu betrachten, zeichne man sich die Fundamentalpolygone der vier Stufen, indem man etwa in der ω-Ebene $2P$ Dreiecke in entsprechender Weise an einandersetzt, wie die $2P$ Felder auf der Kugel aneinandergesetzt sind. Man erhält so ein noch in vieler Hinsicht willkürliches Fundamentalpolygon, dessen Kanten sich dann durch modulo ϱ zur Identität congruente Subsitutionen binden müssen, und dem man etwa die in der Figurentafel angegebenen Formen geben kann (Fig. 2. für die 2. Stufe, Fig. 3. und 4. für die 3. und 4. Stufe, das Polygon für die

5. Stufe besteht aus fünf congruenten nebeneinander gelegten Teilen wie Fig. 5.). Je nachdem man irgend eines der P Doppeldreiecke der ω-Ebene einem der P Doppeldreiecke der m-Ebene zuordnet (beide Doppeldreiecke bestehen aus einem schraffirten und einem nicht schraffirten Dreieck, die an der dem Winkel $\frac{\pi}{3}$ gegenüberliegenden Seite aneinander hangen), erhält man P verschiedene Functionen von ω, die dann eindeutig in der gesamten ω-Ebene fortsetzbar sind, und nach dieser einmaligen Zuordnung eines Wertepaares (m, ω) eindeutige Functionen von ω darstellen, die nicht gegeneinander verzweigt sind. (Die Function $m(J)$ ist jedoch P-deutig und sind auch ihre einzelnen Zweige bei $J = 0, 1, \infty$ gegeneinander verzweigt).

§ 4.

Genauerer Verfolg der vier einzelnen Modulfunctionen.

I. **Das Doppelverhältniss** war durch die Gleichung definirt:

$$J:J-1:1 = 4(\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2)^3:(2\lambda_1^3-3\lambda_1^2\lambda_1-3\lambda_1\lambda_2^2+2\lambda_2^3)^2 \\ :(\lambda_1^2\lambda_2-\lambda_1\lambda_2^2)^2 \qquad (3a)$$

Merkwürdige Punkte der λ-Ebene sind die Punkte $\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ entsprechend $J=0$) mit der Multiplicität 2, sowie $\lambda = 0, 1, \infty$ (entsprechend $J=\infty$) und $\lambda = -1, \frac{1}{2}, 2$ (entsprechend $J=1$) mit der Multiplicität 1. Verbindet man diese Punkte unter Beachtung ihrer Multiplicität durch Kreise und beachtet, dass auch die reelle λ-Axe in die Abbildungsfigur eingehen muss, so erhält man unschwer die Gebietseinteilung der λ-Ebene. (Vergl. Tafel, Figur 1). Bezeichnet man das schraffirte Dreieck mit den Ecken $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, 1 als Dreieck I, so geht das Dreieck mit den Ecken 2, $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, 1 aus ihm durch die Substitution $\lambda' = \frac{1}{\lambda}$ hervor, die mit A bezeichnet sei, ebenso das Dreieck mit Ecken $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, 0 durch die Substitution $\lambda' = 1-\lambda$, die mit B bezeichnet sei. Die übrigen Dreiecke entstehen aus I durch die Substitutionen ABA, AB, BA, oder in λ ausgedrückt $\lambda' = \frac{\lambda}{\lambda-1}$, respective $= \frac{\lambda-1}{\lambda}$ und $\frac{1}{1-\lambda}$. Das Symbol AB soll dabei besagen dass auf λ erst die Substitution A, und dann B auf $A(\lambda)$ ausgeübt werden soll, also $B(A(\lambda))$. Daher muss man bekanntlich bei dieser Bezeichnungsweise consequenter $(\lambda)AB$ schreiben, welcher Schreibweise wir uns im Folgenden anschliessen wollen.

Schreiben wir die Substitution der Gleichung (3a) in sich homogen in der Form

[redacted]

$$\lambda_1' = a\lambda_1 + b\lambda_2, \qquad \lambda_2' = c\lambda_1 + d\lambda_2,$$

wobei die noch bis auf einen gemeinsamen Factor unbestimmten Zahlen a, b, c, d so normirt sein sollen, dass $ad - bc = 1$, so lauten die „Doppelverhältniss-Substitutionen" homogen

(4)

$\lambda_1' = \pm\lambda_1, \quad \lambda_2' = \pm\lambda_2.$ entsprechend der Identität 1, $\lambda' = \lambda$

$\lambda_1' = \pm i\lambda_2, \quad \lambda_2' = \pm i\lambda_1$ „ „ Operation A, $\lambda' = \frac{1}{\lambda}$;

$\lambda_1' = \pm i(-\lambda_1 + \lambda_2), \quad \lambda_2' = \pm i\lambda_2$ „ „ „ B, $\lambda' = 1 - \lambda$;

$\lambda_1' = \pm i\lambda_1, \quad \lambda_2' = \pm i(\lambda_1 - \lambda_2),$ „ „ $ABA, \lambda' = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$;

$\lambda_1' = \pm(\lambda_1 - \lambda_2), \quad \lambda_2' = \pm\lambda_1,$ „ „ AB, $\lambda' = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$;

$\lambda_1' = \pm\lambda_2, \quad \lambda_2' = \pm(-\lambda_1 + \lambda_2),$ „ „ BA, $\lambda' = \frac{1}{1 - \lambda}$.

In der Abbildungsfigur ist in den einzelnen Feldern die Operation angegeben, durch welche sie aus dem mit I bezeichneten hervorgehen. Die Gestalt des Fundamentalpolygones der zweiten Stufe ist von anderer Seite her bekannt (Vergl. Tafel, Fig. 2.). Bezeichnet man

$$\text{die Operation } \omega' = \omega + 1 \text{ mit } S,$$

$$\text{die Operation } \omega' = -\frac{1}{\omega} \text{ mit } T,$$

so gehen die einzelnen Felder aus dem mit I bezeichneten Ausgangsfeld, (das die Ecken $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $+\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $i\infty$ hat), durch die ihnen eingeschriebene Operation hervor.

Jedem Punkt ω des Fundamentalpolygones entsprechen 6 Punkte $\lambda(\omega)$, jedem äquivalenten Punkte $\frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}$ dieselben sechs Punkte λ. Ordnet man aber einem Werte ω einen bestimmten Wert $\lambda(\omega)$ zu und geht vom Punkte ω auf irgend einem Wege zum äquivalenten Punkte $\frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}$ über, so geht λ vermöge der conformen Abbildung der ω-Ebene auf die λ-Ebene in einen ganz bestimmten (im allge-

meinen andern) der ebenerwähnten 6 Werte λ über. Um die sechs Functionen $\lambda(\omega)$ zu unterscheiden, verabreden wir, dass die Function λ, welche das mit I bezeichnete Feld der ω-Ebene auf das mit C bezeichnete Feld der λ-Ebene abbildet, (C bedeutet dabei eins der Symbole I, A, B, ABA. AB, BA) mit λ_c bezeichnet werde. Diese 5 Functionen hangen durch die Relationen zusammen

$$\lambda_A = \frac{1}{\lambda_I}; \quad \lambda_B = 1 - \lambda_I;$$
$$\lambda_{ABA} = \frac{\lambda_I}{\lambda_I - 1}; \quad \lambda_{AB} = \frac{\lambda_I - 1}{\lambda_I}; \quad \lambda_{BA} = \frac{1}{1 - \lambda_I} \tag{5}$$

die man auch kurz in der Form schreiben kann

$$\lambda_c = C(\lambda_I) \tag{5a}$$

Es sei hier noch erwähnt, dass die Operationen A, B die Periode 2 haben, d. h. $A^2 = 1$, $B^2 = 1$ ist, und dass zwischen ihnen die Relation

$$ABABAB = 1$$

besteht.

Geht man vom Argument ω der Function λ_c über zu $\dfrac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}$, und bestimmt mittels der conformen Abbildung, wie sich λ_c linear substituirt, so erhält man, zunächst für die Substitutionen S, T, STS, ST, TS, und damit für alle ihnen *modulo* 2 congruenten (ihr Verhalten *modolo* 2 ist in der 3. Columne angegeben) folgende Tabelle:

(6)

Operation	ω Subst.	$\alpha:\beta:\gamma:\delta (\mathrm{mod}\, 2)$
1	$\omega' = \omega$	1:0:0:1
S	$\omega + 1$	1:0:1:1
T	$-\frac{1}{\omega}$	0:1:1:0
STS	$\frac{\omega}{\omega+1}$	1:1:0:1
ST	$\frac{-1}{\omega+1}$	1:1:1:0
TS	$\frac{-1+\omega}{\omega}$	0:1:1:1

[redacted]

λ_I	λ_A	λ_B	λ_{ABA}	λ_{AB}	λ_{BA}
$\lambda' = \lambda$	$\lambda' = \lambda$	$\lambda' = \lambda$	$\lambda' = \lambda$	$\lambda' = \lambda$	$\lambda' = \lambda$
$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\lambda}{\lambda-1}$	$1-\lambda$	$\frac{\lambda}{\lambda-1}$	$1-\lambda$
$1-\lambda$	$\frac{\lambda}{\lambda-1}$	$1-\lambda$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\lambda}{\lambda-1}$
$\frac{\lambda}{\lambda-1}$	$1-\lambda$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\lambda}{\lambda-1}$	$1-\lambda$	$\frac{1}{\lambda}$
$\frac{\lambda-1}{\lambda}$	$\frac{1}{1-\lambda}$	$\frac{1}{1-\lambda}$	$\frac{1}{1-\lambda}$	$\frac{\lambda-1}{\lambda}$	$\frac{\lambda-1}{\lambda}$
$\frac{1}{1-\lambda}$	$\frac{\lambda'-1}{\lambda}$	$\frac{\lambda-1}{\lambda}$	$\frac{\lambda-1}{\lambda}$	$\frac{1}{1-\lambda}$	$\frac{1}{1-\lambda}$

Ueber die Structur dieser Tabelle sei noch bemerkt, dass bei der ω-Substitution, die λ_I in $D(\lambda_I)$ verwandelt, λ_c die Substitution $C^{-1}DC$ erfährt, wo C^{-1} die inverse zu C ist, Denn erfährt λ_I die Substitution D, d. h. wird

$$\lambda_I' = D(\lambda_I) = (\lambda_I)D,$$

so erfährt

$$\lambda_I - C^{-1}(\lambda_c) = (\lambda_c)C^{-1}$$

dieselbe, d. h. es wird

$$\lambda_I' = (\lambda_c)C^{-1}D.$$

Uebt man noch beiderseits die Substitution C aus, so entsteht gerade

$$\lambda_c' = (\lambda_c)C^{-1}DC.$$

Endlich beachte man noch, dass die drei Substitutionen S, T und STS (*modulo* 2) die Periode 2 haben, ebenso A, B, ABA. Die Zuordnung der ω-Substitutionen zu den Doppelverhältnisssubstitutionen kann man also so festlegen, dass man zweien der ersteren zwei der letzteren zuordnet. Dies ist auf 6 verschiedene Weisen möglich, und diese sechs Möglichkeiten finden sich gerade bei den sechs Functionen λ_c.

II. Die Tetraederirrationalität war durch die Tetraedergleichung definirt:

$$J : J-1 : 1 = 64(a_1^3 a_2 - a_2^4)^3 : -(a_1^6 - 20a_1^3a_2^3 - 8a_2^6)^2 : (a_1^4 + 8a_1a_2^3)^3 \quad (36)$$

Merkwürdige Punkte der a-Ebene sind:

$a = 1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \infty$ $(J = 0)$ mit der Multiplicität 2;
$1 \pm \sqrt{3},\ \alpha(1 \pm \sqrt{3}),\ \alpha^2(1 \pm \sqrt{3})$ $(J = 1)$ mit der Multiplicität 1
$0,\ -2,\ -2\alpha,\ -2\alpha^2,$ $(J = \infty)$ mit der Multiplicität 2.

α bedeutet hier die complexe dritte Einheitswurzel

$$\alpha = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Auch die Tetraedersubstitutionen lassen sich aus zweien zusammen setzen. Wir benutzen hierzu etwa

eine Operation A der Periode 3, die $a = 0$ und $a = \infty$ festlasse:

$$a' = \alpha a.$$

eine Operation B der Periode 2, die $1 + \sqrt{3}$ und $1 - \sqrt{3}$ festlasse:

$$a' = \frac{a+2}{a-1}.$$

Die Tetraedersubstitutionen lauten dann

$$\begin{array}{llll} 1, & B, & ABA^2, & A^2BA \\ A, & BA, & AB, & BAB \\ A^2, & BA^2, & ABA, & A^2B. \end{array}$$

Dabei ist

$$A^3 = 1,\quad B^2 = 1,\quad ABABAB = 1.$$

Homogen mit der Determinante 1 geschrieben lauten die Substitutionen:

$$\text{A:}\quad a_1' = \pm\, \alpha^2 a_1, \qquad a_2' = \pm\, \alpha a_2$$
$$\text{B:}\quad a_1' = \pm \frac{1}{\sqrt{-3}}(a_1 + 2a_2), \quad a_2' = \pm \frac{1}{\sqrt{-3}}(a_1 - a_2)$$

Dem Fundamentalpolygon der dritten Stufe kann man die Gestalt Figur 3. der Tafel geben. Um die 12 Functionen $a(\omega)$ zu unterscheiden, sei wieder a_C die Function, die das Feld C der a-Ebene auf das Feld 1 der ω-Ebenen abbildet. C ist eine Tetraedersubsubstitution der Form $A^{\sigma}B^{\sigma'}A^{\tau}B^{\tau'}\ldots$, und zwar diejenige, durch welche das betrachtete Feld C aus dem mit 1 bezeichneten hervorgeht. Als Feld 1 nehmen wir etwa dasjenige, das sich von $a = 0$ aus an die negative reelle Axe der a-Ebene anschliesst. Diese 12 Functionen verhalten sich natürlich den ω-Substitutionen gegenüber verschieden. Wieder ergiebt sich analog wie beim Doppelverhältniss dass durch die ω-Substitution, die a_C in $D(a_C)$ überführt, a_E' die Tetraedersubstitution $E^{-1}DE$ erleidet, wenn $a_C' = E(a_E)$. Es ist

[redacted]

dann $CE = C'$, $E = C'$, $E = C^{-1}C'$ und a_c' erleidet, also die Substitution $C'^{-1}CDC^{-1}C'$. Daher genügt es, für **eine** Function a_c die Zusammengehörigkeit der ω-Substitutionen (die *modulo* 3 zu betrachten sind) mit den Tetraedersubstitutionen festzustellen. Führt man dies für die Function a_I aus, die so normirt ist, dass sich S und A, T und B entsprechen, so erhält man folgende Tabelle:

ω-Subst.		$\alpha:\beta:\gamma:\delta$ mod 3			a-Subst.
1,	$\omega' = \omega$	1:0:0:1	oder	2:0:0:2	1
S,	$\omega+1$	1:0:1:1	„	2:0:2:2	A
S^2,	$\omega+2$	1:0:2:1	„	2:0:1:2	A^2
T,	$-\frac{1}{\omega}$	0:1:2:0	„	0:2:1:0	B
TS,	$\frac{-1+\omega}{\omega}$	0:1:2:1	„	0:2:1:2	BA
TS^2,	$\frac{-1-\omega}{\omega}$	0:1:2:2	„	0:2:1:1	BA^2
STS^2,	$\frac{-2+\omega}{1+\omega}$	1:1:1:2	oder	2:2:2:1	ABA^2
ST	$\frac{-1}{1+\omega}$	1:1:2:0	„	2:2:1:0	AB
STS,	$\frac{\omega}{1+\omega}$	1:1:0:1	„	2:2:0:2	ABA
S^2TS,	$\frac{-2+\omega}{1+\omega}$	1:2:2:2	„	2:1:1:1	A^2BA
TST,	$\frac{\omega}{1-\omega}$	1:2:0:1	„	2:1:0:2	A^2BA^2
S^2T,	$\frac{1}{1-\omega}$	1:2:1:0	„	2:1:2:0	A^2B.

Die dritte und vierte Reihe der Tabelle gibt das Verhalten der ω-Subtitutionen modulo 3) an, wobei die Subsstitutionen $\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}$ und $\frac{-\gamma-\delta\omega}{-\alpha-\beta\omega}$ bei der nichthomogenen Schreibweise als identisch zu betrachten sind.

III. Die Oktaederirrationalität, definirt durch die Gleichung:

$$J:J-1:1 = (o_1^8+14\,o_1^4o_2^4+o_2^8)^3$$
$$:: (o_1^{12}-33o_1^8o_2^4-33o_1^4o_2^8+o_2^{12}):108(o_1^5o_2-o_1o_2^5)_4 \qquad (3c)$$

Die Gebietseinteilung der o-Ebene durch die conforme Abbildung ist nach denselben Methoden, wie in den beiden vorhergehenden Fällen, unschwer festzustellen. Die Oktaedersubstitutionen setzen sich wieder aus zweien zusammen, etwa aus

der Substitution A von Periode 4, welche $o = 0$ und $o = \infty$ festlässt,

$$o' = to, \quad \text{und}$$

der Substitution B von Periode 2, welche $o = -1 + \sqrt{2}$ und $o = -1 - \sqrt{2}$ festlässt,

$$0' = \frac{1-0}{1+0}$$

homogen lauten diese Substitutionen

$$\begin{aligned} A: \quad & o_1' - \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} o_1, & o_2' = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} o_2 \\ B: \quad & o_1' = \pm \frac{1}{\sqrt{-2}} (-o_1 + o_2), & o_2' = \pm \frac{1}{\sqrt{-2}} (o_1 + o_2) \end{aligned} \tag{9}$$

Die 24 Oktaedersubstitutionen stellen sich in den Formen dar

$$C, \quad DC, \quad CA, \quad DCA,$$

wo C eine der Substitutionen 1, A^2, BA^2B, A^2BA^2B; D eine der Substitutionen BA^3, AB ist. Dabei ist wieder $A^4 = 1$, $B^2 = 1$. $ABABAB = 1$. Wir bezeichnen wieder eines der schraffirten Felder mit I, etwa dasjenige, das bei $o = 0$ den Winkel $\frac{\pi}{4}$ zeigt und sich an die positive reelle Axe anlehnt, und unterscheiden dann die Felder nach den Substitutionen C, durch die sie aus I hervorgehen.

Dem Fundamentalpolygon der 4ten Stufe kann man die Gestalt Fig. 4. der Tafel geben. Die einzelnen Functionen $o_c(\omega)$ legen wir wieder dadurch fest, dass sie das ω-Feld I auf das Feld C der 0-Ebene abbilden. Die Function o_I erleidet bei der ω-Substitution S die Oktaedersubstitution A, bei T die Substitution B, bei der ω-Substitution $S^{\mu} T^{\mu'} S^{\nu} T^{\nu'} \ldots$ also die o-Substitution] $D = A^{\mu} B^{\mu'} A^{\nu} B^{\nu'} \ldots$, o_x aber die Substitution $C^{-1}DC$.

Weiter beachte man, dass das Doppelverhältniss als Modul der zweiten Stufe natürlich auch ein Modul der vierten Stufe ist, allerdings nicht ein Hauptmodul, es muss daher λ rational durch o ausdrückbar sein. Es wird genügen, wenn wir für o_I und λ_I diese Rationalfunction aufstellen. Man wird zu diesem Zwecke in der Doppelverhältnissgleichung (3a) etwa setzen

[redacted]

$$\lambda_1 = a_0 o_1^4 + a_1 o_1^3 o_2 + a_2 o_1^2 o_2^2 + a_3 o_1 o_2^3 + a_4 o_2^4,$$
$$\lambda_2 = b_0 o_1^4 + b_1 o_1^3 o_2 + b_2 o_1^2 o_2^2 + b_3 o_1 o_2^3 + b_4 o_2^4,$$

damit muss gerade die Oktaedergleichung (3c) entstehen. Hat man dann ein Wertesystem $a_0 : a_1 : a_2 : \ldots : b_4$ gefunden, (was am einfachsten und ohne übergrossen Rechnungsaufwand durch Ausprobiren geschieht,) so setze man etwa $\frac{o_1}{o_2} = o_I$ und untersuche, indem man irgend einen speciellen Wert ω, etwa in einem Zipfel des Fundamentalpolygones, ins Auge fasst, welchen Wert für dieses ω

$$\lambda(\omega) = \frac{a_0 o_I^4 + a_1 o_I^3 + a_2 o_I^2 + a_3 o_I + a_4}{b_0 o_I^4 + b_1 o_I^3 + b_2 o_I^2 + b_3 o_I + b_4}$$

annimmt, d. h. welche der Functionen $\lambda_c(\omega)$ man so erhält. Führt man dies durch, so erfährt man, dass

$$\lambda_I = \left(\frac{o_I^2 - 1}{o_I^2 + 1}\right)^2 \tag{10}$$

Um den Zusammenhang zwischen λ_E und o_D zu erhalten, hat man hierin nur λ_I und o_I durch $C^{-1}(\lambda_E)$ und $D^{-1}(o_D)$ zu ersetzen.

Es existirt jedoch noch ein anderer Zusammenhang zwischen o und λ. Das Fundamentalpolygon für o ist nämlich geometrisch ähnlich (im Verhältniss 1:2) mit dem viermal nebeneinandergelegten Fundamentalpolygon für λ, also mit dem für $\sqrt[4]{\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda - \lambda_0'}}$, wo λ_0 und λ_0' die Werte von λ bei $\omega = +1$ respective $\omega = i\infty$ sind. Ist nun O_D die Function, die bei $\omega = \frac{1}{2}$ den Wert 0, bei $\omega = i\infty$ aber $o = \infty$ hat, so ist direct

$$\text{Const.} \cdot \sqrt[4]{\frac{\lambda(2\omega) - \lambda o}{\lambda(2\omega) - \lambda'_0}} = o_D(\omega).$$

Ist $\lambda'_0 = \infty$, so setzen wir zunächst Const $= c\sqrt[4]{\lambda'_0}$, so wird

$$o_D = \lim_{\lambda' = \infty} \left\{ c \cdot \sqrt[4]{\frac{\lambda(2\omega) - \lambda_0}{\frac{\lambda(2\omega)}{\lambda_0'} - 1}} \right\} = c' \sqrt[4]{\lambda(2\omega) - \lambda_0}$$

Auf diese Weise ergibt sich[1])

$$o_I(\omega) = \sqrt[4]{1-\lambda_I(2\omega)} = \sqrt[4]{\lambda_B(2\omega)} \tag{11}$$

Was die Zuordnung der ω-Substitutionen zu den Oktaedersubstitutionen bei den einzelnen Functionen o_D betrifft, so ergibt sich wieder, dass bei O_I den ω-Substitutionen S und T die Oktaedersubstitutionen A und B entsprechen, bei o_c also $C^{-1}AC$ respective $C^{-1}BC$.

IV. Die Ikosaederirrationalität, definirt durch

(3d)

$$J:J-1:1 = (-\eta_1^{20}+228\eta_1^{15}\eta_2^5-494\eta_1^{10}\eta_2^{10}-228\eta_1^5\eta_2^{15}+\eta_2^{20})^3$$
$$:(\eta_1^{30}+522\eta_1^{25}\eta_2^5-10005\eta_1^{20}\eta_2^{10}-10005\eta_1^{10}\eta_1^{20}-522\eta_2^5\eta_2^{25}+\eta_2^{30})^2$$
$$:1728(\eta_1^{11}\eta_2+\eta_1^6\eta_2^6-\eta_1\eta_2^{11})^5.$$

In Betreff der Gebietseinteilung der η-Ebene vergleiche man die Figurentafel in dem bereits mehrfach erwähnten Klein'schen Buche. Die Ikosaedersubstitutionen setzen sich aus folgenden zusammen, (vergl. Ikosaeder, pg. 40, 41 ff.):

Der Operation A der Periode 5, $\eta' = \varepsilon\eta$, wobei $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ homogen geschrieben

$$\eta_1' = \pm\varepsilon^3\eta_1, \quad \eta_2' = \pm\varepsilon^2\eta_2 \tag{12a}$$

und der Operation B der Periode 2:

$$\eta' = \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\eta+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\eta+(\varepsilon-\varepsilon^4)},$$

homogen:

---

1) Man vergleiche Annalen XIV. p. 155. Die in der Note „Neue Untersuchungen über elliptische Modulfunctionen der niedersten Stufen" mitgeteilten Formeln des Herrn Fricke $\varkappa = \sqrt{\lambda} = i\frac{o^2-1}{2o}$ (4), und $\lambda(2\omega) = 1-o^4$ (18.) gelten, wie man aus der dort angegebenen Fixirung der Functionen o, ersieht, für $\lambda = \lambda_{ABA}$ und $o = o_{BA^2B}$ und können aus den hier angegebenen Formeln (10) und (11) unmittelbar abgeleitet werden; man hat nur O_I and λ_I zu ersetzen durch respective $(o)(BA^2B)^{-1} = \frac{1}{o}$ und $(\lambda)(ABA)^{-1} = \frac{\lambda-1}{\lambda}$.

$$\eta_1' = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}[-(\varepsilon-\varepsilon^4)\eta_1+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\eta_2],$$
$$\eta_2' = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}[(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\eta_1+(\varepsilon-\varepsilon^4)\eta_2] \qquad (12b)$$

Die Ikosaedersubstitutionen lauten

$$A^\mu, \quad A^\mu B A^\nu, \quad A^\mu C, \quad A^\mu B A^\nu C,$$

wobei

$$\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4; \quad \nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

C ist die Substitution $A^2BA^3BA^2B$, in η geschrieben:

$$\eta' = -\frac{1}{\eta}.$$

Das Fundamentalpolygon der fünften Stufe besteht aus 5 nebeneinanderliegenden congruenten Teilen, deren jeder die Gestalt Fig. 5. der Tafel hat. Die 60 Functionen η unterscheiden wir wieder analog wie bisher. Bezeichnen wir das in $\eta = 0$ an der positiven reellen η-Axe anliegende schraffirte Feld mit 1, so entsprechen bei der Function $\eta_I(\omega)$ den ω-Substitutionen S, T die η-Substitutionen A, B, der ω-Substitution $\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega} = S^\mu T^{\mu'} S^\nu T^{\nu'}$ ... aber $D = A^\mu B^{\mu'} A^\nu B^{\nu'}$ ... bei η_I, bei der Function η_ε aber $C^{-1}DE$.

Sollen wir umgekehrt zu der Ikosaedersubstitution D (oder allgemeiner zu der Substitution D der ϱten Stufe), die die Function m_ε erleidet, die ω-Substitution aufsuchen, so suche man die der Substitution D von m_I entsprechende Substitution von m_ε auf: es ist wie leicht einzusehen, CDC^{-1}; diese stelle man in der Form $A^\mu B^{\mu'} A^\nu B^{\nu'}$ ... dar, so gehört zur Substitution D von m_ε die ω-Substitution $S^\mu T^{\mu'} S^\nu T^{\nu'}$. , . .

§ 5.

Modulformen.

Ebensó, wie wir für die Modulfunctionen λ, a, o, η homogene Variabeln einführten, können wir auch für ω homogene Variabeln einführen, und erhalten dann für λ_1, λ_2 u. s. w. Modulformen.

Setzen wir

$$\omega = \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

so wird [1])

$$J : J - 1 : 1 = g_2(\omega_1, \omega_2)^3 : 27 g_3(\omega_1, \omega_2)^2 : \Delta(\omega_1, \omega_2), \tag{13}$$

wobei

$$g_2(\omega_1, \omega_2) = \sum_\mu \sum_\nu{}' \left(\frac{1}{\mu\omega_1 + \nu\omega_2}\right)^4; \quad g_3(\omega_1, \omega_2) = \Sigma\, \Sigma' \left(\frac{1}{\mu\omega_1 + \nu\omega_2}\right)^6.$$

Der Accent bei $\Sigma\Sigma'$ bedeutet dabei, dass die Combination $\mu = 0$, $\nu = 0$ ausgeschlossen werden soll. Da nun F_1^3, F_2^2 und F_3^ϱ von der Ordnung 6 resp. 12, 24, 60 für $\varrho = 2, 3, 4, 5$ sind, so kann man für $\varrho = 2$ und $\varrho = 3$ direct setzen

$$F_1^3(m_1, m_2) = g_2^3(\omega_1, \omega_2), \quad F_2^2(m_1, m_2) = 27 g_3^2(\omega_1, \omega_2),$$
$$F_3^\varrho(m_1, m_2) = \Delta(\omega_1, \omega_2), \tag{14ab}$$

so sind dadurch $\lambda_1 \lambda_2$ als Modulformen (-2)ter Dimension, a_1 und a_2 als solche (-1)ter Dimension definirt.

Wollten wir ebenso mit $o_1 o_2$ und η_1, η_2 verfahren, so erhielten wir Formen der Dimensionen $-\frac{1}{2}$ bezüglich $-\frac{1}{5}$. Um die dadurch herbeigeführte Vieldeutigkeit zu vermeiden, setzen wir bei der vierten Stufe

$$\begin{aligned} F_1^3(o_1 o_2) &= g_2^3(\omega_1 \omega_2) \,.\, \Delta(\omega_1, \omega_2) \\ F_2^2(o_1, o_2) &= 27 g_3^2(\omega_1, \omega_2) \,.\, \Delta(\omega_1, \omega_2) \\ F_3^4(o_1, o_2) &= \Delta^2(\omega_1, \omega_2) \end{aligned} \tag{14c}$$

so ist, da auch die 2te und 3te Wurzel aus Δ noch eindeutige Function von ω_1, ω_2 ist [2]), o_1 und o_2 als Modulform (-1)ter Dimension definirt.

Analog setzen wir bei der fünften Stufe

$$F_1 = g_2 \Delta^m, \quad F_2 = \sqrt[2]{27 \,.\, g_3 \,.\, \Delta^n}, \quad F_3 = \Delta^p$$

Da $\frac{F_1^3}{F_3^5}$ und $\frac{F_2^2}{F_3^5}$ constant sein sollen, so müssen $g_2^3 \,.\, \Delta^{3m-5p}$ und $g_3^2 \,.\, \Delta^{2m-5p}$ von der nullten Dimension sein, d. h,

$$3m - 5p = -1, \quad 2n - 5p = -1,$$

also z. B.

$$p = -1, \quad m = -2, \quad n = -3.$$

Daher setze man

1) Man vergleiche z. B. Hurmitz, Annalen XVIII, pg. 546, 554.

2) Vergl. ibid. pg. 555.

$$F_1(\eta_1\,\eta_2) = \frac{g_2(\omega_1\omega_2)}{\varDelta(\omega_1\,\omega_2)^2}.\quad F_2(\eta_1\,\eta_2) = \sqrt{27}\,\frac{g_3(\omega_1\omega_2)}{\varDelta(\omega_1\,\omega_2)} \tag{14d}$$

$$F_3(\eta_1\,\eta_2) = \frac{1}{\varDelta(\omega_1\,\omega_2)},$$

so sind auch η_1 und η_2 als Modulformen, und zwar der Dimension $+1$ definirt.

Diese Formeln setzen uns in Stand, direct die Zuordnung der homogenen ω-Substitutionen zu den noch bis auf einen gewissen Factor unbestimmten homogenen linearen Substitutionen der Modulformen λ_1, λ_2 u. s. w. aufzustellen.

Bei dem Doppelverhältniss war

$$F_1(m_1, m_2) = \sqrt[3]{4}\,.(\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2) = g_2(\omega_1, \omega_2) = \Sigma'\left(\frac{1}{\mu\omega_1 + \nu\omega_2}\right)^4,$$

$$\frac{1}{\sqrt{27}}\,F_2(m_1 m_2) = \frac{1}{\sqrt{27}}\,(2\lambda_1^3 - 3\lambda_1^2\lambda_2 - 3\lambda_1\lambda_2^2 + 2\lambda_2^3)$$

$$= g_3(\omega_1, \omega_2) = \Sigma'\left(\frac{1}{\mu\omega_1 + \nu\omega_2}\right)^6,$$

bis auf dritte, respective zweite Einheitswurzeln. Aus diesen Gleichungen folgt

$$\lambda_1 = \gamma.\sqrt[3]{4}.\sqrt{27}\,\frac{\lambda(\lambda^2 - \lambda + 1)}{2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 2}\cdot\frac{g_3(\omega_1, \omega_2)}{g_2(\omega_1, \omega_2)}$$

$$\lambda_2 = \gamma.\sqrt[3]{4}.\sqrt{27}\,\frac{\lambda^2 - \lambda + 1}{2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 2}\cdot\frac{g_3(\omega_1, \omega_2)}{g_2(\omega_1, \omega_2)}$$

γ bedeutet eine hier nicht näher in Betracht kommende sechste Einheitswurzel. Durch diese Formeln sind λ_1 und λ_2 (bis auf die sechste Einheitswurzel γ) als eindeutige Functionen von ω_1, ω_2 und λ bestimmt, als Modulformen.

Wenn wir jetzt die Function $\lambda = \lambda_I$ herausgreifen, so entspricht der Substitution S, d. h. $\omega' = \omega + 1$, homogen geschrieben:

$$\omega_1' = \pm\omega_1, \quad \omega_2' = \pm(\omega_1 + \omega_2)$$

die Substitution

$$\lambda' = \frac{1}{\lambda}.$$

Dabei bleibt sowol

$$g_2 = \Sigma'\left(\frac{1}{\mu\omega_1 + \nu\omega_2}\right)^4,$$

als auch

$$g_3 = \Sigma\left(\frac{1}{\mu\omega_1 + \nu\omega_2}\right)^6$$

ungeändert, und wir erhalten:

$$\lambda_1' = \gamma . \sqrt[3]{4} . \sqrt{27}\frac{1-\lambda+\lambda^2}{2-3\lambda-3\lambda^2+2\lambda^3} . \frac{g_3}{g_2} = \lambda_2,$$

$$\lambda_2' = \gamma . \sqrt[3]{4} . \sqrt{27}\frac{\lambda(1-\lambda+\lambda^2)}{2-3\lambda-3\lambda^2+2\lambda^3} \frac{g_3}{g_2} = \lambda_1,$$

also nicht

$$\lambda_1' = \pm i\lambda_2, \quad \lambda_2' = \pm i\lambda_1.$$

Bei der Substitution T, d. h. $\omega' = -\frac{1}{\omega}$, homogen:

$$\omega_1' = \pm\omega_2, \quad \omega_2' = \mp\omega_1,$$

der $\lambda' = 1-\lambda$ entspricht, bleiben g_2 und g_3 gleichfalls ungeändert, und so kommt

$$\lambda_1' = -\gamma . \sqrt[3]{4} . \sqrt{27}(1-\lambda)\frac{\lambda^2-\lambda+1}{2\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda+2}\frac{g_3}{g_2} = -\lambda_2+\lambda_1$$

$$\lambda_2' = -\gamma . \sqrt[3]{4} . \sqrt{27}\frac{\lambda^2-\lambda+1}{2\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda+2}\frac{g_3}{g_2} = -\lambda_2.$$

Den Substitutionen A und B entsprechen also homogene Substitutionen der Determinante -1.

Ganz analoge Rechnungen haben wir jetzt bei den anderen Stufen durchzuführen.

Bei der dritten Stufe ist

$$\begin{aligned} i(a_1^6 - 20a_1^3a_2^3 - 8a_2^6) &= \sqrt{27} . g_3, \\ 4(a_1^3a_2 - a_2^4) &= g_2 \end{aligned}$$

bis auf zweite, bezüglich dritte, Einheitswurzeln. Aus diesen Gleichungen lassen sich jedoch nicht a_1 und a_2 direct, sondern nur a_1^2, a_1a_2 und a_2^2 berechnen, und zwar ergibt sich

$$a_1^2 = \gamma . \frac{4\sqrt{27}}{i}\frac{a^2(a^3-1)}{a^6-20a^3-8} . \frac{g_3}{g_2},$$

$$a_1a_2 = \gamma . \frac{4\sqrt{27}}{i}\frac{a(a^3-1)}{a^6-20a^3-8} . \frac{g_3}{g_2},$$

$$a_2^2 = \gamma . \frac{4\sqrt{27}}{i}\frac{a^3-1}{a^6-20a^3-8} . \frac{g_3}{g_2}.$$

γ bedeutet hier wieder in den drei Formeln die nämliche sechste Einheitswurzel.

[redacted]

Setzen wir $a = a_l$, und unterwerfen die Formeln der Substitution

$$a' = \alpha a, \quad \omega' = \omega + 1,$$

so entsteht:

$$(a_1^2)' = \alpha^2 a_1^2, \quad (a_1 a_2)' = \alpha a_1 a_2, \quad (a_2^2)' = a_2^2,$$

wobei mit $(a_1^2)'$ u. s. w. bezeichnet ist, was aus a_1^2 u. s. w. durch die obenangeführte Substitution entsteht. Für a_1' und a_2 folgt hieraus:

$$a_1' = = \pm \alpha a_1, \quad a_1' = \pm a_2,$$

also zwei nur durchs Vorzeichen unterschiedene Substitutionen der Determinante

$$\alpha = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Bei der Substitution

$$a' = \frac{a+2}{a-1}, \quad \omega' = -\frac{1}{\omega}$$

wird

$$a^6 - 20a^3 - 8 \text{ zu } -27\frac{a^6 - 20a^3 - 8}{(a-1)^6},$$

$$a^3 - 1 \text{ zu } 9\frac{a^2 + a + 1}{(a-1)^3} = 9\frac{a^3 - 1}{(a-1)^4},$$

und so folgt

$$(a_1^2)' = -\tfrac{1}{3}\frac{(a+2)^2}{a^2}a_1^2 = -\tfrac{1}{3}(a_1 + 2a_2)^2,$$

$$(a_1 a_2)' = -\tfrac{1}{3}\frac{(a+2)(a-1)}{a}a_1 a_2 = -\tfrac{1}{3}(a_1 + 2a_2)(a_1 - a_2),$$

$$(a_2^2)' = -\tfrac{1}{3}(a-1)^2 a_2^2 = -\tfrac{1}{3}(a_1 - a_2)^2,$$

d. h.

$$a_1' = \pm\frac{1}{\sqrt{-3}}(a_1 + 2a_2); \quad a_2' = \pm\frac{1}{\sqrt{-3}}(a_1 - a_2).$$

Wir erhalten also zwei Substitutionen der Determinante $+1$.

Weiter bei der vierten Stufe setzen wir (bis auf dritte, bezüglich vierte Einheitswurzeln)

$$o_1^8 + 14 o_1^4 o_2^4 + o_2^8 = g_2 . \sqrt[3]{\Delta}$$

$$o_1^5 o_2 - o_1 o_2^5 = \frac{1}{\sqrt[4]{108}} . \sqrt[2]{\Delta}$$

und erhalten daraus:

$$o_1^2 = \gamma' . \sqrt[4]{108}\,\frac{o^3(o^4-1)}{o^8+14o^4+1} \cdot \frac{g_2}{\sqrt[6]{\Delta}}$$

$$o_1 o_2 = \gamma' . \sqrt[4]{108}\,\frac{o^2(o^4-1)}{o^8+14o^4+1} \cdot \frac{g_2}{\sqrt[6]{\Delta}}$$

$$o_2^2 = \gamma' . \sqrt[4]{108}\,\frac{o(o^4-1)}{o^8+14o_2+1} , \frac{g_2}{\sqrt[6]{\Delta}}$$

γ' bedeutet hier eine zwölfte Einheitswurzel. Legen wir wieder die Function o_I zugrunde, so ergibt die Substitution $\omega' = \omega + 1$, $o' = io$:

$$(o_1^2)' = -io_1^2, \quad (o_1o_2)' = -o_1o_2, \quad (o_2^2)' = io_2^2,$$

d. h.

$$o_1' = \pm \frac{-1+i}{\sqrt{2}} o_1, \quad o_2' = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} o_2,$$

also zwei Substitutionen der Determinante -1.

Ebenso ergibt die Substitution $\omega' = -\frac{1}{\omega}$, $o' = -\frac{1-o}{1+o}$ das Resultat

$$(o_1^2)' = -\tfrac{1}{2}(o_1 - o_2),$$
$$(o_1o_2)' = -\tfrac{1}{2}(o_1^2 - o_2^2),$$
$$(o_2^2)' = -\tfrac{1}{2}(o_1 + o_2)^2,$$

d. h. also

$$o_1' = \pm \frac{i}{\sqrt{2}}(o_1 - o_2), \qquad o_2' = \pm \frac{i}{\sqrt{2}}(o_1 + o_2)$$

zwei Substitutionen der Determinante $+1$.

Endlich bei der fünften Stufe bilden wir

$$\frac{1}{\sqrt[5]{1728}}\,\frac{F_1(\eta_1, \eta_2) . F_3(\eta_1, \eta_2)}{F_2(\eta_1, \eta_2)} = \gamma'' . \frac{1}{\sqrt[5]{1728}\sqrt{27}}\frac{g_2}{g_3},$$

und erhalten

$$\eta_1^2 = \gamma'' \frac{1}{\sqrt{27}}\,\frac{\eta^2 F_2(\eta, 1)}{F_1(\eta, 1)F_3(\eta, 1)} \cdot \frac{g_2}{g_3},$$

$$\eta_1\eta_2 = \gamma'' \frac{1}{\sqrt{27}}\,\frac{\eta . F_2(\eta, 1)}{F_1(\eta, 1) . F_3(\eta, 1)} \cdot \frac{g_2}{g_3},$$

$$\eta_2^2 = \gamma'' \frac{1}{\sqrt{27}}\,\frac{F_2(\eta, 1)}{F_1(\eta, 1) . F_3(\eta, 1)} \cdot \frac{g_2}{g_3}$$

γ'' bedeutet hier eine dreissigste Einheitswurzel.

Bei der Substitution $\omega' = \omega + 1$, $\eta' = \varepsilon\eta$, $(\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}})$ ergibt sich

$$(\eta_1^2)' = \varepsilon\eta_1^2, \quad (\eta_1\eta_2)' = \eta_1\eta_2, \quad (\eta_2^2)' = \pm\varepsilon^4\eta^2,$$

d. h.

$$\eta' = \pm\varepsilon^3\eta, \quad \eta_2' = \pm\varepsilon^2\eta_2,$$

Substitutionen der Determinante $+1$.

Ebenso ergibt die Substitution

$$\omega' = -\frac{1}{\omega}, \quad \eta' = \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\eta + (\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon + (\eta-\varepsilon^4)}$$

$$(\eta_1^2)' = \frac{1}{5\eta^2}[-(\varepsilon-\varepsilon^4)\eta + (\varepsilon^2-\varepsilon^3)]^2\eta_1^2,$$

$$(\eta_1\eta_2)' = \frac{1}{5\eta}[-(\varepsilon-\varepsilon^4)\eta + \varepsilon^2-\varepsilon^3)][(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\eta + (\varepsilon-\varepsilon^4)]\eta_1\eta_2,$$

$$(\eta_2^2)'' = \tfrac{1}{5}[(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\eta + (\varepsilon-\varepsilon^4)]^2\eta_2^2,$$

also

$$\eta_1' = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}[-(\varepsilon-\varepsilon^4)\eta_1 + (\varepsilon^2-\varepsilon^3)\eta^2],$$

$$\eta_2' = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}[(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\eta_1 + (\varepsilon-\varepsilon^4)\eta_2],$$

also wieder Substitutionen der Determinante $+1$.

Kapitel II.

Die Modulargleichungen der Galois'schen Moduln der 2. bis 5. Stufe.

§ 6.

Transformation n. Ordnung und Repräsentanten.

Unter Transformation n. Ordnung einer Modulfunction $f(\omega)$ versteht man den Uebergang von $f(\omega)$ zu $f\left(\frac{C+D\omega}{A+B\omega}\right)$, wo unter A, B C, D vier ganze Zahlen der Determinante $AD-BC = n$ verstanden werden sollen. Wir werden im Folgenden unter $f(\omega)$ stets einen Galois'schen Hauptmodul der ϱten Stufe ($\varrho = 2, 3, 4, 5$) verstehen.

Jede Zahl $\frac{C+D\omega}{A+B\omega}$ lässt sich zunächst in der Form darstellen

$$\frac{C+D\omega}{A+B\omega}=\frac{c+d.\frac{1}{n}\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}}{a+b.\frac{1}{n}\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}}=\frac{(n\alpha c+\gamma d)+(n\beta c+\delta d)\omega}{(n\alpha a+\gamma b)+(n\beta a+\delta b)\omega},$$

wobei die Ganzzahlen a, b, c, d, α, β, γ, δ den Bedingungen genügen:

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1,\quad ad-bc=1,$$
$$a:b:c:d\equiv 1:0:0:1 \pmod{\varrho}.$$

Denn Gleichung (15) erfordert nur, dass

$$n\alpha c+\gamma d=\varepsilon C,$$
$$n\beta c+\delta d=\varepsilon D,$$
$$n\alpha a+\gamma b=\varepsilon A,$$
$$n\beta a+\delta b=\varepsilon B,$$

wo ε entweder in allen vier Gleichungen gleich $+1$, oder überall gleich -1 zu setzen ist; ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, kann man $\varepsilon=+1$ setzen. Weiter erkennt man, dass die ganzzahlige Bestimmung mindestens eines Systems von Zahlen a, b, c, d, α, β, γ, δ, so dass $a:b:c:d\equiv 1:0:0:1 \bmod \varrho$, sobald n teilerfremd ϱ ist, und unter dieser Voraussetzung allein werden die folgenden Schlüsse Geltung haben, stets möglich ist. Insbesondere ergibt sich noch, dass

$$A:B:C:D\equiv n\alpha:n\beta:\gamma:\delta \pmod{\varrho}$$

Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit kann man daher unter Transformation n. Ordnung den Uebergang von $f(\omega)$ zu $f\left(\frac{1}{n}\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right)$ verstehen, wobei nur $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ zu sein braucht.

Von den unendlich vielen Werten $\frac{1}{n}\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}$ ergeben nun diejenigen noch den nämlichen Wert f, welche durch eine modulo ϱ zur Identität congruente lineare Substitution (der Determinante 1) aus einander hervorgehen. Seien $\frac{1}{n}\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}$ und $\frac{1}{n}\frac{\gamma_1+\delta_1\omega}{\alpha_1+\beta_1\omega}$ zwei solche Werte, und sei also

$$\frac{1}{n}\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}=\frac{c+d.\frac{1}{n}\frac{\gamma_1+\delta_1\omega}{\alpha_1+\beta_1\omega}}{a+b\cdot\frac{1}{n}\frac{\gamma_1+\delta_1\omega}{\alpha_1+\beta_1\omega}}$$

[redacted]

$$(a:b:c:d \equiv 1:0:0:1 \bmod \varrho, \quad ad - bc = 1),$$

so verlangt dies:

$$\begin{aligned} \varepsilon\gamma &= n\alpha_1 c + \gamma_1 d, \\ \varepsilon\delta &= n\beta_1 c + \delta_1 d, \\ \varepsilon n\alpha &= n\alpha_1 a + \gamma_1 b, \\ \varepsilon n\beta &= n\beta_1 a + \delta_1 b, \end{aligned}$$

oder aufgelöst:

$$\begin{aligned} a &= \varepsilon(\alpha\delta_1 - \beta\gamma_1), \\ b &= \varepsilon n(\alpha_1\beta - \alpha\beta_1), \\ nc &= \varepsilon(\gamma\delta_1 - \gamma_1\delta), \\ d &= \varepsilon(\alpha_1\delta - \beta_1\gamma), \end{aligned}$$

d. h. es muss

$$b \equiv 0 \bmod n$$

sein. Ferner ist noch

$$\alpha:\beta:\gamma:\delta \equiv \alpha_1:\beta_1:\gamma_1:\delta_1 \bmod \varrho.$$

Es genügt also, anstelle aller Wertesysteme $\alpha_\varkappa:\beta_\varkappa:\gamma_\varkappa:\delta_\varkappa$, welche zu $\alpha:\beta:\gamma:\delta$ modulo ϱ congruent sind, nur solche zu betrachten, die nicht durch eine Substitution $\omega' = \frac{c+d\omega}{a+b\omega}$ $(a:b:c:d \equiv 1:0:0:1 \bmod \varrho,\ b \equiv 0 \bmod n)$ ineinander überführbare Werte $\frac{1}{n}\frac{\gamma_\varkappa + \delta_\varkappa\omega}{\alpha_\varkappa + \beta_\varkappa\omega}$ ergeben. Solcher Werte gibt es aber soviel, als der Index der Gruppe $a:b:c:d \equiv 1:0:0:1 \bmod \varrho$, $b \equiv 0 \bmod n$ beträgt, d. h. der Index der Gruppe, welche den beiden Gruppen $a:b:c:d \equiv 1:0:0:1 \bmod \varrho$, und $b = 0 \bmod n$, gemeinsam ist. Der Index der ersteren Gruppe ist aber $P = \frac{\varrho^3}{\varkappa}\Pi\left(1 - \frac{1}{\sigma^2}\right)$ (vergl. Gleichung 1), der Index der letzteren Gruppe hingegen [1])

$$N = n\Pi\left(1 + \frac{1}{s}\right) \tag{15}$$

wo Π über alle in n enthaltenen Primzahlen zu erstrecken ist. Diese beiden Congruenzgruppen haben, da ihre Stufen n und ϱ teilerfremd sein sollen, eine Gruppe vom Index $P.N$ gemeinsam [2]),

1) Man vergleiche etwa bei Herrn Hurwitz (Annalen XVIII p. 568) oder bei Herrn Dedekind (Crelle's Journal 83. Bd., Seite 288), wo die nämliche Anzahl linear unabhängigen Werte $\frac{C+D\omega}{A+B\omega}$ für Transformation n. Ordnung des Moduls der 1. Stufe abgeleitet wird.

2) Man vergleiche Annalen XVII. p. 67. Die Verwendung der Repräsentanten in der Form $\frac{1}{n}\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}$ findet sich zuerst bei Herrn Klein, Annalen XIV. p. 130. (Vergl. Annalen XVIII. p. 566).

und man darf sich daher bei der Transformation n. Ordnung des Moduls der ϱten Stufe auf die Betrachtung von PN „repräsentirenden" Argumenten $\frac{1}{n}\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}$, von PN Repräsentanten beschränken, oder: $f(\omega)$ geht durch die Transformation $n$ter Ordnung in PN verschiedene Werte $f\left(\frac{1}{n}\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right)$ über.

Diese PN Repräsentanten zerlegen wir nach dem Verhalten von $\alpha:\beta:\gamma:\delta$ modulo ϱ in P Gruppen von je N. Die solch einer Gruppe angehörigen Zahlen $\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}$ sind durch modulo ϱ zur Identität congruente lineare Substitutionen ineinander überführbar, nicht aber die Zahlen $\frac{1}{n}\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}$ einer Gruppe, die wir als „inbezug auf die Gruppe $b\equiv 0 \bmod n$ relativ inäquivalent" bezeichnen könnten, da zwei Zahlen $\frac{1}{n}\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}$ und $\frac{1}{n}\frac{\gamma_1+\delta_1\omega}{\alpha_1+\beta_1\omega}$, wenn sie überhaupt durch eine lineare Substitution der Determinante 1 ineinander überführbar sein sollen, es mittels einer Substitution mit $b\equiv 0 \bmod n$ sein müssen. Wenn aber diese Zahlen durch eine Substitution $\omega'=\frac{c+d\omega}{a+bn\omega}$ auseinander hervorgehen, so gehen die Zahlen $\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}$ und $\frac{\gamma_1+\delta_1\omega}{\alpha_1+\beta_1\omega}$ durch eine Substitution

$$n\omega'=n\frac{c+d\omega}{a+bn\omega} \quad \text{d. h.} \quad n\omega'=\frac{nc+dn\omega}{a+bn\omega}$$

auseinander hervor, bei der der c entsprechende Substitutionscoefficient $\equiv 0 \bmod n$ ist: man kann daher die einer Repräsentantengruppe angehörigen Werte $\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}$ als „inbezug auf die Gruppe $c\equiv 0 \bmod n$ relativ inquivalent" bezeichnen.

Bezeichnen wir die N zur Gruppe $\alpha:\beta:\gamma:\delta\equiv 1:0:0:1 (\bmod \varrho)$ angehörigen (inbezug auf $c\equiv \bmod n$ inäquivalenten) Werte $\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}$ mit $\omega_0, \omega_1, \omega_2 \ldots \omega_{N-1}$, so lassen sich die zur Gruppe $\alpha:\beta:\gamma:\delta \equiv \alpha_0:\beta_0:\gamma_0:\delta_0 (\bmod \varrho)$ gehörigen Repräsentanten in der Form $\frac{1}{n}\frac{\gamma_0+\delta_0\omega_x}{\alpha_0+\beta_0\omega_x} (\alpha_0\delta_0-\beta_0\gamma_0=1)$ darstellen, wo für ω_x die Werte $\omega_0\omega_1 \ldots \omega_{N-1}$ zu setzen sind, denn diese Ausdrücke stellen N inbezug auf die Gruppe $b\equiv 0 \bmod n$, d. h. überhaupt inäquivalente Werte dar.

[redacted]

§ 7.

Die zugehörigen Modulargleichungen.

Beschränken wir uns zunächst wieder auf die N Repräsentanten $\frac{\omega_0}{n}, \frac{\omega_1}{n} \dots \frac{\omega_{N-1}}{n}$, so erhalten wir über die Lage derselben durch folgende Ueberlegung Rechenschaft.

In der ω-Ebene haben wir zunächst drei Gebietseinteilungen: Erstens die der Gesamtheit der linearen Substitutionen entsprechende Haupteinteilung in Dreieckspaare. Zweitens die Einteilung in Fundamentalpolygone der ϱ-ten Stufe. (Jedes derselben enthält P Felder der ersten Gebietseinteilung). Drittens die Einteilung in die zur Gruppe $\gamma \equiv o \bmod n$ gehörigen Fundamentalpolygone, deren jedes aus N Dreieckspaaren der ersten Einteilung besteht. Da n und ϱ teilerfremd sind, so können wir in der ω-Ebene noch eine vierte Einteilung erhalten, deren Felder aus N Fundamentalpolygonen der ϱ-ten Stufe, oder was auf dasselbe hinauskommt, aus P Fundamentalpolygonen der dritten Einteilung, jedenfalls aus NP Dreieckspaaren der ersten Einteilung, bestehen. Diese grossen Polygone sind die Fundamentalpolygone zu der den beiden Gruppen $a:b:c:d \equiv 1:0:0:1$ (mod ϱ) und $c \equiv o$ (mod n) gemeinsamen Untergruppe vom Index NP, inbezug auf welche die NP Repräsentanten ω_x und $\frac{\gamma+\delta\omega_x}{\alpha+\beta\omega_x}$ $\left(\text{nicht } \frac{1}{n}\frac{\gamma+\delta\omega_x}{\alpha+\beta\omega_x},\right)$ inäquivalent sind.

Sei P_0 solch ein Polygon, so enthält es gerade N Punkte $\omega_0, \omega_1, \dots \omega_{N-1}$, welche mit einem beliebigen Punkte ω durch *modulo* ϱ zur Identität congruente Substitutionen verbunden, und inbezug auf die Gruppe $\gamma \equiv o \bmod n$ inäquivalent sind. Wir können sie also gerade als die ω_x der ersten Repräsentantengruppe verwenden, die $\frac{\omega_x}{n}$ sind dann die Repräsentanten der ersten Gruppe. Wir können uns also die Transformation n. Ordnung in der Weise veranschaulichen, dass wir zu $x = f(\omega)$ einen zugehörigen Wert ω, und zu diesem die N entsprechenden ω_x im Polygon der 4. Einteilung aufsuchen. Bildet man dann von diesen ω_x die n-ten Teile, so hat man die N der ersten Gruppe entsprechenden Argumente $\frac{\omega_x}{n}$ des transformirten Moduls. Ueberstreicht jetzt ω sein Fundamentalpolygon der ϱ-ten Stufe, so überstreichen die ω_x gleichfalls N Fundamentalpolygone der ϱ-ten Stufe und diese setzen sich zum Fundamentalpolygon P_0 der vierten Einteilung zusammen. Die Argumente $\frac{\omega_x}{n}$ von y über-

streichen dann eine zu P_0 geometrisch ähnliche (auf $\frac{1}{n}$ verkleinerte) Figur P_0', die ein Bild für die Werte ist, welche y annimmt, wenn x successive sämtliche Zahlenwerte annimmt. Um die Riemann'sche Fläche über der y-Ebene zu erhalten, hat man daher nur das Polygon P_0' mittels der Function $f(\omega')$ auf die y-Ebene abzubilden. Die Kanten dieses Polygones P_0' binden sich durch die Substitutionen, die aus $\omega' = \frac{n\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}$ $(\alpha:\beta:\gamma:\delta \equiv 1:0:0:1 \bmod \varrho)$ entstehen, wenn ω, ω' durch $n\omega$, $n\omega'$ ersetzt werden, also durch die Substitutionen $\omega' = \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + n\beta\omega}$, und da $\alpha:n\beta:\gamma:\delta \equiv 1:0:0:1 \bmod \varrho$ d. h. die Kanten von P' sich durch *modulo* ϱ zur Identität congruente Substitutionen binden, so ist die Riemann'sche Fläche für y eine geschlossene, und da P_0 und P_0' aus einem Stück bestehen, eine aus einem Stück bestehende Fläche. Beachtet man noch, dass P_0 in gleicher Weise ein Bild der Riemann'schen Fläche für x ist, wie P_0' für y, so folgt:

Zwischen $x = f(\omega)$ und $y = f\left(\frac{\omega_x}{n}\right)$ besteht eine irreducible algebraische Gleichung $\varphi(xy) = 0$, die sowol x als y bis zur N-ten Potenz enthält.

Es ist nicht schwer einzusehen, dass auch zwischen x und den zu den übrigen $P-1$ Repräsentantengruppen

$$\frac{1}{n}\frac{\gamma_0 + \delta_0\omega_x}{\alpha_0 + \beta_0\omega_x} \quad (x = 0,1 \ldots N-1)$$

gehörigen Werten y ebensolche irreducible Gleichungen, der Zahl nach noch $P-1$, bestehen müssen. Denn die Werte $\frac{1}{n}\frac{\gamma_0 + \delta_0\omega_x}{\alpha_0 + \beta_0\omega_x}$ lassen sich auch in der Form schreiben

$$\frac{\gamma_0 + n\delta_0 \frac{\omega_x}{n}}{\frac{\alpha_0}{n} + \beta_0 \frac{\omega_x}{n}}$$

(γ_0 kommt nur modulo ϱ in betracht und kann daher $\equiv 0 \bmod n$ gesetzt werden) dann ist $f\left(\frac{\omega_x}{n}\right)$ nach den Sätzen des vorigen Capitels mit $f\left(\frac{1}{n}\frac{\gamma_0 + \delta_0\,\omega_x}{\alpha_0 + \beta_0\,\omega_x}\right)$ durch eine lineare Gleichung verbunden. Hieraus folgt:

Die PN Werte y, in die x durch die Transformation n-ter Ordnung übergeführt wird, sind die Wurzeln einer

Gleichung $F(xy)=0$ die sich in P irreducible Gleichungen N-ter Ordnung für y spaltet.[1])

Statt der spezielleren Repräsentanten $\omega' = \frac{1}{n}\frac{\gamma+\delta\omega_x}{\alpha+\beta\omega_x}$ können wir wieder für jeden Repräsentanten mittels einer Substitution

$$\frac{c+d\omega'}{a+b\omega'} \quad (\equiv 1 \bmod \varrho)$$

einen solchen der Form $\frac{C+D\omega}{A+B\omega}$ einführen. Daher schreibt sich die Modulargleichung auch in der Form

$$F(xy) = \prod_{NP}\left[y - f\left(\frac{1}{n}\frac{\gamma+\delta\omega_x}{\alpha+\beta\omega_x}\right)\right] = \prod_{NP}\left[f(\omega) - f\left(\frac{C+D\omega^0}{A+B\omega^0}\right)\right]$$
$$= \sum_{i=0}^{i=NP} a_i y^i = 0$$

wenn das Argument von x mit ω^0 bezeichnet wird. Die beiden Producte bestehen aus je NP Factoren, und ist in deren zweitem Gliede f über alle NP Repräsentanten zu erstrecken. Die Coefficienten a_i sind Functionen von x, und zwar rationale, da sonst einem Werte x mehr als NP Werte y zugeordnet wären.

Greifen wir jetzt einen der Repräsentanten heraus, etwa

$$\frac{C_0+D_0\omega^0}{A_0+B_0\omega^0} = \omega'$$

setzen also

$$\omega^0 = \frac{C_0 - A_0\omega'}{-D_0+B_0\omega'}$$

und unterwerfen $y_0 = f(\omega')$ einer Transformation n. Ordnung, so erhalten wir eine ähnliche Modulargleichung $F' = 0$. Hier wollen wir jedoch den Repräsentanten die Form $\frac{C-A\omega'}{-D+B\omega'}$ geben, wo A, B, C, D die nämlichen NP Wertesysteme durchlaufen, wie oben. Diese Zahlen bilden natürlich gleichfalls ein volles Repräsentantensystem, weil sie sich nach dem Verhalten von $-D:B:C:-A$ (modulo ϱ) in P Gruppen von je N inäquivalenten Werten teilen lassen. F' kann daher in der Form geschrieben werden

$$F' = \prod_{NP}\left[f(\omega) - f\left(\frac{C-A\omega'}{-D+B\omega'}\right)\right]$$
$$= \prod\left[z - f\left(\frac{C-A\omega'}{-D+B\omega'}\right)\right] = F(y_0, z) = 0$$

1) Man vergleiche bei Herrn **Gierster**, Annalen XXI pg. 9 ff.

Unter den Wurzeln dieser Gleichung ist nun sicher eine und nur eine gleich $f(\omega^0) = x$, nämlich die dem Repräsentanten

$$\frac{C_0 - A_0\,\omega'}{-D_0 + B_0\,\omega'} = \frac{C_0 - A_0\,\dfrac{C_0 + D_0\,\omega^0}{A_0 + B_0\,\omega^0}}{-D_0 + B_0\,\dfrac{C_0 + D_0\,\omega^0}{A_0 + B_0\,\omega^0}} = \omega^0$$

entsprechende. d. h. für alle Wertesysteme xy, für welche $F(xy) = 0$ ist, ist auch $F(yx) = 0$, d. h. $F(xy)$ und $F(yx)$ müssen bis auf einen Factor ψ übereinstimmen, so dass

$$F(xy) = \psi . F(yx) = \psi^2 F(xy)$$

d. h. es ist $\psi = \pm 1$. Hieraus folgt:

Die Modulargleichung $F(xy) = 0$ geht bei Vertauschung von x und y bis auf einen eventuellen Zeichenwechsel in sich über.

Da weiter $F(xy)$ aus P irreducibeln Factoren $\varphi_i(xy)$ besteht, so folgt:

Bei Vertauschung von x und y bleiben die Factoren $\varphi_i(xy)$ entweder (bis auf einen eventuellen Zeichenwechsel) erhalten, oder vertauschen sich (teilweise oder sämtlich) paarweise.[1]

§ 8.

Die Substitutionen der Modulargleichung in sich.

Es sei nun $\varphi_i(xy) = 0$ der zu den N Repräsentanten $\frac{1}{n}\frac{\gamma_i + \delta_i\,\omega_x}{\alpha_i + \beta_i\,\omega_x}$ gehörige Factor der Modulargleichung, so ist also

$$x = f(\omega), \quad y_x = f\left(\frac{1}{n}\frac{\gamma_i + \delta_i\,\omega_x}{\alpha_i + \beta_i\,\omega_x}\right)$$

oder wenn wir

$$\frac{\gamma_i + \delta_i\,\omega_x}{\alpha_i + \beta_i\,\omega_x} = \omega'_x, \quad \omega_x = \frac{\gamma_i - \alpha_i\,\omega'_x}{-\delta_i + \beta_i\,\omega'_x}$$

setzen, wird

$$x = f\left(\frac{\gamma_i - \alpha_i\,\omega_x'}{-\delta_i + \gamma_i\,\omega_x'}\right), \quad y = f\left(\frac{\omega_x'}{n}\right)$$

(Die verschiedenen ω'_x ergeben selbstverständlich die nämlichen Werte x.) Daher ist

---

1) Vergleiche Gierster, Annalen XXI, p. 12 ff.

[redacted]

$$\varphi_i(xy) = \varphi_0\left(x(\omega_x), y\left(\frac{1}{n}\frac{\gamma_i+\delta_i\omega_x}{\alpha_i+\beta_i\omega_x}\right)\right) = \varphi_0\left(x\left(\frac{\gamma_i+\alpha_i\omega_x'}{-\delta_i+\beta_i\omega'_x}\right), y\left(\frac{\omega_x'}{n}\right)\right)$$

wenn φ_0 der zu den Repräsentanten $\frac{\omega_x}{n}$ gehörige Factor ist. Ersetzen wir noch ω_x' durch ω_x, $x\left(\frac{\gamma_i-\alpha_i\omega_x'}{-\delta_i+\beta_i\omega_x'}\right)$ durch $x\left(\frac{\gamma_i-\alpha_i\omega}{-\delta_i+\beta_i\omega}\right)$, so wird

$$\varphi_i(x, y) = \varphi_0\left(x\left(\frac{\gamma_i-\alpha_i\omega}{-\delta_i+\beta_i\omega}\right), y\left(\frac{\omega_x}{n}\right)\right) = \varphi_0(x', y) = 0$$

da $x\left(\frac{\gamma_i-\alpha_i\omega}{-\delta_i+\beta_i\omega}\right) = x'(\omega)$ nur eine andere der durch Gleichung (2) definirten P Moduln der ϱ-ten Stufe ist. Daher muss $\varphi_0(x'y)$ mit $\varphi_i(xy)$ bis auf einen Factor identisch sein, der im allgemeinen nicht mit φ_0 und φ_i zugleich null ist. Ist x' mit x durch die Substitution der ϱ-ten Stufe,

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}$$

verbunden, so ist

$$\varphi_i(xy) = \frac{(cx-a)^N}{(ad-bc)^N}\,\varphi_0\left(\frac{-dx+b}{cx-a}, y\right)$$

Jeder Factor φ_i kann also aus φ_0 abgeleitet werden, indem man die Variabele x in φ_0 einer Substitution der ϱ-ten Stufe unterwirft. Es ist leicht einzusehen, dass man erstlich so alle Factoren aus φ_0 ableiten kann, und dann wegen des Gruppencharakters der Substitutionen der ϱ-ten Stufe, dass man so aus jedem Factor φ_i alle anderen ableiten kann. Hieraus folgt:

Uebt man auf x eine Substitution der ϱ-ten Stufe aus, so werden in $F(xy) = \Pi\varphi_i(xy)$ die Factoren φ nur vertauscht.[1])

Da weiter $\pm F(xy) = F(yx) = \Pi\varphi_x(yx)$ und jedes $\varphi_x(yx)$ gleich einem $\varphi_i(xy)$ sein muss, so folgt:

Auch wenn man auf y eine der Substitutionen der ϱ-ten Stufe ausübt, werden die Factoren φ_i nur vertauscht.

Da man aus einem Factor $\varphi_i(xy)$ also die andern in einfacher Weise durch lineare Substitutionen ableiten kann, so genügt die Ableitung eines derselben, und kann man daher einen einzelnen als

1) Vergleiche bei Herrn Gierster Annalen XXI, 9.

Modulargleichung für die Transformation n. Ordnung bezeichnen, und zwar wollen wir von den P Factoren φ_i im Folgenden stets φ_0 herausgreifen.

Wenn so das Product F bei P^2 Simultansubstitutionen in sich übergeht, so muss jeder der P Factoren φ_i bei P simultanen Substitutionen des x und des y in sich übergehen.[1]) Denn übt man auf x eine der P Substitutionen der ϱ-ten Stufe aus, so geht φ_i in einen andern Factor $\varphi_\varkappa$ über, und $\varphi_\varkappa$ geht nur durch eine ganz bestimmte Substitution des y in φ_i über.

Dabei ist jedoch Folgendes zu beachten. Die P^2 Simultansubstitutionen setzen sich zusammen aus der „Doppelidentität" $x' = x$, $y' = y$; aus $2(P-1)$ Substitutionen, bei denen nur x oder nur y substituirt werden, und endlich aus $(P-1)^2$ eigentlichen Simultansubstitutionen, bei denen x und y substituirt werden. Die erstgenannte Substitution $x' = x$, $y' = y$ lässt natürlich alle Factoren ungeändert, die $2(P-1)$ zweiterwähnten Substitutionen lassen keinen Factor ungeändert, und jede der übrigen $(P-1)^2$ lässt einen oder einige Factoren in sich übergehen. Jeder Factor geht bei $P-1$ Simultansubstitutionen (ausser der Identität $x' = x$, $y' = y$) in sich über, was $P(P-1)$ eigentliche Simultansubstitutionen ergäbe; da aber nur $(P-1)^2$ solcher Simultansubstitutionen existiren, so müssen einige derselben wiederholt auftreten. Es seien nun $\varphi_i(xy)$ und $\varphi_\varkappa(xy)$ zwei Factoren, welche bei der Simultansubstitution

$$x' = D(x) = (x)D, \quad y' = E(y) = (y)E$$

in sich übergehen, d. h. es sei

$$\varphi^i((x)D, (y)E) = \varphi_i(x, y)$$

und

$$\varphi_\varkappa((x)D, (y)E) = \varphi_\varkappa(x, y)$$

und sei ferner

$$\varphi_i(x, y) = \varphi_\varkappa((x)C, y)$$

so ist auch

$$\varphi_i((x)D, (y)E) = \varphi_\varkappa((x)C, y)$$

d. h.

$$= \varphi_\varkappa((x)CD, (y)E)$$

$$= \varphi_i((x)CDC^{-1}, (y)E)$$

Daher muss

$$D = CDC^{-1}$$

sein. Zwei Factoren φ_i und $\varphi_\varkappa$ haben also dann und nur dann eine Simultansubstitution gemeinsam, wenn sich zur Substitution C (die φ_i in $\varphi_\varkappa$ überführt) eine Substitution D so finden lässt, dass $DC = CD$.

1) ibid. pg. 11.

Gehen φ_i und φ_x bei der Substitution $x' = D(x)$, $y' = E(y)$ in sich über, so tun sie es natürlich auch bei Iterationen $x' = D^2(x)$, $y' = E^2(y)$ u. s. w. Zählt man diese mit, so müssen sich gerade $P-1$ solcher Simultansubstitutionen D, E zeigen. Da sich ferner alle Substitutionen einer Stufe aus zwei passend gewählten Substitutionen zusammensetzen lassen, (zwei beliebige Substitutionen können auch nur eine Untergruppe ergeben,) so dürfen zwei Factoren φ_i, φ_x nie zwei Paare Simultansubstitutionen von der Eigenschaft gemeinsam haben, dass sich aus den Substitutionen des x, oder des y, alle Substitutionen der betreffenden Stufe zusammensetzen lassen.

Hieraus folgt noch: hat ein Factor $\varphi_x(xy)$ der Modulargleichung die Eigenschaft, in sich überzugehen, wenn x und y simultan den nämlichen Substitutionen unterworfen werden, so ist direct $\varphi_i(xy) = \pm\varphi_i(yx)$. Denn wäre $\varphi_i(yx)$ gleich einem anderen Factor $\varphi_x(xy)$, so hätten φ_i und φ_x die nämlichen P Simultansubstitutionen gemeinsam, (da x und y den nämlichen Substitutionen unterworfen werden sollen,) und da das nach dem ebenbewiesenen Satze nicht möglich ist, muss $\varphi_i(xy) = \pm\varphi_i(yx)$ sein.

Hat man nun für eine der Functionen $x = f(\omega)$, also etwa für $m_l(\omega)$ der früheren Bezeichnung, die Modulargleichung $\varphi_0(x_l y_l) = 0$ aufgestellt, so erübrigt noch, für die übrigen $P-1$ Functionen m_c dasselbe zu tun. Man hat zu diesem Zwecke einfach x und y simultan je den nämlichen Simultansubstitutionen der ϱ-ten Stufe zu unterwerfen, da die Functionen m_c mit m_l durch diese Substitutionen zusammenhangen und erhält so im allgemeinen für die P Functionen P Modulargleichungen, von denen jedoch einige oder alle identisch sein können, jenachdem φ_0 in sich oder in einen anderen Factor übergeht, wenn x und y simultan den nämlichen Substitutionen unterworfen werden.

§ 9.

Zuordnung der Simultansubstitutionen.

Nachdem wir erkannt haben, dass die Transformation n-ter Ordnung der Galois'schen Hauptmoduln ϱ-ter Stufe durch eine Gleichung $\varphi(xy) = 0$ charakterisirt ist, die x und y bis zur N-ten Potenz enthält, und bei P Simultansubstitutionen des x und y in sich übergeht, schliesst sich hieran die Aufgabe, diese Simultansubstitutionen wirklich aufzustellen. Da jeder Substitution, des x sowol, als des y, eine lineare ω-Substitution entspricht, so hat man zunächst zu untersuchen, wie die ω-Substitutionen einander zugeordnet sind.

Es werde also das Argument von x der Substitution

$$\omega' = \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

unterworfen, ebenso das von y der Substitution

$$\omega' = \frac{c + d\omega}{a + b\omega} \qquad (ad - bc = 1)$$

Sollen nun diese Substitutionen im eben definirten Sinne einander zugeordnet sein, so muss, wenn die Repräsentanten in der Form

$$\omega_x = \frac{1}{n}\frac{\gamma_x + \delta_x\omega}{\alpha_x + \beta_x\omega}, \quad \alpha_x : \beta_x : \gamma_x : \delta_x \equiv 1:0:0:1 \bmod \varrho,$$

angenommen werden

$$\frac{1}{n}\frac{\gamma_x + \delta_x \frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}}{\alpha_x + \beta_x \frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}} = \frac{c + d\,\frac{1}{n}\frac{\gamma_x+\delta_x\omega}{\alpha_x+\beta_x\omega}}{a + b\,\frac{1}{n}\frac{\gamma_x+\delta_x\omega}{\alpha_x+\beta_x\omega}} \tag{16}$$

sein, d. h.

$$\frac{(\alpha\gamma_x + \gamma\delta_x) + (\beta\gamma_x + \delta\delta_x)\,\omega}{n(\alpha\alpha_x + \gamma\beta_x) + n(\beta\alpha_x + \delta\beta_x)\,\omega} = \frac{(nc\alpha_x + d\gamma_x) + (nc\beta_x + d\delta_x)\,\omega}{(na\alpha_x + b\gamma_x) + (na\beta_x + b\delta_x)\,\omega} \tag{16a}$$

Da nun

$$n((\alpha\alpha_x + \gamma\beta_x)(\beta\gamma_x + \delta\delta_x) - (\alpha\gamma_x + \gamma\delta_x).\,n(\beta\alpha_x + \delta\beta_x)$$
$$= n(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha_x\delta_x - \beta_x\gamma_x) = n$$

$$na\alpha_x + b\gamma_x)(nc\beta_x + d\delta_x) - (nc\alpha_x + d\gamma_x)(na\beta_x + b\delta_x)$$
$$= n(ad - bc)(\alpha_x\delta_x - \beta_x\gamma_x) = n$$

so wird die Gleichung (16a) sicher erfüllt, wenn

$$\begin{aligned} \alpha\gamma_x + \gamma\delta_x &= \varepsilon(nc\alpha_x + d\gamma_x) \\ \beta\gamma_x + \delta\delta_x &= \varepsilon(nc\beta_x + d\delta_x) \\ n(\alpha\alpha_x + \gamma\beta_x) &= \varepsilon(na\alpha_x + b\gamma_x) \\ n(\beta\alpha_x + \delta\beta_x) &= \varepsilon(na\beta_x + b\delta_x) \end{aligned} \tag{17}$$

wobei $\varepsilon = \pm 1$ ist. Nach a, b, c, d aufgelöst, ergeben die Gleichungen (17)

$$\begin{aligned} a &= \varepsilon[\alpha\alpha_x\delta_x - \beta\alpha_x\gamma_x + \gamma\beta_x\delta_x - \delta\beta_x\gamma_x] \\ b &= n\varepsilon[-\alpha\alpha_x\beta_x + \beta\alpha_x^2 - \gamma\beta_x^2 + \delta\alpha_x\beta_x] \\ nc &= \varepsilon[\alpha\gamma_x\delta_x - \beta\gamma_x^2 + \gamma\delta_x^2 - \delta\gamma_x\delta_x] \\ d &= \varepsilon[-\alpha\beta_x\gamma_x + \beta\alpha_x\gamma_x - \gamma\beta_x\delta_x + \delta\alpha_x\delta_x] \end{aligned} \tag{18}$$

Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit können wir $\varepsilon = +1$ setzen; es bedeutet dies nur, dass die beiden Substitutionen

$$\omega' = \frac{c + d\omega}{a + b\omega} \quad \text{und} \quad \omega' = \frac{-c - d\omega}{-a - b\omega}$$

als gleichwertig betrachtet werden. Ferner muss noch

$$\alpha\gamma_x\delta_x - \beta\gamma_x^2 + \gamma\delta_x^2 - \delta\gamma_x\delta_x \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, n) \tag{19}$$

sein, damit c ganzzahlig werde. Denken wir uns α, β, γ, δ gegeben, so können wir über diese Werte, die ja nur *modulo* ϱ in betracht kommen, so verfügen, dass Gleichung (19) erfüllt wird, da n und ϱ teilerfremd sein sollen. Da endlich

$$\alpha_x : \beta_x : \gamma_x : \delta_x \equiv 1:0:0:1 \;(\mathrm{mod}\, \varrho)$$

so folgt noch, dass zwischen den Grössen a, b, c, d und α, β, γ, δ die Relationen bestehen

$$a : b : nc : d \equiv \alpha : n\beta : \gamma : \delta \;(\text{modulo } \varrho) \tag{20}$$

D a m i t i s t d i e Z u o r d n u n g d e r x-S u b s t i t u t i o n e n z u d e n y-S u b s t i t u t i o n e n b e r e i t s g e l e i s t e t. Man hat zu einer x-Substitution nur (in der Ende § 4. angegebenen Weise) die ω-Substitution $\frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}$ und zu diesem Wertesystem $\alpha : \beta : \gamma : \delta$ vermittels Gleichung (20) das entsprechende System $a : b : c : d$ zu bestimmen. Dann findet man mittels der § 4. angegebenen Formeln und Tabellen zu $\omega' = \frac{c + d\omega}{a + b\omega}$ die y-Substitution zunächst für die mit m_f bezeichnete Function und dann für jede andere Function m_c.

Es genügt diese Zuordnung für zwei geeignete Paare Simultansubstitutionen aufzustellen. Denn gehe die Gleichung $\varphi_i(xy) = 0$ in sich über erstlich bei der Substitution $x' = C(x)$, $y' = C_1(y)$ und ferner bei $x' = D(x)$, $y' = D_1(y)$, so entspricht der x-Substitution $C^\varrho D^\sigma C^\tau \ldots$ eo ipso die y-Substitution $C_1^\varrho D_1^\sigma C_1^\tau \ldots$, und da sich alle Substitutionen der ϱ-ten Stufe aus geeigneten zweien durch Combination und Wiederholung zusammensetzen lassen, so werden wir etwa zu $x' = A(x)$ und $x' = B(x)$ die entsprechenden y-Substitutionen aufsuchen, und haben damit die Frage nach der Zuordnung der Simultansubstitutionen erledigt.

Am einfachsten stellen sich die Verhältnisse dar, wenn $n \equiv 1$ *modulo* ϱ, dann ist einfach

$$a : b : c : d = \alpha : \beta : \gamma : \delta \;(\mathrm{mod}\, \varrho)$$

d. h. x und y erfahren simultan die nämlichen Substitutionen.

Als der nächst einfachste Fall ergibt sich $n \equiv -1$ *modulo* ϱ, für diesen wird

$$a:b:c:d \equiv \alpha:-\beta:-\gamma:\delta \pmod{\varrho}$$

und es zeigt sich, dass die hierher gehörigen drei Fälle $n \equiv -1$ *mod* 3, 4, 5 sich nach übereinstimmenden Methoden behandeln lassen.

Hiermit sind für $\varrho = 2, 3, 4$ sämtliche Fälle erschöpft, und es bleiben noch drittens die beiden Fälle $n \equiv \pm 2$ *mod* 5, die sich gleichfalls zusammen behandeln lassen.

§ 10.

Der Fall $n \equiv 1\ (mod\ \varrho)$.

Hier handelt es sich um die Aufstellung einer Modulargleichung $\varphi(xy) = O$, die in sich übergeht, wenn x und y den nämlichen linearen Substitutionen unterworfen werden. Führen wir, um die dabei auftretenden Nenner zu vermeiden, homogene Variabeln ein, setzen also $x = \frac{x_1}{x_2}$, $y = \frac{y_1}{y_2}$, so erhalten wir, da x und y bis zur N-ten Potenz austeigen, eine doppeltbinäre Form $\varphi(x_1 x_2 y_1 y_2)$ N-ter Ordnung in beiden Variabelreihen, die bei P Simultansubstitutionen von x_1, x_2, y_1, y_2 in sich übergeht.

Soll die homogen geschriebene Modulargleichung dabei (nicht blos bis auf einen constanten Factor) in sich übergehen, so müssen, wie leicht einzusehen, die Substitutionen die Determinante $+1$ haben x_1, x_2, y_1, y_2 bedeuten Modulformen, und die den linearen ω-Substitutionen entsprechenden linearen Substitutionen dieser Modulformen haben beim Doppelverhältniss, der Tetraeder- und der Octaederirrationalität zunächst noch die Determinante -1, bezüglich $\alpha = \sqrt[3]{1}$, sie können jedoch, wie es bereits geschehen, durch einen Zusatzfactor (i, bez. α) auf die Determinante 1 gebracht werden, was für die nichthomogenen Substitutionen, also auch für die nichthomogen zu schreibende Modulargleichung ohne Einfluss, für die folgenden Betrachtungen (mit homogenen Variabeln) aber wesentlich vereinfachend ist.

Für die Untersuchung der Eigenschaften und Aufstellung der oben beschriebenen doppeltbinären Formen bieten sich zwei Wege dar. Nach der einen Methode schreibt man zunächst doppeltbinäre Formen der verschiedenen Ordnungen mit unbestimmten Coefficienten hin, unterwirft sie den Simultansubstitutionen, wobei man noch durch zweckmässige Abkürzungen die Rechnung sehr vereinfachen kann, und vergleicht die neu erhaltenen Formen mit den alten. Dadurch

[redacted]

ergeben sich eine Reihe Relationen zwischen den Coefficienten und findet man dann mit verhältnissmässig nicht übergrossem Rechnungsaufwand für die ersten Ordnungen bis etwa zur sechsten, dass alle in Betracht kommenden doppeltbinären Formen der verlangten Substitutionseigenschaft sich aus einigen wenigen Formen niederer Ordnung und derselben Eigenschaft rational zusammensetzen.[1]) Dieser directe Weg liess jedoch nicht übersehen, dass auch die Formen beliebighoher Ordnung rational aus denen niederer Ordnungen zusammensetzbar sind. Dieser Nachweis ergibt sich in ziemlich einfacher Weise, wenn man das Formensystem mittels einiger invariantentheoretischer Sätze aufzustellen sucht, wie es im Folgenden geschehen soll.

Setzen wir in $\varphi(x_1 x_2 y_1 y_2)$ einmal $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, so erhalten wir eine einfachbinäre Form der $2N$-ten Ordnung:

$$\varphi(x_1 x_2 x_1 x_2) = \psi(x_1 x_2)$$

die bei gewissen P Substitutionen in sich übergeht. Solch eine Substitution sei

$$x_1' = ax_1 + bx_2, \qquad x_2' = cx_1 + dx_2; \qquad (ad - bc = +1)$$

Dann ist also

$$\psi(x_1, x_2) = \psi(ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)$$

folglich

$$\frac{\partial\psi(x_1x_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial\psi(ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)}{\partial(ax_1 + bx_2)}a + \frac{\partial\psi(ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)}{\partial(cx_1 + dx_2)}c$$

$$\frac{\partial\psi(x_1x_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial\psi(ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)}{\partial(ax_1 + bx_2)}b + \frac{\partial\psi(ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)}{\partial(cx_1 + dx_2)}d$$

und daher

$$\frac{\partial\psi(x_1x_2)}{\partial x_1}y_1 + \frac{\partial\psi(x_1x_2)}{\partial x_2}y_2 = \frac{\partial\psi(ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)}{\partial(ax_1 + bx_2)}(ay_1 + by_2) + \frac{\partial\psi(ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)}{\partial(cx_1 + dx_2)}(cy_1 + dy_2)$$

d. h. auch die Form

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}y_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}y_2$$

---

1) Auf diesem Wege suchte ich zunächst das volle System der Doppelverhältnissformen und der Tetraederformen aufzustellen; die wachsende Complicirtheit der Substitutionen beim Oktaeder und Ikosaeder drängte jedoch dazu, einen andern Weg zu suchen, und so gelangte ich zu dem hier dargelegten Wege.

geht in sich über, wenn x_1, x_2 und y_1, y_2 simultan den nämlichen Substitutionen unterworfen werden, die $\psi(x_1x_2)$ in sich überführen. Diese aus ψ abgeleitete Form

$$\psi_1(x_1x_2y_1y_2) = \frac{1}{2N}\left[\frac{\partial\psi}{\partial x_1}y_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}y_2\right]$$

bezeichnet man bekanntlich als erste Polare von $\psi(x_1x_2)$ nach y.[1]) Es leuchtet ein, dass bei Fortsetzung dieses Processes, d. h. bei Bildung von

$$\psi_2(x_1x_2y_1y_2) = \frac{1}{(2N-1)}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}y_1 + \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}y_2\right)$$
$$= \frac{1}{2N.(2N-1)}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}y_1^2 + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\,\partial x_2}y_1y_2 + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}y_2^2\right)$$

u. s. w. sich dieses Verhalten fortsetzt. Zugleich ist infolge des Eulerschen Satzes

$$\psi_1(x_1x_2y_1y_2) = \psi(x_1x_2)$$
$$\psi_2(x_1x_2y_1y_2) = \psi(x_1x_2)$$

u. s. w. wenn $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$ gesetzt wird.

So erhalten wir durch N-malige Ausführung dieses „Polarisations-Processes" eine doppeltbinäre Form, die in den beiden Variabelreihen x_1x_2 und y_1y_2 je von N-ter Ordnung ist, und ungeändert bleibt, wenn auf x_1, x_2, y_1, y_2 die Substitutionen ausgeübt werden, die $\varphi(x_1x_2y_1y_2)$ ungeändert lassen. Bezeichnen wir die N-malige Polarisation von $\psi(x_1x_2)$ durch eine eckige Klammer und den Index N, also $[\psi(x_1x_2)]_N$, so ist

$$\{\varphi(x_1x_2y_1y_2) - [\psi(x_1x_2)]_N\}_{x=y} = O$$

d. h. φ und $[\psi]_N$ können sich nur um Glieder unterscheiden, die für $x = y$ verschwinden, den Factor $x - y$, homogen $x_1y_2 - x_2y_1$ tragen. Daher ist

$$\varphi(x_1x_2y_1y_2) = [\varphi(x_1x_2x_1x_2)]_N + (x_1y_2 - x_2y_1).\varphi_1(x_1x_2y_1y_2) \qquad (21)$$

$\varphi_1(x_1x_2y_1y_2)$ ist eine doppeltbinäre Form, die in beiden Variabelreihen von der Ordnung $N-1$ ist. Uebt man jetzt auf (21) eine der Simultansubstitutionen von φ in sich aus,

$$x_1' = ax_1 + bx_2,\quad x_2' = cx_1 + dx_2,\quad y_1' = ay_1 + by_2,$$
$$y_2' = cy_1 + dy_2;\quad (ad - bc = 1)$$

so geht φ und $[\psi]_N$ in sich über, $x_1y_2 - x_2y_1$ wird aber bekanntlich

1) Man vergleiche etwa Clebsch, Binäre Formen S. 13 oder Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie S. 203 ff.

$$\begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax_1+bx_2 & cx_1+dx_2 \\ ay_1+by_2 & cy_1+dy_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

Wegen dieser Eigenschaft heisst die Form $x_1y_2 - x_2y_1$, die man auch mit (xy) bezeichnet, die identische Covariante. Da also φ, $[\psi]_N$ und (xy) ungeändert bleiben, so muss bei der Ausführung der Simultansubstitutionen auch φ_1 ungeändert bleiben; daher ist φ_1 in der Form darstellbar

$$\varphi_1(x_1x_2y_1y_2) = [\varphi_1(x_1x_2\,x_1x_2)]_{N-1} + (xy)\,.\,\varphi_2(x_1x_2y_1y_2)$$

wo φ_2 in x und y von der Ordnung $N-2$ ist und bei den P Simultansubstitutionen in sich übergeht; φ_2 ist daher wieder analog darstellbar. $\varphi_1(x_1x_2y_1y_2)$ ist eine einfachbinäre Form der Ordnung $2N-2$, die jetzt mit $\varphi_{2N-2}(x_1x_2)$ bezeichnet sei. So erkennt man schliesslich, dass φ in der Form darstellbar ist[1])

$$\begin{aligned}\varphi(x_1x_2y_1y_2) = [\varphi(x_1x_2x_1x_2)]_N + (xy)[\varphi_{2N-2}(x_1x_2)]_{N-1} \\ + (xy)^2[\varphi_{2N-4}(x_1x_2)]_{N-2} + \ldots + (xy)^{N-1}[\varphi_2(x_1x_2)]_1 + c_N(xy)^N\end{aligned} \quad (22)$$

Die Modulargleichung setzt sich also mittels Potenzen der identischen Covariante aus Polaren einfachbinärer Formen mit P Substitutionen in sich rational zusammen.

Die Darstellbarkeit der doppeltbinären Formen mittels Polaren und Potenzen von (xy) ist übrigens nicht eine Folge der speciellen Eigenschaften der Form $\varphi(x_1x_2y_1y_2)$ — diese Eigenschaft zieht nur besondere Eigenschaften der Formen $\varphi_x(x_1x_2)$ nach sich — sondern jede doppeltbinäre Form lässt sich in dieser Weise darstellen. Denn $\varphi(x_1x_2x_1x_2)$ als Form $2N$-ter Ordnung hat $2N+1$ (homogene) Coefficienten, $\varphi_{2N-2}(x_1x_2)$ hat ebenso $2N-1$, u. s. f. bis $\varphi_2(x_1x_2)$ drei und $\varphi_0(x_1x_2) = c_N$ einen Coefficienten hat. Gleichung (22) hat also rechts

$$(2N+1) + (2N-1) + (2N-3) + \ldots + 3 + 1 = (N+1)(N+1)$$

Coefficienten, und ebensoviel hat die doppeltbinäre Form auf der linken Seite.

Wir haben nun zunächst alle einfach binären Formen mit P Substitutionen in sich aufzustellen. Jede solche Form setzt sich[2])

---

1) Man vergleiche Clebsch, Binäre Formen § 7. Die hier gegebene Ableitung dieses Satzes findet sich bei Herrn Gordan, Annalen 3 („Ueber die Bildung der Resultante zweier Gleichungen.") p. 364.

2) Annalen IX p. 194 ff. (Binäre Formen mit Substitutionen in sich) und Ikosaeder p. 48 ff.

rational aus Potenzen der wohlbekannten Formen $F_1(x_1x_2)$, $F_2(x_1x_2)$, $F_3(x_1x_2)$ zusammen, (die in den Gleichungen 2. und 3. auftreten,) und kann daher in der Form angenommen werden

$$\varphi_i(x_1, x_2) = F_1^{\alpha} F_2^{\beta} F_3^{\gamma} \Pi_x (a_x F_1^3 + b_x F_2^2)$$

wo $\alpha\beta\gamma$ Ganzzahlen, $a_x b_x$ beliebige Zahlen sind.[1]) Zwischen den Formen F_1, F_2, F_3 besteht natürlich die Relation

$$F_1^3 = F_2^2 + F_3 \varrho$$

Da von den Formen φ_i die Polaren zu bilden sind, und die Polare einer Summe gleich der Summe der Polaren der Summanden ist, so genügt es also, von allen Formen

$$F_1^a F_2^b F_3^c$$

diejenigen zu polarisiren, die gerader Ordnung sind und bei den Substitutionen der ϱ-ten Stufe in sich übergehen (den Factor $+1$ erhalten). Haben diese Substitutionen die Determinante 1, so erhalten F_1^3, F_2^2 und $F_3\varrho$ dabei einen Factor, dessen absoluter Betrag 1 ist. Dieser Factor kann also nur $+1$ oder eine Einheitswurzel sein, (eine zweite, dritte, vierte, oder fünfte) da andere Irrationalitäten in den Substitutionsformeln nicht auftreten, und werden daher bei jeder Stufe Formen $F_1^{3\nu}$, $F_2^{2\nu}$, $F_3^{\varrho\nu}$ ungeändert bleiben, wobei $\nu \leqq 5$ angenommen werden kann. Man wird also die Einheitswurzeln bestimmen, die F_1, F_2, F_3 bei den Simultansubstitutionen als Factoren er-

---

1) Dieses Verhalten hat, wie die Invariantentheorie zeigt, seinen Grund darin, dass sich zu F_3 als Grundform F_1 als Hesse'sche Form, F_2 als Functionaldeterminante von F_1 und F_3 ergibt. Die Identität $F_1^3 = F_2^2 + F_3\varrho$ ist nur ein Specialfall des allgemeinen Satzes, dass zwischen Grundform, Hesse-scher Form und Functionaldeterminante stets eine gewisse Identität besteht. Zugleich sei an dieser Stelle auf den Unterschied hingewiesen, der zwischen unsern speciellen Betrachtungen und den allgemeinen Ueberlegungen der Invariantentheorie besteht. Er beruht im wesentlichen darauf, dass wir hier nur die endliche Anzahl linearer Transformationen in Betracht ziehen, die die Formen F_3, F_1, F_2 in sich überführen. Die Invariantentheorie operirt jedoch mit allgemeinen Formen (mit allgemeinen Coefficienten), und mit der Gesamtheit der linearen Transformationen. Sie zeigt, dass man das nämliche Resultat erhält, ob man erst die Grundform einer linearen Transformation unterwirft und dann von der transformirten Form die Hesse'sche Form und die Functionaldeterminante bildet, oder ob man erst von der Grundform die beiden andern Formen ableitet und dann transformirt. Bleibt noch, wie es hier der Fall ist, die Grundform bei einer (endlichen) Anzahl linearer Transformationen ungeändert, so müssen es infolgedessen auch die abgeleiteten beiden Formen bei den nämlichen Transformationen bleiben.

halten, und dann die niedersten Formen $F_1^a F_2^b F_3^c$ bilden, welche den Factor 1 bei den Substitutionen erhalten. So ergeben sich eine Reihe verschiedene Formen $G_x = F_1^a F_2^b F_3^c$, wobei man noch $0 \leqq a \leqq 3\nu$, $0 \leqq b \leqq 2\nu$, $0 \leqq c \leqq \varrho\nu$ voraussehen kann; die Zahl dieser Formen ist sicher endlich und wird sich im allgemeinen noch mittels der Identität $F_1^3 = F_2^2 + F_3^\varrho$ erheblich reduciren lassen. Ist nun

$$F = F_1^\alpha F_2^\beta F_3^\gamma$$

eine Form beliebig hoher Ordnung, so lässt sie sich in ein Product aus Potenzen der ebenerwähnten Formen G_x zerlegen. (Diese Zerlegung braucht nicht auf nur eine Weise möglich zu sein.) So sei

$$F = F_1^\alpha F_2^\beta F_3^\gamma = G_1^{\alpha_0} G_2^{\beta_0} G_3^{\gamma_0} G_4^{\delta_0} \ldots$$

und seien $E_1 E_1 E_3$ u. s. f. die aus G_1, G_2, G_3 u. s. f. gebildeten Polaren gleicher Ordnung in beiden Variabelreihen, so ist zufolge Gleichung (22)

$$E_1^{\alpha_0} E_2^{\beta_0} E_3^{\gamma_0} E_4^{\delta_0} \ldots = [G_1^{\alpha_0} G_2^{\beta_0} G_3^{\gamma_0} G_4^{\delta_0} \ldots] + (xy)[\psi_{2l-2}]_{l-1} + \ldots$$

wenn die Ordnung von F mit $2l$ bezeichnet wird. Die zu berechnende Polare der Form $2l$-ter Ordnung drückt sich also rational durch die Polaren $E_1 E_2 \ldots$ und Polaren von Formen $(2l-2)$-ter und niederer Ordnungen aus. Ebenso ist die Polare der Form $(2l-2)$-ter Ordnung wieder auf Polaren niederer Ordnungen zurückführbar, und so folgt:

Die Modulargleichung ist im Falle $n \equiv 1$ *modulo* ϱ rational aus einer endlichen Anzahl Polaren (E_x) und Potenzen von (xy) darstellbar.

Die Modulargleichung kann also in der Form geschrieben werden

$$\text{Rat}((xy),\ E_1, E_2, E_3 \ldots) = 0$$

oder wenn wir gerade und ungerade Potenzen von (xy) trennen:

$$\varphi(x_1 x_2 y_1 y_2) = R_1((xy)^2,\ E_1, E_2 \ldots) + (xy) R_2((xy)^2 E_1, E_2, \ldots) = 0$$

Bei Vertauschung von x und y entsteht, da (xy) das Zeichen wechselt, E_1, E_2 u. s. w. aber unverändert bleiben,

$$\varphi(y_1 y_2 x_1 x_2) = \pm\, \varphi(x_1 x_2 y_1 y_2) = R_1 - (xy) . R_2$$

also entweder $\varphi = R_1$ oder $\varphi = (xy) . R_2$. Letzteres ist aber nicht möglich, da φ irreducibel sein soll, und wird daher

$$\varphi(xy) = \varphi(yx) = R((xy)^2,\ E_1 E_2 E_3 \ldots) \tag{23}$$

Die Modulargleichung bleibt also bei Vertauschung von x und y ungeändert.

Zuletzt sei noch darauf hingewiesen, dass in diesem Falle $n \equiv 1$ sämtliche P Moduln dieselbe Modulargleichung ergeben, da die $P-1$ übrigen Modulargleichungen aus einer erhalten werden, wenn man in ihr x und y gleichzeitig den nämlichen Substitutionen der ϱ-ten Stufe unterwirft.

§ 11.

Der Fall $n \equiv -1$ *modulo* ϱ.

Hier entspricht der Substitution S, d. h. $\omega' = \omega + 1$, homogen

$$\omega_1' = \pm\, \omega_1, \quad \omega_2' = \pm\,(\omega_1 + \omega_2)$$

d. h. $\alpha:\beta:\gamma:\delta \equiv 1:0:1:1$, die Substitution $1:0:-1:1$, d. h. $\omega_1' = \pm\,\omega_1$, $\omega_2' = \pm\,(-\omega_1 + \omega_2)$, nichthomogen $\omega' = \omega - 1$, d. h. $S-1$.

Der ω-Substitution T, d. h. $\omega' = -\dfrac{1}{\omega}$, homogen $\omega_1' = \pm\,\omega_2$, $\omega_2' = \mp\,\omega_1$, $(\alpha:\beta:\gamma:\delta \equiv 0:\pm 1:\mp 1:0)$ entspricht ebenso $\omega_1' = \mp\,\omega_2$, $\omega_2' = \pm\,\omega_1$ $(\alpha:\beta:\gamma:\delta \equiv 0:\mp 1:\pm 1:0)$, nichthomogen $\omega' = -\dfrac{1}{\omega}$, d. h. T.

Entspricht nun bei der Function x_l (also a_l oder O_l oder η_l), auf deren Betrachtung wir uns hier beschränken wollen, der ω-Substitution T die Substitution:

$$x_1' = \pm\,(ax_1 + bx_2), \quad x_2' = \pm\,(cx_1 + dx_2)$$

so lautet die zugehörige y-Substitution:

$$y_1' = \mp\,(ax_1 + bx_2) \qquad y_2' = \mp\,(cx_1 + dx_2)$$

da die Substitution $\omega_1' = \mp\,\omega_2$, $\omega_2' = \pm\,\omega_1$ durch Combination der beiden Substitutionen $\omega_1' = \pm\,\omega_2$, $\omega_2' = \mp\,\omega_1$ und $\omega_1' = -\,\omega_1$, $\omega_2' = -\,\omega_2$ entsteht, deren ersterer die Substitution $y_1' = \pm\,(ay_1 + by_2)$, $y_2' = \pm\,(cy_1 + dy_2)$, deren letzterer aber $y_1' = -\,y_1$, $y_2' = -\,y_2$ entspricht, da y_1, y_2 $(a_1, a_2, o_1, o_2, \eta_1, \eta_2)$ Modulformen ungerader Ordnung sind. (Bei der zweiten Stufe findet dieser Zeichenwechsel nicht statt, da λ_1, λ_2 Formen -2-ter Ordnung sind, und überdies $-1 \equiv +1$ *modulo* 2 ist.)

Wir haben daher für $\varrho = 3, 4, 5$ folgende Systeme von Simultansubstitutionen:

Für die dritte Stufe:

$$\begin{aligned} a_1' &= \pm\,\alpha^2 a_1, & a_2' &= \pm\,\alpha a_2,\\ b_1' &= \pm\,\alpha b_1, & b_2' &= \pm\,\alpha^2 b_2;\\ a_1' &= \frac{\pm 1}{\sqrt{-3}}(a_1+2a_2), & a_2' &= \frac{\pm 1}{\sqrt{-3}}(a_1-a_2),\\ b_1' &= \frac{\mp 1}{\sqrt{-3}}(b_1+2b_2), & b_2' &= \frac{\mp 1}{\sqrt{-3}}(b_1-b_2). \end{aligned} \tag{24a}$$

Für die vierte Stufe:

$$\begin{aligned} o_1' &= \pm\,\frac{1+i}{\sqrt{2}}\,o_1, & o_2' &= \pm\,\frac{1-i}{\sqrt{2}}\,o_2,\\ p_1' &= \pm\,\frac{1-i}{\sqrt{2}}\,p_1, & p_2' &= \pm\,\frac{1+i}{\sqrt{2}}\,p_2;\\ o_1' &= \frac{\pm 1}{\sqrt{-2}}(-o_1+o_2), & o_2' &= \frac{\pm 1}{\sqrt{-2}}(o_1+o_2),\\ p_1' &= \frac{\mp 1}{\sqrt{-2}}(-p_1+p_2), & p_2' &= \mp\,\frac{1}{\sqrt{-2}}(p_1+p_2); \end{aligned} \tag{24b}$$

Endlich für die fünfte Stufe:

$$\eta_1' = \pm\,\varepsilon^3\eta_1, \quad \eta_2' = \pm\,\varepsilon^2\eta_2, \quad \zeta_1' = \pm\,\varepsilon^2\zeta_1, \quad \zeta_2' = \pm\,\varepsilon^3\zeta_2 \tag{24c}$$

$$\eta_1' = \frac{\pm 1}{\sqrt{5}}[-(\varepsilon-\varepsilon^4)\eta_1+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\eta_2], \quad \eta_2' = \frac{\pm 1}{\sqrt{5}}[(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\eta_1+(\varepsilon-\varepsilon^4)\eta_2],$$

$$\zeta_1' = \frac{\mp 1}{\sqrt{5}}[-(\varepsilon-\varepsilon^4)\zeta_1+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\zeta_2], \quad \zeta_2' = \frac{\mp 1}{\sqrt{5}}[(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\zeta_1+(\varepsilon-\varepsilon^4)\zeta_2].$$

Dabei sind die transformirten a, o, η respective mit b. p, ζ bezeichnet. Man erhält die Substitutionen für b_1, b_2; p_1, p_2; ζ_1, ζ_2 aus denen für a_1, a_2; o_1, o_2; η_1, η_2, wenn man überall α durch $\frac{1}{\alpha} = \alpha^2$, i durch $\frac{1}{i} = -i$, ε durch $\frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon^4$ ersetzt. Dabei geht $\sqrt{-3} = \alpha - \alpha^2$ über in $\alpha^2 - \alpha = -\sqrt{-3}$, $\sqrt{-2} = i\sqrt{2}$ in $-i\sqrt{2} = -\sqrt{-2}$, während $\sqrt{5} = \varepsilon + \varepsilon^4 - \varepsilon^2 - \varepsilon^3$ seinen Wert behält.

Betrachten wir zunächst nur die ersten Substitutionen der drei Stufen, (die man mit $x' = A_{(x)}$, $y' = A_{(y)}^{-1}$ bezeichnen könnte,) so erhalten wir die y-Substitutionen, die $n \equiv +1 \bmod \varrho$ entsprechen, (also den x-Substitutionen identisch sind,) wenn y_1, y_2 ersetzt werden durch y_2, y_1, oder allgemeiner γy_2, $\gamma' y_1$. Man wird nun versuchen, ob sich durch geeignete Wahl von γ und γ' auch die übrigen (mit B zu

bezeichnenden) Substitutionen $n \equiv -1$ auf die Substitutionen $n \equiv +1$ zurückführen lassen. Das gelingt in der Tat für alle drei Fälle.

Erstens bei der dritten Stufe geht

$$b_1' = \mp \frac{1}{\sqrt{-3}}(b_1 + 2b_2), \quad b_2' = \mp \frac{1}{\sqrt{-3}}(b_1 - b_2),$$

wenn b_1, b_2 durch γb_2, $\gamma' b_1$ ersetzt werden, über in

$$\gamma b_2' = \mp \frac{1}{\sqrt{-3}}(\gamma b_2 + 2\gamma' b_1), \quad \gamma' b_1' = \mp \frac{1}{\sqrt{-3}}(\gamma b_2 - \gamma' b_1);$$

$\gamma = 2$, $\gamma' = -1$ gesetzt, entsteht gerade

$$b_1' = \pm \frac{1}{\sqrt{-3}}(2b_2 + b_1), \quad b_2' = \pm \frac{1}{\sqrt{-3}}(-b_2 + b_1)$$

Geht $f(a_1 a_2 b_1 b_2)$ bei den zu $n \equiv -1 \pmod 3$ gehörigen Tetraedersubstitutionen in sich über, so geht $f(a_1, a_2, 2b_2, -b_1)$ bei den zu $n \equiv +1 \pmod 3$ gehörigen Tetraedersubstitutionen in sich über. Dasselbe Verhalten zeigt auch $f(2a_2, -a_1, b_1, b_2)$. Nun ist nach den Untersuchungen des vorigen Paragraphen

$$f(a_1, a_2, 2b_2, -b_1) = \varphi(a_1 a_2 b_1 b_2) = \mathrm{Rat}((ab), E_1(a_1 a_2 b_1 b_2), E_2 \ldots)$$

(Es können auch ungerade Potenzen von (ab) auftreten, da man noch nicht weisss, ob auch $f(a_1, a_2, 2b_2, -b_1) = \pm f(b_1 b_2, 2a_2, -a_1)$ ist.) Jedenfalls wird

$$f(a_1 a_2 b_1 b_2) = \mathrm{Rat}\left(E_0, E_1\left(a_1, a_2, -b_2, \frac{b_1}{2}\right), E_2\left(a_1, a_2, -b_2, \frac{b_1}{2}\right) \ldots\right)$$

wo E_0 die $a_1 b_2 - a_2 b_1$ entsprechende Form $a_1 b_1 + 2a_2 b_2$ ist.

Genau dieselben Schlussweisen führen zweitens bei der vierten Stufe zu dem Resultat, dass wenn $f(o_1 o_2 p_1 p_2)$ bei den Substitutionen (24b) in sich übergeht, dann $f(o_1, o_2, -p_2, p_1) = \varphi(o_1 o_2 p_1 p_2)$ bei den zu $n \equiv 1 \bmod 4$ gehörigen Substitutionen in sich übergeht, und dass daher

$$f(o_1 o_2 p_1 p_2) = \mathrm{Rat}(o_1 p_1 + o_2 p_2, E_1(o_1, o_2 - p_2, p_1), E_2 \ldots)$$

Endlich ergibt sich drittens bei der fünften Stufe, dass die Modulargleichung für $n \equiv -1 \bmod 5$ die Gestalt haben muss

$$f(\eta_1 \eta_2 \zeta_1 \zeta_2) = \varphi(\eta_1, \eta_2, -\zeta_2, \zeta_1) = \mathrm{Rat}(\eta_1 \zeta_1 + \eta_2 \zeta_2, E_1(\eta_1, \eta_2, -\zeta_2, \zeta_1) \ldots)$$

wenn $\varphi(\eta_1 \eta_2 \zeta_1 \zeta_2)$ bei den zu $n \equiv +1 \bmod 5$ gehörigen Substitutionen in sich übergeht. So ergibt sich das Resultat:

Auch für $n \equiv -1 \bmod \varrho$ lässt sich die Modulargleichung aus einer endlichen Anzahl Formen rational zusammensetzen.

Auch bei den zu $n \equiv -1$ gehörigen Modulargleichungen ist der ursprüngliche und der transformirte Modul vertauschbar. Denn sei $\varphi(xy) = o$ solch eine Modulargleichung für $x_I = a_I$, o_I oder η_I, und sei

$$\varphi(xy) = \pm \varphi_x(yx)$$

Da

$$\varphi(A_{(x)}, A_{(y)}^{-1}) = \varphi(xy)$$

so ist

$$\varphi_x(A_{(y)}^{-1}, A_{(x)}) = \varphi_x(yx)$$

Führt man diese Operation $x' = A(x)$, $y' = A_{(y)}^{-1}$ $\varrho - 1$ mal aus, so entsteht, da $A^{-(\varrho-1)} = A$ ist,

$$\varphi_x(A_{(y)}, A_{(x)}^{-1}) = \varphi_x(yx) \quad \text{und} \quad \varphi^x(A_{(x)}, A_{(y)}^{-1}) = \varphi_x(xy)$$

φ und φ_x haben also diese Simultansubstitution gemeinsam. Da ferner noch

$$\varphi(xy) = \varphi(B_x B_y) = \varphi_x(B_y B_x) = \varphi_x(yx)$$

so haben φ und φ_x noch eine zweite Simultansubstitution $x' = B_{(x)}$, $y' = B_{(y)}$ gemeinsam, haben also alle Substitutionen gemeinsam und müssen daher identisch sein, so dass $\varphi(xy) = \pm \varphi(yx)$

Um nun noch aus der Modulargleichung für x_I die für x_c abzuleiten, hat man einfach x und y durch C_x^{-1}, C_y^{-1} zu ersetzen, (da $x_I = C^{-1}(x_c)$ u. s. w.) und erhält $\varphi(C_x^{-1}, C_y^{-1}) = 0$. Bezeichnet jetzt C_1 die Substitution, die aus C entsteht, wenn A mit A^{-1} vertauscht wird, so ist auch

$$\varphi((x)C^{-1}, (y)C^{-1}) = \varphi((x)C^{-1}C, (y)C^{-1}C_1) = \varphi(x, (y)C^{-1}C_1)$$

Man erhält also auch die übrigen Modulargleichungen für die Functionen x_c, indem man auf y (oder x) in $\varphi(xy)$ die Substitution $C^{-1}C_1$ ausübt. Die Modulargleichung für x_c wird von der für eine andere Function x_D im allgemeinen verschieden sein, ausser wenn

$$C^{-1}C_1 = D^{-1}D_1$$

Ist $D = BC$, so ist $D_1 = BC_1$ und $D^{-1} = C^{-1}B$, also

$$D^{-1}D_1 = C^{-1}BBC_1 = C^{-1}C_1$$

d. h. die Modulargleichungen für x_c und x_{Bc} sind identisch. **Man erhält daher $\frac{1}{2}P$ verschiedene Modulargleichungen für die P Functionen x.**

§ 12.

Die Fälle $n \equiv \pm 2$ *modulo* 5.

Zunächst der Fall $n \equiv +2 \bmod 5$!

Hier entspricht der Substitution $S(\equiv 1:0:1:1 \bmod 5)$ die Substitution $1:0:2:1 \bmod 5$, d. h. S^2. Der Substitution $T(\equiv 0:1:4:0 \bmod 5)$ entspricht eine Substitution $0:2:2:0 \bmod 5$, d. h. eine Substitution der Form

$$\omega' = \frac{(5c_0+2)+5d_0\,\omega}{5a_0+(5b_0+2)\,\omega}$$

wobei

$$25a_0d_0-(5c_0+2)(5b_0+2) = 1$$

Solch eine Substitution ist z. B.

$$\omega' = \frac{12+5\omega}{5+2\omega} = 2 - \cfrac{1}{-2-\cfrac{1}{2+\omega}}, \text{ d. h. } S^2TS^3TS^2$$

Der Substitution T des Argumentes von η entspricht also $S^2TS^3TS^2$ für das Argument von ζ. Bei der Modulargleichung für η_l und ζ_l haben wir also die Simultansubstitutionen

$$\eta' = (\eta)A, \quad \zeta' = (\zeta)A^2$$

und

$$\eta' = (\eta)B, \quad \zeta' = (\zeta)A^2BA^3BA^2 = (\zeta)CB$$

fertig ausgerechnet:

$$\eta_1' = \pm\varepsilon^3\eta_1, \quad \eta_2' = \pm\varepsilon^2\eta_2, \quad \zeta_1' = \pm\varepsilon\zeta_1, \quad \zeta_2' = \pm\varepsilon^4\zeta_2 \qquad (25a)$$

und

$$\begin{aligned} \eta_1' &= \pm\frac{1}{\sqrt{5}}[-(\varepsilon-\varepsilon^4)\eta_1+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\eta_2], \\ \eta_2' &= \pm\frac{1}{\sqrt{5}}[(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\eta_1+(\varepsilon-\varepsilon^4)\eta_2], \\ \zeta_1' &= \mp\frac{1}{\sqrt{5}}[-(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\zeta_1+(\varepsilon^4-\varepsilon)\zeta_2], \\ \zeta_2' &= \mp\frac{1}{\sqrt{5}}[(\varepsilon^4-\varepsilon)\zeta_1+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\zeta_2] \end{aligned} \qquad (25b)$$

Die Substitution, welche ζ erleidet, kann aus der Substitution des η gefunden werden, indem man in dieser überall ε durch ε^2 ersetzt, wobei $\sqrt{5} = \varepsilon-\varepsilon^2-\varepsilon^3+\varepsilon^4$ das Zeichen wechselt.

Wir stellen noch einige besonders einfache Simultansubstitutionen auf. Der η-Substitution $C = A^2BA^3BA^2B$ entspricht, wie eine kleine Rechnung ergibt, die ζ-Substitution C, und so erhalten wir

$$\eta_1' = \pm \eta_2, \quad \eta_2' = \mp \eta_1, \quad \zeta_1' = \pm \zeta_2, \quad \zeta_2' = \mp \zeta_1 \tag{25c}$$

Endlich ergeben ganz analoge Betrachtungen, wie wir sie (§ 6) über die Vertauschbarkeit des ursprünglichen und des transformirten Moduls anstellten, dass bei Vertauschung von η und ζ die Modulargleichung in sich übergeht, wenn man nach der Vertauschung noch ζ durch $-\frac{1}{\zeta}$ ersetzt, also bei der Simultansubstitution

$$\eta_1' = \pm \zeta_2, \quad \eta_2' = \mp \zeta_1, \quad \zeta_1' = \pm \eta_1, \quad \zeta_2' = \pm \eta_2 \tag{25d}$$

Der für den Fall $n \equiv +1$ angewandte Weg der Aufstellung des vollen Formensystems versagt hier, da die betreffenden Formen nur in sich übergehen, wenn man η_1, η_2 und ζ_1, ζ_2 den nämlichen Substitutionen unterwirft. Ausser dem selbstverständlichen, aber in der Durchführung complicirten Wege der Aufstellung mittels unbestimmter Coefficienten bieten sich jedoch zwei andere Wege dar, um das volle Formensystem zu den Substitutionen (25) zu ermitteln. Der erstere rührt von Herrn Gordan[1]) und beruht auf der Weiterbildung gewisser invariantentheoretischer Prozesse. Da Herr Gordan jedoch dabei auch Formen in Betracht zieht, die in beiden Variabelreihen von verschiedener Ordnung sind, so erscheint mir für meine Zwecke der zweite Weg einfacher, der sich an die Theorie der Gleichungen 5. Grades anschliesst, und der im Folgenden dargelegt werden soll.

Wir interpretiren die Grössen $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$ und $\zeta = \frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ als Parameter für die beiden Geradenschaaren eines Hyperboloides, so dass also jedes Wertepaar η, ζ einen Punkt desselben darstellt. Unterwerfen wir ein gegebenes Wertesystem $\eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2$ den 120 homogenen Simultansubstitutionen, die den 60 nichthomogenen Ikosaedersubstitutionen entsprechen, so ergeben natürlich je zwei nur durch das Vorzeichen unterschiedene Substitutionen den nämlichen Punkt $\frac{\eta_1}{\eta_2}, \frac{\zeta_1}{\zeta_2}$, und der Punkt, der das erstgenannte Wertesystem $\eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2$ darstellt, erhält 60 Lagen. Da die 120 Substitutionen eine Gruppe bilden, so werden durch jede dieser Substitutionen die 60 Punkte zwar permutirt, in ihrer Gesamtheit aber erhalten.

Behufs Aufstellung einer geeigneten Gleichung für die Fläche 2-ter Ordnung führen wir Pentaedercoordinaten ein, d. h. fünf homogene Coordinaten $z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4$, zwischen denen die Identität besteht

1) Ueber die Auflösung der Gleichungen vom 5. Grade. Annalen XIII, S. 375.

Setzen wir jetzt
$$z_0+z_1+z_2+z_3+z_4=0 \tag{26a}$$
$$\begin{aligned} z_0 &= \eta_1\zeta_1-\eta_2\zeta_1+\eta_1\zeta_2+\eta_2\zeta_2\\ z_1 &= \varepsilon^4\eta_1\zeta_1-\varepsilon^3\eta_2\zeta_1+\varepsilon^2\eta_1\zeta_2+\varepsilon\eta_2\zeta_2\\ z_2 &= \varepsilon^3\eta_1\zeta_1-\varepsilon\eta_2\zeta_1+\varepsilon^4\eta_1\zeta_2+\varepsilon^2\eta_2\zeta_2\\ z_3 &= \varepsilon^2\eta_1\zeta_1-\varepsilon^4\eta_2\zeta_1+\varepsilon\eta_1\zeta_2+\varepsilon^3\eta_2\zeta_2\\ z_4 &= \varepsilon\eta_1\zeta_1-\varepsilon^2\eta_2\zeta_1+\varepsilon^3\eta_1\zeta_2+\varepsilon^4\eta_2\zeta_2 \end{aligned} \tag{26}$$

so erfüllen diese z_i gerade die Bedingung (26a), d. h. sind Pentaedercoordinaten. Ausserdem ist noch identisch für jedes Wertesystem $\eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2$
$$z_0^2+z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2=0 \tag{26b}$$
und dies ist die Gleichung der Fläche 2. Ordnung, auf der wir die Grössen $\eta_1:\eta_2$ und $\zeta_1:\zeta_2$ interpretiren. Unterwerfen wir jetzt $\eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2$ den Simultansubstitutionen, so ergibt eine kleine Rechnung, dass bei den Substitutionen (25a) z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 respective übergehen in z_1, z_2, z_3, z_4, z_0, (cyklische Vertauschung,) während (25b) dieselben Grössen z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 überführt in z_0, z_2, z_1, z_4, z_3. Weiter kann man sich auf elementare Weise überzeugen, dass man durch Combination und Wiederholung dieser beiden Operationen, nämlich der cyklischen Vertauschung, welche die Indicesreihenfolge *iklmn* in *klmni* verwandelt, und der zweiten Operation, welche *iklmn* in *ilknm* verwandelt, sämtliche geraden Vertauschungen der Indices erhält, d. h. sämtliche Indicespermutationen mit gerader Anzahl Inversionen (bei denen also eine gerade Anzahl Male ein höherer Index vor einen niederen Index tritt). Es können nur Permutationen mit gerader Anzahl Inversionen entstehen, da $z_0 z_1 z_2 z_3 z_4$, wie $z_1 z_2 z_3 z_4 z_0$ und $z_0 z_2 z_1 z_4 z_3$ eine gerade Anzahl Inversionen haben. Bei der Substitution (25d) gehen jedoch z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, über in z_0, z_2, z_4, z_1, z_3, d. h. es entsteht eine Permutation mit einer ungeraden Anzahl Inversionen, und so können wir durch Combination und Wiederholung der Substitutionen (25) sämtliche 120 Permutationen der z_ν erhalten. Eine doppeltbinäre Form $\varphi(\eta_1\eta_2\zeta_1\zeta_2)$, welche bei den 240 homogenen Simultansubstitutionen ungeändert bleibt, muss sich daher, da zufolge Gleichungen (26)
$$\begin{aligned} \eta_1\zeta_1 &= 5(z_0+\varepsilon z_1+\varepsilon^2 z_2+\varepsilon^3 z_3+\varepsilon^4 z_4)\\ \eta_1\zeta_2 &= -5(z_0+\varepsilon^2 z_1+\varepsilon^4 z_2+\varepsilon z_3+\varepsilon^3 z_4)\\ \eta_2\zeta_1 &= 5(z_0+\varepsilon^3 z_1+\varepsilon z_2+\varepsilon^4 z_3+\varepsilon^2 z_4)\\ \eta_2\zeta_2 &= 5(z_0+\varepsilon^4 z_1+\varepsilon^3 z_2+\varepsilon^2 z_3+\varepsilon z_4) \end{aligned} \tag{27}$$
ist, als homogene Function von z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 darstellen, die bei sämtlichen Vertauschungen der fünf Grössen z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 bis auf

einen Factor ± 1 in sich übergeht, d. h. muss sich rational aus den symmetrischen Functionen der z, und der Wurzel aus der Discriminante, $\Pi_{i>k}(z_i - z_k)$, zusammensetzen. Da letztere bei ungeraden Vertauschungen der z das Zeichen wechselt, während die symmetrischen Functionen ungeändert bleiben, so schliesst man in ganz ähnlicher Weise wie im Falle $n \equiv +1 \bmod \varrho$, dass zunächst nur das Quadrat, also das Product $\Pi_{i \gtrless k}(z_i - z_k)$, neben den symmetrischen Functionen auftreten kann, und da dieses selbst symmetrische Function ist, so sind nur die symmetrischen Functionen der z ins Auge zu fassen, deren jede eine Form $\varphi(\eta_1 \eta_2 \zeta_1 \zeta_2)$ ergibt. Diese symmetrischen Functionen drücken sich aber bekanntlich rational aus durch die Coefficienten der Gleichung

$$(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4) = z^5 + \alpha z^4 + \beta z^3 + \gamma z^2 + \delta z + \varepsilon = 0$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch die Potenzsummen

$$s_i = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=4} z_\varkappa{}^i$$

für $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Und diese ergeben dann, in $\eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2$ umgerechnet, folgende Formen[1]), die das volle Formensystem ausmachen:

$$\left.\begin{aligned}
&s_1 = 0, \qquad\qquad s_2 = 0,\\
&\varphi = \frac{s_3}{15} = \eta_1{}^3\zeta_1{}^2\zeta_2 + \eta_1{}^2\eta_2\zeta_2{}^3 + \eta_1\eta_2{}^2\zeta_1{}^3 - \eta_2{}^3\zeta_1\zeta_2{}^2\\
&\psi = -\frac{s_4}{20} = -\eta_1{}^4\zeta_1\zeta_2{}^3 + \eta_1{}^3\eta_2\zeta_1{}^4 + 3\eta_1{}^2\eta_2{}^2\zeta_1{}^2\zeta_2{}^2 - \eta_1\eta_2{}^3\zeta_2{}^4 + \eta_2{}^4\zeta_1{}^3\zeta_2\\
&\chi = \frac{s_5}{5} = \eta_1{}^5\zeta_1{}^5 + \eta_1{}^5\zeta_2{}^5 - \eta_2{}^5\zeta_1{}^5 + \eta_2{}^5\zeta_2{}^5\\
&\qquad + 10\eta_1\eta_2\zeta_1\zeta_2(-\eta_1{}^3\zeta_1{}^2\zeta_2 + \eta_1{}^2\eta_3\zeta_2{}^3 + \eta_1\eta_2{}^2\zeta_1{}^3 + \eta_2{}^3\zeta_1\zeta_2{}^2)
\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

---

1) Diese Formeln sowie die geometrischen Betrachtungen, insbesondere die Einführung der Fläche 2. Ordnung sind, wie bereits erwähnt, der Theorie der Gleichungen des 5. Grades, und zwar insbesondere der Theorie der Hauptgleichungen $z^5 + az^2 + bz + c = 0$ entnommen und sei daher auf das Klein-sche Werk, insbesondere auf Buch II, Capitel 3 verwiesen. Der Gedankengang ist dort gerade umgekehrt, wie hier. Dort werden zunächst die Lagrange'schen Ausdrücke

$$p_i = z_0 + \varepsilon^i z_1 + \varepsilon^{2i} z_2 + \varepsilon^{3i} z_3 + \varepsilon^{4i} z_4 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

eingeführt, und dadurch eine gewisse Fläche 2. Ordnung, die Hauptfläche $\Sigma z_\nu{}^2 = o$, in die Fläche $p_1 p_4 + p_2 p_3 = 0$ transformirt. Die Geraden der beiden Schaaren werden dann durch die Parameter

$$\lambda = \frac{p_1}{p_2} = -\frac{p_3}{p_4} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{p_1}{p_3} = -\frac{p_2}{p_4}$$

charakterisirt und schliesslich

$$p_1 = 5\lambda_1\mu_1, \quad p_2 = -5\lambda_2\mu_1, \quad p_3 = 5\lambda_1\mu_2, \quad p_4 = 5\lambda_2\mu_2$$

gesetzt.

Endlich, was den Fall $n \equiv 3 \bmod 5$ betrifft, so gehen die zugehörigen Formen in sich über durch die Substitutionen

$$\eta_1' = \pm \varepsilon^3 \eta_1, \quad \eta_2' = \pm \varepsilon^2 \eta_2, \quad \zeta_1' = \pm \varepsilon^4 \zeta_1, \quad \zeta_2' = \pm \varepsilon \zeta_2 \tag{29a}$$

$$\left.\begin{aligned}
\eta_1' &= \pm \frac{1}{\sqrt{5}} [-(\varepsilon - \varepsilon^4)\eta_1 + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\eta_2], \\
\eta_2' &= \pm \frac{1}{\sqrt{5}} [(\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\eta_1 + (\varepsilon - \varepsilon^4)\eta_2], \\
\zeta_1' &= \mp \frac{1}{\sqrt{5}} [-(\varepsilon^3 - \varepsilon^2)\zeta_1 + (\varepsilon - \varepsilon^4)\zeta_2], \\
\zeta_2' &= \mp \frac{1}{\sqrt{5}} [(\varepsilon - \varepsilon^4)\zeta_1 + (\varepsilon^3 - \varepsilon^2)\zeta_2]
\end{aligned}\right\} \tag{29b}$$

und ergibt sich wieder, dass wenn $\varphi(\eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2)$ eine zu $n \equiv 2$ gehörige Form ist, dann $\varphi(\eta_1, \eta_2, -\zeta_2, \zeta_1)$ eine zu $n \equiv -2 \bmod 5$ gehörige Form ist, und so lautet das volle Formensystem $n \equiv -2 \bmod 5$

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= \eta_1^3\zeta_1\zeta_2^2 + \eta_1^2\eta_2\zeta_1^3 - \eta_1\eta_2^2\zeta_2^3 + \eta_2^3\zeta_1^2\zeta_2 \\
\psi_1 &= +\eta_1^4\zeta_1^3\zeta_2 + \eta_1^3\eta_2\zeta_2^4 + 3\eta_1^2\eta_2^2\zeta_1^2\zeta_2^2 - \eta_1\eta_2^3\zeta_1^4 - \eta_2^4\zeta_1\zeta_2^3 \\
\chi_1 &= \eta_1^5\zeta_1^5 - \eta_1^5\zeta_2^5 + \eta_2^5\zeta_1^5 + \eta_2^5\zeta_2^5 \\
&\quad - 10\eta_1\eta_2\zeta_1\zeta_2[\eta_1^3\zeta_1^2\zeta_2 + \eta_1^2\eta_2\zeta_1^3 + \eta_1\eta_2^2\zeta_2^3 - \eta_2^3\zeta_1^2\zeta_2]
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Capitel III.

Wirkliche Aufstellung der Modulargleichungen.

§ 13.

Die Doppelverhältnissmodulargleichungen.

Dieselben bleiben ungeändert, wenn λ und μ simultan den nämlichen Substitutionen unterworfen werden, da der Transformationsgrad n ungerade, also $\equiv 1$ *modulo* 2 angenommen ist. Es genügt, von den Simultansubstitutionen die folgenden zu betrachten:

A. $\lambda_1' = \pm i\lambda_2, \quad \lambda_2' = \pm i\lambda_1, \quad \mu_1' = \pm i\mu_2, \quad \mu_2' = \pm i\mu_1$

B. $\lambda_1' = \pm i(-\lambda_1 + \lambda_2), \quad \lambda_2' = \pm i\lambda_2, \quad \mu_1' = \pm i(-\mu_1 + \mu_2), \quad \mu_2' = \pm i\mu_2$

wobei in den Substitutionen einer Zeile entweder nur die oberen oder nur die unteren Zeichen zu nehmen sind. Die Formen

$$\begin{aligned}
F_1 &= \lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2, \\
F_2 &= 2\lambda_1^3 - 3\lambda_1^2\lambda_2 - 3\lambda_1\lambda_2^2 + 2\lambda_2^3 \\
F_3 &= \lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2
\end{aligned}$$

zwischen denen noch eine Identität $4F_1^3 = F_2^2 + 27F_3^2$ besteht, nehmen bei der Substitution A respective die Factoren -1, $\mp i$, $\pm i$, bei der Substitution B aber respective -1, $\pm i$, $\mp i$; F_1^3, F_2^2 und F_3^2 nehmen also den Factor -1, so dass die pag. 160 mit ν bezeichnete Grösse hier gleich 2 ist. Wir erhalten also als Formen der niedersten Ordnungen, durch deren Polaren sich Alles ausdrücken lassen muss:

F_1^6, F_2^4, F_3^4 (12. Ordnung); $F_1F_2^2$, $F_1F_3^2$ (8. Ordnung); F_2F_3 (6. Ordnung) und F_1^2 (4. Ordnung).

Durch passende Verwendung der Identität (22) erkennt man, dass sich $(F_1^6)_6$, die sechste Polare von F_1^6, darstellen lässt durch $(F_1^2)_2$ und Polaren von Formen 8. und 4. Ordnung; ebenso ist die 6. Polare von F_2^4 darstellbar durch $(F_3^4)_6$ und Formen niederer Ordnung. Untersucht man so alle die oben angeführten Formen, und beachtet noch die Identität $4F_1^3 = F_2^2 + 27F_3^2$, so ergibt sich schliesslich, dass sich das volle Formensystem ausser aus $(\lambda_2\mu_1 - \mu_2\lambda_1)^2$ zusammengesetzt aus

$$(F_1F_3^2)_4; \quad (F_2F_3)_3; \quad (F_1^2)_2$$

Ausgerechnet lauten diese Formen

1. $A_2 = (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)^2$;

2. Die vierte Polare von $F_1F_3^2 = \lambda_1^6\lambda_2^2 - 3\lambda_1^5\lambda_2^3 + 4\lambda_1^4\lambda_2^4 - 3\lambda_1^3\lambda_2^5 + \lambda_1^2\lambda_2^6$:

$$\begin{aligned} C_4 = {} & \lambda_1^4(15\mu_1^2\mu_2^2 - 15\mu_1\mu_2^3 + 4\mu_2^4) \\ & + \lambda_1^3\lambda_2(40\mu_1^3\mu_2 - 90\mu_1^2\mu_2^2 + 64\mu_1\mu_2^3 - 15\mu_2^4) \\ & + \lambda_1^2\lambda_2^2(15\mu_1^4 - 90\mu_1^3\mu_2 + 144\mu_1^2\mu_2^2 - 90\mu_1\mu_2^3 + 15\mu_2^4) \\ & + \lambda_1\lambda_2^3(-15\mu_1^4 + 64\mu_1^3\mu_2 - 90\mu_1^2\mu_2^2 + 40\mu_1\mu_2^3) \\ & + \lambda_2^4(4\mu_1^4 - 15\mu_1^3\mu_2 + 15\mu_1^2\mu_2^2) \end{aligned} \tag{31a}$$

3. Die dritte Polare von $F_2F_3 = 2\lambda_1^5\lambda_2 - 5\lambda_1^4\lambda_2^2 + 5\lambda_1^2\lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2^5$:

$$\begin{aligned} C_3 = {} & \lambda_1^3(\mu_1^2\mu_2 - \mu_1\mu_2^2) + \lambda_1^2\lambda_2(\mu_1^3 - 3\mu_1^2\mu_2 + \mu_2^3) \\ & + \lambda_1\lambda_2^2(-\mu_1^3 + 3\mu_1\mu_2^2 - \mu_2^3) + \lambda_2^3(\mu_1^2\mu_2 - \mu_1\mu_2^2) \end{aligned} \tag{31b}$$

4. Die zweite Polare von $F_1^2 = \lambda_1^4 - 2\lambda_1^3\lambda_2 + 3\lambda_1^2\lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2^3 + \lambda_2^4$:

$$\begin{aligned} C_2 = {} & \lambda_1^2(2\mu_1^2 - 2\mu_1\mu_2 + \mu_2^2) + \lambda_1\lambda_2(-2\mu_1^2 + 4\mu_1\mu_2 - 2\mu_2^2) \\ & + \lambda_2^2(\mu_1^2 - 2\mu_1\mu_2 + 2\mu_2^2) \end{aligned} \tag{31c}$$

Um jetzt die Modulargleichung für Transformation n. Ordnung aufzustellen, berechnen wir zunächst den Grad $N = n\Pi\left(1 + \frac{1}{s}\right)$ der Gleichung und schreiben dann alle Glieder $(\lambda\mu)^{2a}C_2^bC_3^cC_4^d$ hin, für die $2a + 2b + 3c + 4d = N$ ist, und erhalten die Modulargleichung

$$\sum_{\varkappa} \alpha_\varkappa (\lambda\mu)^{2a_\varkappa} C_2^{b_\varkappa} C_3^{c_\varkappa} C_4^{d_\varkappa} = 0,$$

in der nur noch die Coefficienten $\alpha_\varkappa$ zu bestimmen sind.

Zu diesem Zwecke setzen wir für λ und μ die Reihenentwickelungen nach Potenzen von $q = e^{2i\pi\omega}$ ein. Die Theorie der elliptischen Functionen zeigt, dass wenn ω_1 und ω_2 die beiden primitiven Perioden des Legendre'schen elliptischen Integrales 1. Gattung mit dem Doppelverhältniss $\varkappa^2$ sind, und man $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \omega$, $e^{2i\pi\omega} = q$ setzt, alsdann $\varkappa^2 = \lambda$ in die Reihe entwickelbar ist [1])

$$\varkappa^2 = 16\left(\frac{q^{\frac{1}{4}} + q^{\frac{9}{4}} + q^{\frac{25}{4}}}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 \ldots}\right)^4$$
$$= 16q[1 - 8q + 44q^2 - 192q^3 + 718q^4 - 2400q^5 + 7352q^6 \ldots] \qquad (32)$$

und dass $\varkappa^2$ gerade die als Doppelverhältniss bezeichnete Modulfunction ist, und zwar λ_B, wie man erkennt, wenn man $q = 0 (\omega = i\infty$ setzt. Um auch für μ eine Reihe zu erhalten, kann man etwa den Repräsentanten $\frac{\omega}{n}$ oder $n\omega$ verwenden und erhält

$$\mu = \lambda_B(n\omega) = 16q^n[1 - 8q^n + 44q^{2n} \ldots]$$

Da die obigen Formen C_2, C_3, C_4 für die Einsetzung der Reihen wegen ihrer verhältnissmässigen Complicirtheit unbequem sind, so empfiehlt es sich, etwa die folgenden einfacheren Grundformen einzuführen:

$$D_2 = 2C_2 - A_2 = \lambda_1^2(4\mu_1^2 - 4\mu_1\mu_2 + \mu_2^2) + \lambda_1\lambda_2(-4\mu_1^2 + 10\mu_1\mu_2 - 4\mu_2^2)$$
$$+ \lambda_2^2(\mu_1^2 - 4\mu_1\mu_2 + 4\mu_2^2)$$
$$= (2\lambda_1\mu_1 - \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 + 2\lambda_2\mu_2)^2 \qquad (33a)$$

$$D_3 = C_3$$
$$D_4 = \tfrac{1}{70}(C_4 - 15A_2C_2 + 11A_2^2)$$
$$= \lambda_1^3\lambda_2(2\mu_1^3\mu_2 - 3\mu_1^2\mu_2^2 + \mu_1\mu_2^3) + \lambda_1^2\lambda_2^2(-3\mu_1^3\mu_2 + 6\mu_1^2\mu_2^2 - 3\mu_1\mu_2^3)$$
$$+ \lambda_1\lambda_2^3(\mu_1^3\mu_2 - 3\mu_1^2\mu_2^2 + 2\mu_1\mu_2^3) \qquad (33b)$$
$$= (2\lambda_1\mu_1 - \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 + 2\lambda_2\mu_2)(\lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2)(\mu_1^2\mu_2 - \mu_1\mu_2^2)$$

---

1) Man vergleiche bei Sohncke (Crelle's Journal 16, p. 113 ff.) oder Jacobi Fundamenta § 65. (Werke Band 1, Seite 236, Formel 10). Dabei ist (cf. pg. 142)

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}} = e^{2i\pi\omega}, \text{ da } \omega = \frac{iK'}{2K}.$$

Weiter beachte man, dass die Ordnung $\cdot N$ der Modulargleichung wegen des ungeraden Transformationsgrades sicher eine gerade Zahl ist. Da nun C_3 die einzige auftretende Form ungerader Ordnung ist, so können nur gerade Potenzen von C_3 vorkommen, d. h. das volle Formensystem besteht aus A_2, D_2, D_4, C_3^2. Für C_3^2 führen wir wieder eine vereinfachte Form ein:

$$\begin{aligned} D_6 &= \frac{1}{432}[-16C_3^2+8D_2D_4+A_2D_2^2-2A_2D_4-2A_2^2D_2+A_2^3] \\ &= (\lambda_1^2\lambda_2-\lambda_1\lambda_2^2)^2(\mu_1^2\mu_2-\mu_1\mu_2^2)^2 \end{aligned} \tag{33c}$$

Nichthomogen geschrieben lautet dieses definitiv zu Grunde zu legende volle Formensystem

$$\begin{aligned} A_2 &= (\lambda-\mu)^2, \\ D_2 &= (2-\lambda-\mu+2\lambda\mu), \\ D_4 &= (2-\lambda-\mu+2\lambda\mu)(\lambda^2-\lambda)(\mu^2-\mu), \\ D_6 &= (\lambda^2-\lambda)^2(\mu^2-\mu)^2, \end{aligned} \tag{34}$$

wobei noch $D_2D_6-D_4^2=0$ ist.

Für die niedersten Fälle gestaltet sich die Rechnung folgendermassen:

Transformation dritter Ordnung.

Die Modulargleichung ist vom 4. Grade und hat daher die Form:

$$\varphi = \alpha A_2^2+\beta A_2D_2+\gamma D_2^2+\delta D_4 = 0.$$

Die Reihen nach Potenzen von q für A_2, D_2, D_4 beginnen respective mit q^2, q^0, q^4. Die Reihen für A_2^2, A_2D_2, D_2^2, D_4 also mit respective q^4, q^2, q^0, q^4. Da in φ alle Potenzen von q verschwinden müssen, darf zunächst das Glied D_2^2 nicht auftreten ($\gamma=0$), ebenso $A_2D_2 (\beta=0)$. Weiter ist

$$A_2^2 = 256^2q^4[1-32q\ \ldots], \quad D_4 = 512q^4[1-32q\ \ldots],$$

daher ist

$$\begin{aligned} 256^2.\alpha+512.\beta &= 0, \\ \alpha:\beta &= 1:-128 \end{aligned}$$

und die Modulargleichung lautet:

$$A_2^2 = 128D_4,$$

oder

$$(\lambda-\mu)^4 = 128\lambda\mu(1-\lambda)(1-\mu)(2-\lambda-\mu+2\lambda\mu) \tag{35a}$$

Transformation fünfter Ordnung.

Die Modulargleichung ist von 6. Ordnung und lautet

$$\alpha D_2^3+\beta D_2^2 A_2+\gamma D_2 A_2^2+\delta A_2^3+\varepsilon D_2 D_4+\zeta A_2 D_4+\vartheta D_6=0.$$

Da $\lambda=16q\mp\ldots$, $\mu=16q^5\mp\ldots$, und die Reihen für D_2, A_2, D_4, D_6 mit q^0, q^2, q^6, q^{12} beginnen, so beginnen die Reihen für die sieben in der Modulargleichung möglichen Glieder respective mit q^0, q^2, q^4, q^6, q^6, q^8, q^{12}, und es ergibt sich durch Vergleich der Reihen (die bis q^7 zu benutzen sind)

$$\alpha:\beta:\gamma:\delta:\varepsilon:\zeta:\vartheta=0:0:0:1:-16.512:9.512:32.27.512,$$

und so lautet die Modulargleichung:

$$A_2^3-2^{13}D_2D_4+9.512A_2D_4+27\ 2^{14}D_6=0 \qquad (35b)$$

oder

$$(\lambda-\mu)^6=512\lambda(1-\lambda)\mu(1-\mu)[16(2-\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2-9(\lambda-\mu)^2(2-\lambda-\mu+2\lambda\mu)$$
$$-32.27\lambda(1-\lambda)\mu(1-\mu)].$$

Endlich die Transformation siebenter Ordnung.

Die Modulargleichung ist von 8. Ordnung und lautet

$$\left.\begin{aligned}a_1D_2^4+a_2D_2^3A_2+a_3D_2^2A_2^2+a_4D_2A_2^3+a_5A_2^4+a_6D_2^2D_4\\+a_7A_2D_2D_4+a_8A_2^2D_4+a_9D_4^2+a_{10}A_2D_6\end{aligned}\right\}=0.$$

Das Glied D_2D_6 ist nicht mit hingeschrieben, da es gleich D_4^2 ist. Die Reihen für D_2, A_2, D_4, D_6 beginnen mit q^0, q^2, q^8, q^{16} und daher die Reihen für die einzelnen Glieder mit resp. q^0, η^2. q^4, q^6, q^8, q^{10}, q^{12}, q^{16}, q^{18}. Daher ist $a_1=a_2=a_3=a_4=0$.

Die ausgerechneten Reihen, deren man zur Berechnung der Coefficienten a_5, a_6 bis a_{10} bedarf, lauten:

$$\lambda=16q[1-8q+44q^2-192q^3+718q^4-2400q^5+7352q^6-20992q^7$$
$$+56549q^8-145008q^9+356388q^{10}-844032q^{11}\ldots]$$

$$\mu=16q^7[1-8q^7\ldots];$$

$$(\lambda-\mu)^2=256q^2[1-16q+152q^2-17.64q^3+4.1611q^4-32.1037q^5$$
$$+2.76575q^6-16.40407q^7+2.1266491q^8-16.581955q^9$$
$$+4.8096545q^{10}-128.838243q^{11}\ldots];$$

$$\lambda(1-\lambda)\mu(1-\mu)=256q^8[1-24q+300q^2-41.64q^3+2.9063q^4$$
$$-32.3297q^5-8.67287q^6-8.308931q^7+10401573q^8-16.2542583q^9$$
$$+4.37351497q^{10}-16.3246 7557q^{11}\ldots];$$

$$2-\lambda-\mu+2\lambda\mu=2[1-8q+64q^2-11.32q^3+3.512q^4-16.359q^5$$
$$+3.6400q^6-8.7353q^7+256.657q^8-8.56805q^9$$
$$+128.9151q^{10}-32.90633q^{11}\ldots];$$

$$\frac{(\lambda-\mu)^8}{\lambda(1-\lambda)\mu(1-\mu)}=2^{24}[1-40q+884q^2-256.55q^3+2.89785q^4$$
$$-128.15151q^5+16\ 1147421q^6-8.194\,90909q^7+1\,208221559q^8$$
$$-32.270\,278\,535q^9+144\,3888\,4001q^{10}-16.22661\,699\,413q^{11}\ldots];$$

$$(2-\lambda-\mu+2\lambda\mu)^5=32[1-40q+15.64q^2-32.535q^3+512.485q^4$$
$$-16.192\,003q^5+256.130\,405q^6-8.40637\,085q^7+512.562\,1885q^8$$
$$-8.2928\,486\,905q^9+128.1381\,403\,513q^{10}-32.389\,4613\,9085q^{11}\ldots];$$

$$(2-\lambda-\mu+2\lambda\mu)^3(\lambda-\mu)^2=2^{11}q^2[1-40q+920q^2-32.485q^3+4.52811q^4$$
$$-16.152\,513q^5+2.1234\,1023q^6-8.279\,10835q^7+2.917\,345\,275q^8$$
$$-8.1731\,777039q^9\ldots];$$

$$(2-\lambda-\mu+2\lambda\mu)(\lambda-\mu)^4=2^{17}q^4[1-40q+880q^2-32.455q^3+8.219\,71q^4$$
$$-16.117\,023q^5+4.4352623q^6-8.180\,789\,85q^7\ldots];$$

$$(2-\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2\lambda(1-\lambda)\mu(1-\mu)=2^{10}q^8[1-40q+219.4q^2-64.215q^3..];$$

$$(\lambda-\mu)^2\lambda(1-\lambda)\mu(1-\mu)=2^{16}q^{10}[1-40q\ldots].$$

Durch den Vergleich der einzelnen Potenzen von q erhalten wir

$$2^{24}a_5:2^5a_6:2^{11}a_7:2^{17}a_8:2^{30}a_9:2^{16}a_{10}=1:-1:76:-1170:-3375:864000,$$

oder

$$256a_5:a_6:a_7:a_8:a_9:a_{10}=1:-2048:19.128:-585:-64.3375:864000.$$

Daher lautet die Modulargleichung:

$$A_2^4-256.2048D_4D_2^2+256.19.128A_2D_2D_4-256.585A_2^2D_4$$
$$-64.256.3375D_2D_6+256.864000A_2D_6=0,$$

oder

$$(\lambda-\mu)^8=256\lambda(1-\lambda)\mu(1-\mu)\times \tag{35c}$$
$$\left\{\begin{array}{l}2048.(2-\lambda-\mu+2\lambda\mu)^5-19.128.(2-\lambda-\mu+2\lambda\mu)^3(\lambda-\mu)^2\\ \quad+585(\lambda-\mu)^4(2-\lambda-\mu+2\lambda\mu)\\ \quad+64.27.125(2-\lambda-\mu+2\lambda\mu^2)^2(1-\lambda)\mu(1-\mu)^2\\ \quad-256.27.125.\lambda(1-\lambda)\mu(1-\mu)(\lambda-\mu)^2\end{array}\right\}$$

Zur Controle für die Richtigkeit der Reihen dienen die Glieder mit q^{11}; sie müssen gerade Null ergeben. In der Tat ist, wie leicht nachzurechnen,

16.22661 699 413=32.389 4613 9085−76.8.1731 77039+1170.8.180 78985
+3375.64.215+40.864000.

Die Gleichungen für $n = 3$ und $n = 6$ finden sich, allerdings auf anderem Wege abgeleitet, (durch mehrmaliges Quadriren der entsprechenden Modulargleichungen für $\sqrt[8]{\lambda} = u$, $\sqrt[8]{\mu} = v$), bereits bei Jacobi (Fundamenta § 29, Werke Bd. 1., Seite 122 und 123), sowie bei Cayley in den Philosophical transactions von 1874, Bd. 164, Seite 450 und 451). Im Vergleich mit dem dort nötigen Rechnungsaufwand führt die hier dargelegte Methode, wenigstens in den Fällen $n = 3$ und 5, schnell zum Ziel; auch hat man durch Berechnung noch einiger weiterer Glieder der Reihen beliebig viel Controlen für die Richtigkeit der numerischen Rechnung. Aehnliche Controlen sind übrigens auch bei den späteren Beispielen von Modulargleichungen angewandt worden.

§ 14.

Die Tetraedermodulargleichungen.

Hier haben wir die beiden Fälle $n \equiv +1$ und $n \equiv -1$ modulo 3 zu unterscheiden und getrennt zu behandeln.

1) $n \equiv +1 \bmod 3$.

Die zugehörigen Formen bleiben bei den Simultansubstitutionen

$$a_1' = \pm \alpha^2 a_1, \quad a_2' = \pm \alpha a_2, \quad b_1' = \pm \alpha^2 b_1, \quad b_2' = \pm \alpha b_2;$$

und

$$a_1' = \pm \frac{1}{\sqrt{-3}}(a_1 + 2a_2), \quad a_2' = \pm \frac{1}{\sqrt{-3}}(a_1 - a_2),$$

$$b_1' = \pm \frac{1}{\sqrt{-3}}(b_1 + 2b_2), \quad b_2' = \pm \frac{1}{\sqrt{-3}}(b_1 - b_2);$$

ungeändert. Die Formen

$$F_1 = a_1^3 a_2 - a_2^4,$$
$$F_2 = a_1^6 - 20 a_1^3 a_2^3 + a_2^6,$$
$$F_3 = a_1^4 + 8 a_1 a_2^3$$

erhalten bei diesen Substitutionen respective die Factoren α, 1, α^2, und 1, 1, 1. Die niedersten in Betracht kommenden Formen sind also

F_2 (6. Ordnung); $F_1 F_3$ (8. Ordnung); F_1^3, F_3^3 (12. Ordnung),

[redacted]

von denen wegen der Identität $64F_1^3+F_2^2=F_3^3$ nur etwa die folgenden drei in Betracht kommen:

$$F_2, \quad F_1F_3, \quad F_1^3$$

deren respective 3., 4., 6. Polaren lauten

(36)

$$C_3=a_1^3b_1^3-(a_1^3b_2^3+9a_1^2a_2b_1b_2^2+9a_1a_2^2b_1^2b_2+a_2^3b_1^3)-8a_2^3b_2^3;$$

$$C_4=5(a_1b_2+a_2b_1)(a_1^3b_1^3-8a_2^3b_2^3)+a_1^4b_2^4+4^2a_1^3a_2b_1b_2^3+6^2a_1^2a_2^2b_1^2b_2^2$$
$$+4^2a_1a_2^3b_1^3b_2+a_2^4b_1^4;$$

$$C_6=14(a_1^3b_1^3+a_2^3b_2^3)(2a_1^3b_2^3+9a_1^2a_2b_1b_2^2+9a_1a_2^2b_1^2b_2+2a_2^3b_1^3)$$
$$-(a_1^6b_2^6+6^2a_1^5a_2b_1b_2^5+15^2a_1^4a_2^2b_1^2b_2^4+20^2a_1^3a_2^3b_1^3b_2^3$$
$$+15^2a_1^2a_2^4b_1^4b_2^2+6^2a_1a_2^5b_1^5b_2+a_2^6b_1^6).$$

An Stelle dieser Formen, die mit $A_2=(a_1b_2-a_2b_1)^2$ das volle Formsystem bilden, führen wir für die numerische Rechnung mit den Potenzreihen nach q bequemer ein:

(37)

$$A_2=(a_1b_2-a_2b_1)^2,$$
$$D_3=-C_3,$$
$$D_4=\tfrac{1}{5}(6A_2^2-C_4)=-(a_1^3a_2-a_2^4)(b_1^4+8b_1b_2^3)$$
$$-(a_1^4+8a_1a_2^3)(b_1^3b_2-b_2^4),$$
$$D_6=\frac{1}{770}(-5C_6+28A_2C_4-33A_2^3)$$
$$=-(a_1^3a_2-a_2^4)(b_1^3b_2-b_2^4)(a_1^2b_1b_2+a_1a_2b_1^2-2a_2^2b_2^2).$$

Nicht homogen geschrieben lautet das volle Formensystem

(38)

$$A_2=(a-b)^2$$
$$D_3=8+a^3+9a^2b+9ab^2+b^3-a^3b^3$$
$$D_4=(1-a^3)(8b+b^4)+(1-b^3)(8a+a^4)$$
$$D_6=(1-a^3)(1-b^3)(2-a^2b-ab^2)$$

Zwischen diesen Formen besteht noch eine Identität, die man durch Polarisiren der aus $64F_1^3+F_2^2=F_3^3$ abgeleiteten Identität $64F_1^6+F_1^3F_2^2-F_1^3F_3^3=0$ erhält

2) $n\equiv-1$ modulo 3.

Wir haben in den Tetraederformen für $n\equiv+1$ nur b_1b_2 durch $-2b_2$, b_1 zu ersetzen (oder a_1, a_2 durch $-2a_2$, a_1), und erhalten so das Formensystem:

$$E_1 = a_1 b_1 + 2a_2 b_2;$$

Aus D_3: $$E_3 = a_1^3 b_1^3 - 18a_1^2 a_2 b_1^2 b_2 + 36 a_1 a_2^2 b_1 b_2^2 - 8a_2^3 b_2^3 + 8a_1^3 b_2^3 + 8a_2^3 b_1^3;$$

Aus D_4: $$E'_4 = 8(a_1^3 a_2 - a_2^4)(b_1^3 b_2 - b_2^4) + (a_1^4 + 8a_1 a_2^3)(b_1^4 + 8b_1 b_2^3), \tag{39}$$

wofür wir einführen

$$E_4 = \tfrac{1}{3}(E_4' + E_1 E_3) = (a_1^4 + 8a_1 a_2^3)(b_1^4 + 8b_1 b_2^3). \tag{39c}$$

Aus D_6 folgt ebenso eine Form E_6. Diese Form ändert jedoch bei Vertauschung von a und b ihren Wert (nicht blos das Vorzeichen). Schreiben wir die Modulargleichung, nach Potenzen der Form E_6 geordnet:

$$R(ab) = R_0(E_1 E_3 E_4) + E_6 . R_1(E_1 E_3 E_4) + E_6^2 . R_2(E_1 E_3 E_4) \; \ldots,$$

und vertauschen a und b, so soll $R(ba) = \pm R(ab)$ sein. Bilden wir also

$$R(ab) - R(ba) = [E_6(ab) - E_6(ba)] R_1 + [E_6^2(ab) - E_6^2(ba)] R_2 + \ldots,$$

so ist dies entweder gleich $2R(ab)$ oder gleich 0. Ersterenfalls enthielte aber $R(ab)$ den Factor $E_6(ab) - E_6(ba)$, was wegen der Irreducibilität von $R(ab)$ nicht angeht. Oder der obige Ausdruck ist gleich null. Dividirt man dann rechts durch $E_6(ab) - E_6(ba)$ was im allgemeinen sicher von null verschieden ist, so bleibt rechts ein ganzer, rationaler Ausdruck $(N-6)$ter Ordnung, der für alle vermöge der Transformation n. Ordnung zusammengehörigen Wertepaare a, b verschwindet; da aber die Modulargleichung von N. Ordnung sein soll, so kann nicht bereits ein Ausdruck $(N-6)$ter Ordnung, gleich null gesetzt, die Transformation kennzeichnen, dieser Ausdruck muss vielmehr identisch verschwinden, d. h. R_1, R_2 u. s. w. identisch null sein. Die Modulargleichung lautet daher einfach $R_0(E_1 E_3 E_4) = 0$, $E_1 E_3 E_4$ bilden das volle Formensystem $n \equiv -1 \bmod 3$ und es ist $R(ab) = +R(ba)$, da $E_1(ab) = E_1(ba)$, $E_3(ba) = E_3(ba)$ und $E_4(ab) = E_4(ba)$. Nicht homogen lautet das volle Formensystem:

$$E_1 = 2 + ab,$$
$$E_3 = 8 - 36ab + 18a^2b^2 - a^3b^3 - 8a^3 - 8b^3 \tag{40}$$
$$E_4 = (8a + a^4)(8b + b^4).$$

[redacted]

Behufs Bestimmung der noch unbestimmten Coefficienten in der Modulargleichung benutze man die Reihe [1])

$$a = -6q^{\frac{1}{2}}[1-5q^2+32q^4-198q^6+1214q^8-7445q^{10} \;..]$$

Beispiele von Modulargleichungen sind

(41)

für $n=2$: $E_1^3+E_3=0$

$n-4$: $D_6-32D_3^2+5.2^6A_2D_4-5^2.2^6.3^9 11A_2^3=0$

$n=5$: $(E_1^3-E_3)^2-18^2E_1^2E_4=0$

$n=7$: $(140A_2^2-27D_4)^2+27A_2(D_3^2-896D_6)-12800A_2^3=0$

§ 15.

Die Oktaedermodulargleichungen.

1) $n=1$ modulo 4.

Bei den hier in Betracht kommenden Substitutionen:

A) $o_1'=\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}o_1$, $o_2'=2\,\frac{1-i}{\sqrt{2}}o_2$, $p_1'=\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}p_1$,

$$p_2'=\pm\frac{1-}{\sqrt{2}}p_2$$

und

B) $o_1'=\pm\frac{1}{\sqrt{-2}}(-o_1+o_2)$, $o_2'=\pm\frac{1}{\sqrt{-2}}(o_1+o_2$

$$p_1'=\pm\frac{1}{\sqrt{-2}}(-p_1+p_2),\quad p_2'=\pm\frac{1}{\sqrt{-2}}(p_1+p_2);$$

erhalten die Formen

$$F_1=o_1^8+14o_1^4o_2^4+o_2^8,$$
$$F_2=o_1^{12}-33o_1^8o_2^4-33o_1^4o_2^8+o_2^{12},$$
$$F_3=o_1o_2(v_1^4-o_2^4)$$

respective die Factoren 1, —1, 1 und 1, —1, —1. Die niedrigsten in Betracht kommendon Formen sind daher F_1, F_2^2, F_3^2, von denen noch $F_2^2=F_1^3-108F_3^4$ durch die andern darstellbar ist. Das volle Formensystem lautet daher:

1) $A_2=(o_1p_2-o_2p_4)^2$,

2) Die vierte Polare von F_1,

---

1) Man vergleiche z. B. Ikosaeder u. s. w. pg. 133. oder Annalen XIV pg. 157.

$$D_4 = 5o_1^4p_1^4 + o_1^4p_2^4 + 16o_1^3o_2p_1p_2^3 + 36o_1^2o_2^2p_1^2p_2^2 + 16o_1o_2^3p_1^3p_2 + o_2^4p_1^4 + 5o_2^4p_2^4 \tag{42}$$

3) Die sechste Polare von F_3^2.

Sei diese mit C_6 bezeichnet, ebenso die dritte Polare von F_3 mit C_3, so ist zufolge Gleichung (22):

$$C_3^2 = C_6 + \alpha(op)^2 . C_4 + \beta(op)^6$$

(α, β Zahlenfactoren). Daher führen wir anstelle von C_6 ein:

$$D_6 = C_3^2 = (o_1p_2 + o_2p_1)^2(o_1^2p_1^2 - o_2^2p_2^2)^2 \tag{42b}$$

Nichthomogen lautet das volle Formensystem:

$$\left.\begin{aligned} A_2 &= (o-p)^2 \\ D_4 &= 5o^4p^4 + o^4 + 16o^3p + 36o^2p^2 + 16op^3 + p^4 + 5 \\ D_6 &= (o+p)^2(1-o^2p^2)^2 \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Hieraus folgt das volle Formensystem $n \equiv -1 \bmod 4$, indem p_1, p_2 durch p_2, $-p_1$ ersetzt werden; es lautet:

(44)

$$\begin{aligned} E_1 &= o_1p_1 + o_2p_2 \\ E_4 &= o_1^4p_1^4 - 16o_1^3o_2p_1^3p_2 + 36o_1^2o_2^2p_1^2p_2^2 - 16o_1o_2^3p_1p_2^3 + o_2^4p_2^4 \\ &\quad + 5o_1^4p_2^4 + 5o_2^4p_1^4 \\ E_6 &= (o_1p_1 - o_2p_2)^2(o_1^2p_2^2 - o_2^2p_1^2)^2. \end{aligned}$$

Nichthomogen:

$$\begin{aligned} E_1 &= 1 + op \\ E_4 &= 1 - 16op + 36o^2p^2 - 16o^3p^3 + o^4p^4 + 5o^4 + 5p^4 \\ E_6 &= (1-op)^2(o^2-p^2)^2. \end{aligned} \tag{45}$$

Was Reihenentwickelungen für o betrifft, so beachte man, dass

$$o_I = \sqrt[4]{\lambda_B(2\omega)}$$

Nun war

$$\lambda_B(\omega) = 16\left(\frac{q^{\frac14} + q^{\frac94} + \cdots}{1 + 2q + 2q^4 \cdots}\right)^4,$$

also ist

$$\begin{aligned} o_I(\omega) &= 2\,\frac{q^{\frac12} + q^{\frac92} + \cdots}{1 + 2q^2 + 2q^8 \cdots}. \\ &= 2q^{\frac12}[1 - 2q^2 + 5q^4 - 10q^6 + 18q^8 - 32q^{10} + 55q^{12} \ldots]\ ^{1)} \end{aligned} \tag{46}$$

---

1) Man vergleiche etwa Ikosaeder pg. 132, oder Annalen XIV. p. 157, oder endlich bei Sohncke, Crelle's Journal 16, pg. 133.

Beispiele.

$$n = 3 \quad E_1{}^4 - E_4 = 0 \tag{47a}$$

ausgerechnet:

$$o^4 + p^4 - 4o^3p^3 + 6o^2p^2 - 4op = 0.$$

$$n = 5 \quad 20D_6 - 4A_2D_4 - A_2{}^3 = 0 \tag{47b}$$

ausgerechnet:

$$16op(1+o^4p^4)-(o^6+10o^5p+15o^4p^2-20o^3p^3+15o^2p^4+10op^5+p^6=0.$$

$$n = 7 \quad 79E_1{}^8 - 78E_1{}^4E_4 - E_4{}^2 + 400E_1{}^2E_6 = 0,$$

ausgerechnet:

$$\left.\begin{array}{l} o^8+p^8+28op(o^4+p^4)(2o^2p^2+5op+2) \\ -16op(4o^6p^6+8o^5p^5+7o^4p^4+7o^2p^2+8op+4)+100o^4p^4 \end{array}\right\} = 0 \tag{47c}$$

Die Gleichungen für o sind identisch mit denen für $\sqrt{x}$, wie sie sich z. B. für $n = 3$ und $n = 5$ bei Cayley finden (Philosophical Transactions 165, pg. 451).

§ 16.

Die Ikosaedermodulargleichungen.

$n \equiv +1$ modulo 5.

Die niedersten in Betracht kommenden Formen sind F_1, F_2, F_3 (vergl. Gleichung (3d)), und so lautet das volle Formensystem:

1) $A_2 = (\eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1)^2$,

2) Die sechste Polare von F_3:

(48a)

$$D_6=42(\eta_1\zeta_2+\eta_2\zeta_1)(\eta_1{}^5\zeta_1{}^5-\eta_2{}^5\zeta_2{}^5)+\eta_1{}^6\zeta_2{}^6+6^2\eta_1{}^5\eta_2\zeta_1\zeta_2^5+15^2\eta_1{}^4\eta_2{}^2\zeta_1{}^2\zeta_2{}^4$$
$$+20^2\eta_1{}^3\eta_2{}^3\zeta_1{}^3\zeta_2{}^3+15^2\eta_1{}^2\eta_2{}^4\zeta_1{}^4\zeta_2{}^2+6^2\eta_1\eta_2{}^5\zeta_1{}^5\zeta_2+\eta_2{}^6\zeta_1{}^6.$$

3) Die 10te Polare von F_1:

(48b)

$$D_{10}=22.17.(\eta_1{}^{10}\zeta_1{}^{10}+\eta_2{}^{10}\zeta_2{}^{10})-66(\eta_1{}^5\zeta_1{}^5-\eta_2{}^5\zeta_2{}^5)(21\eta_1{}^5\zeta_2{}^5+175\eta_1{}^4\eta_2\zeta_1\zeta_2{}^4$$
$$+450\eta_1{}^3\eta_2{}^2\zeta_1{}^2\zeta_2{}^3+450\eta_1{}^2\eta_2{}^3\zeta_1{}^3\zeta_2{}^2+175\eta_1\eta_2{}^4\zeta_1{}^4\zeta_2+21\eta_2{}^5\zeta_1{}^5)$$
$$+\eta_1{}^{10}\zeta_2{}^{10}+10^2\eta_1{}^9\eta_2\zeta_1\zeta_2{}^9+45^2\eta_1{}^8\eta_2{}^2\zeta_1{}^2\zeta_2{}^8+120^2\eta_1{}^7\eta_2{}^3\zeta_1{}^3\zeta_2{}^7$$
$$+210^2\eta_1{}^6\eta_2{}^4\zeta_1{}^4\zeta_2{}^6+252^2\eta_1{}^5\eta_2{}^5\zeta_1{}^5\zeta_2{}^5+210^2\eta_1{}^4\eta_2{}^6\zeta_1{}^6\zeta_2{}^4$$
$$+120^2\eta_1{}^3\eta_2{}^7\zeta_1{}^7\zeta_2{}^3+45^2\eta_1{}^2\eta_2{}^8\zeta_1{}^8\zeta_2{}^2+10^2\eta_1\eta_2{}^9\zeta_1{}^9\zeta_2+\eta_2{}^{10}\zeta_1{}^{10}.$$

4) Die 15. Polare von F_2:

(47c)

$$D_{15}=\eta_1^{15}\zeta_1^{15}+\eta_2^{15}\zeta_2^{15}+(\eta_1^{10}\zeta_1^{10}-\eta_2^{10}\zeta_2^{10})(11\eta_1^5\zeta_2^5+75\eta_1^4\eta_2\zeta_1\zeta_2^4$$
$$+175\eta_1^3\eta_2^2\zeta_1^2\zeta_2^3+175\eta_1^2\eta_2^3\zeta_1^3\zeta_2^2+75\eta_1\eta_2^4\zeta_1^4\zeta_2+11\eta_2^5\zeta_1^5)$$
$$-(\eta_1^5\zeta_1^5+\eta_2^5\zeta_2^5)(\eta_1^{10}\zeta_2^{10}+25\eta_1^9\eta_2\zeta_1\zeta_2^9+225\eta_1^8\eta_2^2\zeta_1^2\zeta_2^8$$
$$+975\eta_1^7\eta_2^3\zeta_1^3\zeta_2^7+2275\eta_1^6\eta_2^4\zeta_1^4\zeta_2^6+3003\eta_1^5\eta_2^5\zeta_1^5\zeta_2^5$$
$$+2275\eta_1^4\eta_2^6\zeta_2^6\zeta_2^4+975\eta_1^3\eta_2^7\zeta_1^7\zeta_2^3+225\eta_1^2\eta_2^8\zeta_1^8\zeta_2^2$$
$$+25\eta_1\eta_2^9\zeta_1^9\zeta_2+\eta_2^{10}\zeta_1^{10}).$$

Ihr Quadrat ist rational ausdrückbar durch A_2, D_6, D_{10}, und hat man, um dies einzusehen, die Identität $F_2^2=1728F_3^5-F_1^3$ dreissigmal polarisirt zu denken.

Ist $n\equiv-1$ modulo 5,

so ist in den ebenangeführten Formen nur $\zeta_1\,\zeta_2$ zu ersetzen durch ζ_2, $-\zeta_1$, und lautet das volle Formensystem:

(48)

$$E_1=\eta_1\zeta_1+\eta_2\zeta_2;$$

$$E_6=42(\eta_1\zeta_1-\eta_2\zeta_2)(\eta_1^5\zeta_2^5+\eta_2^5\zeta_1^5)-\eta_1^6\zeta_1^6+6^2\eta_1^5\eta_2\zeta_1^5\zeta_2\ \ldots;$$
$$E_{10}=22.17(\eta_1^{10}\zeta_2^{10}+\eta_2^{10}\zeta_1^{10})+66(\eta_1^5\zeta_2^5+\eta_2^5\zeta_1^5)(21\eta_1^5\zeta_1^5$$
$$-175\eta_1^4\eta_2\zeta_1^4\zeta_2\ldots)+\eta_1^{10}\zeta_1^{10}-10^2\eta_1^9\eta_2\zeta_1^9\zeta_2+45^2\eta_1^8\eta^2\zeta_1^8\zeta_2\mp\ldots.$$

$$E_{15}=D_{15}(\eta_1,\ \eta_2,\ \zeta_2,\ -\zeta_1).$$

Zwischen diesen Formen besteht wieder, analog wie bei $n\equiv+1$, eine Identität.

Im Falle $n\equiv2$ modulo 5 hatten wir gefunden:

$$\varphi=\eta_1^3\zeta_1^2\zeta_2+\eta_1^2\eta_2\zeta_2^3+\eta_1\eta_2^2\zeta_1^3-\eta_2^3\zeta_1\zeta_2^2;$$

$$\psi=-\eta_1^4\zeta_1\zeta_2^3+\eta_1^3\eta_2\zeta_1^4+3\eta_1^2\eta_2^2\zeta_1^2\zeta_2^2-\eta_1\eta_2^3\zeta_2^4+\eta_2^4\zeta_1^3\zeta_2;$$

$$\chi=\eta_1^5\zeta_1^5+\eta_1^5\zeta_2^5-\eta_2^5\zeta_1^5+\eta_2^5\zeta_2^5+10\eta_1\eta_2\zeta_1\zeta_2(-\eta_1^3\zeta_1^2\zeta_2+\eta_1^2\eta_2\zeta_2^3$$
$$+\eta_1\eta_2^2\zeta_1+\eta_2^3\zeta_1\zeta_2^2).$$

Endlich im Falle $n=-2$ modulo 5:

$$\varphi_1=\eta_1^3\zeta_1\zeta_2^2+\eta_1^2\eta_2\zeta_1^3-\eta_1\eta_2^2\zeta_2^3+\eta_2^3\zeta_1^2\zeta_2;$$

$$\psi_1=\eta_1^4\zeta_1^3\zeta_2+\eta_1^3\eta_2\zeta_2^4+3\eta_1^2\eta_2^2\zeta_1^2\zeta_2^2-\eta_1\eta_2^3\zeta_1^4-\eta_2^4\zeta_1\zeta_2^3;$$

$$\chi_1=\eta_1^5\zeta_1^5-\eta_1^5\zeta_2^5+\eta_2^5\zeta_1^5+\eta_2^5\zeta_2^5$$
$$-10\eta_1\eta_2\zeta_1\zeta_2(\eta_1^3\zeta_1^2\zeta_2+\eta_1^2\eta_2\zeta_1^3+\eta_1\eta_2^2\zeta_2^3-\eta_2^3\zeta_2^2\zeta_2).$$

Für die numerische Berechnung der noch unbestimmten Coefficienten bedienen wir uns der folgenden Reihe [1])

$$\eta = q^{\frac{2}{5}} \frac{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{\varkappa} q^{5\varkappa^2 - 3\varkappa}}{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{\varkappa} q^{5\varkappa^2 - \varkappa}} \tag{49}$$

Beispiele.

(50)

$n = 2$: $\varphi = 0$

$n = 3$: $\psi_1 = 0$

$n = 4$ [2]): $E_1^6 - E_6 = 0$

$n = 6$: $11.17 D_6^2 - 18.49 A_2 D_{10} + 121.16 A_2^3 D_6 - 17.73 A_2^6 = 0$

$n = 7$: $\psi^2 - \varphi\chi = 0$

$n = 8$: $\varphi_1^4 + \varphi_1 \psi_1 \chi_1 - \psi_1^3 = 0$

$n = 9$: $11.17 E_6^2 + 6.49 E_1^2 E_{10} + 11.16.53 E_1^6 E_6 - 17.577 E_1^{12} = 0$

$n = 11$: $11.17 D_6^2 - 18.49 A_2 D_{10} - 11.8.335 A_2^3 D_6 - 17.75841 A_2^6 = 0$

$n = 13$: $\varphi_1^3 \chi_1 = \varphi_1^2 \psi_1^2 + \psi_1 \chi_1^2 = 0.$

---

1) Man vergleiche Ikosaeder, p. 132, oder Annalen XIV, pg. 157 ff.

2) Die Gleichungen für $n = 2, 3, 4$ sind bereits Annalrn XIV, pg. 163 mitgeteilt.

Inhalt.

Einleitung 113

Capitel I.

Galois'sche Hauptmoduln der 2. bis 5. Stufe.

§ 1. Die modulo ϱ zur Identität congruenten Substitutionen und ihr Fundamentalpolygon 115

§ 2. Die zugehörigen Hauptmoduln der 2. bis 5. Stufe 119

§. 3. Weitere Discussion und Aufstellung der Definitionsgleichungen für diese Moduln 121

§ 4. Genauerer Verfolg der vier einzelnen Modulfunctionen . 128

§ 5. Modulformen 137

Capitel II.

Die Modulargleichungen der Galois'schen Hauptmoduln der zweiten bis fünften Stufe.

§ 6. Transformation n. Ordnung, Repräsentanten 143

§ 7. Die zugehörigen Modulargleichungen 147

§ 8. Die Substitutionen der Modulargleichungen in sich . . . 150

§ 9. Zuordnung der Simultansubstitutionen 153

§ 10. Die Fälle $n \equiv +1$ modulo ϱ 156

§ 11. Die Fälle $n \equiv -1$ modulo ϱ 162

§ 12. Die Fälle $n \equiv \pm 2$ modulo 5 166

Capitel III.

Wirkliche Aufstellungen der Modulargleichungen.

§ 13. Die Doppelverhältnissmodulargleichungen 170

§ 14. Die Tetraedermodulargleichungen 176

§ 15. Die Oktaedermodulargleichungen 179

§ 16. Die Ikosaedermodulargleichungen 181

[redacted]

IV.

Anziehung eines der Kugel analogen Gebildes von n Dimensionen auf einen Punkt.

Von

R. Hoppe.

Einleitung.

Das Gesetz der Newton'schen Anziehung einer homogenen Kugel ist bekanntlich in den 2 Sätzen enthalten:

Die Anziehung der Kugel auf einen äussern Punkt ist gleich der ihres Mittelpunkts mit vereinigter Gesamtmasse.

Die Anziehung einer concentrischen Hohlkugel auf einen Punkt innerhalb ihrer innern Oberfläche ist null.

Beide Sätze gelten für keine andere Dimensionszahl als 3, wenn die Anziehung der (-2)ten Potenz der Entfernung proportional ist. Man kann jedoch das Newton'sche Gesetz auch folgendermassen aussprechen:

Ein Punkt zieht alle auf dem Radius normalen sich perspectivisch deckenden Flächenelemente gleich stark an.

Erweitert man diese Hypothese von 3 auf n Dimensionen, so ist statt des Flächenelements ein Element von $n-1$ Dimensionen zu setzen. Daraus geht hervor. dass die sich auf n Dimensionen entsprechende Anziehung der $(1-n)$ten Potenz der Entfernung proportional sein muss.

Es ist der Zweck des Folgenden zu zeigen, dass unter dieser Annahme jene 2 Sätze von jeder Dimensionszahl gelten.

Wir nennen den Ort eines Punktes, dessen n Coordinaten x die Bedingung

$$\Sigma x^2 \leqq c^2$$

erfüllen, die runde $n$dehnung für den Radius c und den Anfangspunkt als Mittelpunkt.

§. 1. Anziehung auf einen äussern Punkt.

Der Mittelpunkt O der runden n-dehnung V, deren Radius $= c$, sei Anfang der n Coordinaten $x, \ldots$, die x Axe gehe durch den angezogenen Punkt P, für welchen $x = a > c$ sei. Die Dichte von V, die Masse von P und die Anziehung der Masse 1 auf die Masse 1 in der Entfernung 1 seien $= 1$.

Wir schneiden V durch die lineare $(n-1)$ dehnung

$$x = \text{const}$$

Der Schnitt S ist eine runde $(n-1)$ dehnung, deren Radius

$$e = \sqrt{c^2 - x^2}$$

Concentrisch mit S construiren wir die runde $(n-1)$ dehnung T mit dem Radius ϱ. Bei Variation von ϱ variirt die Grenze (Umhüllung) von T proportional ϱ^{n-2} und sei

$$U = N\varrho^{n-2}$$

Dann ist N eine bloss von n abhängige Zahlengrösse. Nun hat U in allen Punkten denselben Abstand

$$r = \sqrt{(a-x)^2 + \varrho^2}$$

von P; folglich ist seine Anziehung auf P

$$= \frac{U}{r^{n-1}}$$

und deren Componente in der Richtung nach O

$$= U \frac{a-x}{r^n}$$

Aus U und V erhält man S und V durch Integration

$$S = \int_0^e U \partial\varrho; \quad V = \int_{-c}^{c} S \partial x$$

Bezeichnet M die Anziehung von V auf P, so erhält man nach Einsetzung der Werte:

$$V = N \int_{-c}^{c} \partial x \int_{0}^{e} \varrho^{n-2} \partial \varrho$$

$$M = N \int_{-c}^{c} \partial x (a-x) \int_{0}^{e} \frac{\varrho^{n-2} \partial \varrho}{[(a-x)^2 + \varrho^2]^{\frac{n}{2}}} \tag{1}$$

Die Ausführung der erstern Integration gibt:

$$V = \frac{N}{n-1} \int \partial x (c^2 - x^2)^{\frac{n-1}{2}} = \frac{N c^n}{n-1} \int \frac{\partial x}{\sqrt{x}} (1-x)^{\frac{n-1}{2}}$$

oder

$$V = \frac{N c^n}{n-1} \frac{\Gamma \frac{1}{2} \, \Gamma \frac{n+1}{2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \tag{2}$$

Das letztere Integral geht durch die Substitution

$$\varrho = (a-x) \operatorname{tg} \vartheta; \quad e = (a-x) \operatorname{tg} \alpha \tag{3}$$

über in

$$M = N \int_{-c}^{c} \partial x \int_{0}^{\alpha} \sin^{n-2} \vartheta \, \partial \vartheta \tag{4}$$

Für $x = \pm c$ verschwindet e, also auch α; daher gibt die teilweise Integration:

$$M = N \int_{-c}^{c} (a-x) \sin^{n-2} \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} \partial x$$

das ist

$$M = N \int_{-c}^{c} \frac{(a-x)(c^2 - ax)(c^2 - x^2)^{\frac{n-3}{2}}}{(a^2 + c^2 - 2ax)^{\frac{n}{2}}} \partial x \tag{5}$$

Dies Integral ist verschiedener Form für gerades und ungerades n. Wir behandeln jeden Fall einzeln und fügen zu M, N, V die Dimensionszahl als Index.

§. 2. Ungerade Dimensionszahl.

Setzt man

$$k = \frac{a-c}{a+c}; \quad z^2 = \frac{a^2+c^2-2ax}{(a+c)^2} \tag{6}$$

so kommt:

$$a(1-k) = c(1+k)$$

$$(a-x)(c^2-ax) = \frac{(a+c)^4}{4a}(z^4-k^2)$$

$$c^2-x^2 = \frac{(a+c)^4}{4a^2}(1-z^2)(z^2-k^2)$$

$$\partial x = -\frac{(a+c)^2}{a} z\partial z$$

daher

$$M_n = \frac{2c^n}{a^{n-1}} \frac{N_n}{(1-k)^n} \int_k^1 \frac{z^4-k^2}{z^{n-1}} [(1-z^2)(z^2-k^2)]^{\frac{n-3}{2}} \partial z \tag{7}$$

also

$$M_{2n+1} = \frac{2c^{2n+1}}{a^{2n}} \frac{N_{2n+1}}{(1-k)^{2n+1}} \int_k^1 \frac{z^4-k^2}{z^{2n}} [(1-z^2)(z^2-k^2)]^{n-1} \partial z$$

$$V_{2n+1} = \frac{c^{2n+1} N_{2n+1}}{2n} \frac{\Gamma\frac{1}{2}\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} = \frac{(n-1)!\,2^n}{1.3\ldots(2n+1)} c^{2n+1} N_{2n+1}$$

Bezeichnet E den Coefficienten des Integrals und Q das Integral, so dass

$$M_{2n+1} = EQ$$

so ist

$$E = \frac{1.3\ldots(2n-1)n}{(n-1)!\,2^{n-1}} \frac{V_{2n+1}}{a^{n-2}} \frac{1}{(1-k)^{2n+1}}$$

Um zuerst die Form von Q zu untersuchen, schreiben wir

$$Q = \int_k^1 \left(z^2 - \frac{k^2}{z^2}\right) \left[(1-z^2)\left(1-\frac{k^2}{z^2}\right)\right]^{n-1} \partial z$$

dann ist ersichtlich, dass Q ganze Functionen von k ist, da k in keinem Nenner eintritt, ohne sich gegen den Zähler zu heben. Zum Grade der Function tragen die Terme $\left(\frac{k}{z}\right)^2$ nicht bei, folglich ist es der Grad von $z^2.(1-z^2)^{n-1}\partial z$, das ist der $(2n+1)$te.

[redacted]

Setzt man nun

$$Q = \int_k^1 Z \partial z,$$

so wird

$$\frac{\partial Q}{\partial k} = \int_k^1 \frac{\partial Z}{\partial k} \partial z - Z_k \quad (Z_k = Z \text{ für } z = k)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial k^2} = \int_k^1 \frac{\partial^2 Z}{\partial k^2} \partial z - \left(\frac{\partial Z}{\partial k}\right)_k \left(\frac{\partial Z_k}{\partial k}\right) - \frac{\partial Z_k}{\partial k}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{\partial^m Q}{\partial k^m} = \int_k^{1} \frac{\partial^m Z}{\partial k^m} \partial z - \sum_{h=0}^{h=m-1} \frac{\partial^h}{\partial k^h} \left(\frac{\partial^{m-h-1} Z}{\partial k^{m-h-1}}\right)_k \tag{8}$$

Für jedes $h > m - n$ ist $m - h - 1 < n - 1$, enthält also Z nach $m - h - 1$ Differentiationen noch den Factor $z^2 - k^2$, und verschwindet der betreffende Term in der Summe (8); obere Grenze der letzteren ist demnach $m - n$.

Für $h < n - 1$ ist der Factor $1 - z^2 = 1 - k^2$ noch vorhanden. Nach Substitution von $k = 1$ verschwinden daher die betreffenden Terme, und es bleiben nur die Werte:

$$h = n - 1 \quad \text{bis} \quad h = m - n$$

Das Integral im Ausdruck (8) verschwindet für jedes m, folglich verschwindet die rechte Seite für $m < 2n - 1$. Es bleiben nur zu untersuchen die Werte:

$$m = 2n - 1 \quad \text{wo} \quad h = n - 1$$
$$m = 2n \quad \text{wo} \quad h = n - 1 \quad \text{und} \quad n$$

Sei

$$\left[\frac{\partial^m (1 - y^2)^n}{\partial y^m}\right]_{y=1} = \overset{n}{p}_m$$

Setzt man also $k = yz$, so wird

$$\frac{\partial^m (z^2 - k^2)^n}{\partial k^m} = z^{2n} \frac{\partial^m (1 - y^2)^n}{\partial y^m}$$

$$\left[\frac{\partial^m (z^2 - k^2)^n}{\partial k^m}\right]_{z=k} = k^{2n} \overset{n}{p}_m$$

Nun ist

$$(z^4-k^2)\left[(1-z^2)(z_2-k^2)\right]^{n-1}=(1-z^2)^{n-1}(z^2-k^2)^n$$
$$-z^2(1-z^2)^n(z^2-k^2)^{n-1}$$

daher

$$\left(\frac{\partial^{n-1}Z}{\partial k^{n-1}}\right)_k=-\frac{(1-k^2)^n}{k^{n-1}}\overset{n-1}{p}_{n-1} \tag{9}$$

$$\left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial k^{n-1}}\left(\frac{\partial^{n-1}Z}{\partial k^{n-1}}\right)_k\right]_{k=1}=0$$

$$\left(\frac{\partial^{2n-1}Q}{\partial k^{2n-1}}\right)_{k=1}=0$$

ferner

$$\left(\frac{\partial^n Z}{\partial k^n}\right)_k=\frac{(1-k^2)^{n-1}}{k^n}\overset{n}{p}_n-\frac{(1-k^2)^n}{k^{n-2}}\overset{n-1}{p}_n$$

$$\left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial k^{n-1}}\left(\frac{\partial^n Z}{\partial k^n}\right)_k\right]_{k=1}=\overset{n-1}{p}_{n-1}\overset{n}{p}_n$$

und nach Gl. (9)

$$\left[\frac{\partial^n}{\partial k^n}\left(\frac{\partial^{n-1}Z}{\partial k^{n-1}}\right)_k\right]_{k=1}=-\overset{n}{p}_n\overset{n-1}{p}_{n-1}$$

Die negative Summe beider ist

$$\left(\frac{\partial^{2n}Q}{\partial k^{2n}}\right)_{k=1}=0$$

Demnach verschwindet Q mit allen Differentialquotienten bis zum $(2n)$ten, hat also den Factor

$$(1-k)^{2n+1}$$

Nach Gl. (7) ist jetzt

$$M_{2n+1}=\frac{2c^{2n+1}}{a^{2n}}N_{2n+1}C$$

und C unabhängig von k.

§. 3. Gerade Dimensionszahl.

Das gleiche Resultat lässt sich auf gleichem Wege durch andere Transformationen für M_{2n} gewinnen. Sei

$$M_{2n}=EQ;\quad E=\frac{2c^{2n}N_{2n}}{a^{2n-1}(1-k)^{2n}};\quad Q=Q_1-Q_2$$

wo

$$Q_1=\int_k^1\frac{\partial z}{z^{2n-5}}\left[(1-z^2)(z^2-k^2)\right]^{n-1}$$

$$Q_2 = k^2 \int_k^1 \frac{\partial z}{z^{2n-1}} \left[(1-z^2)(z^2-k^2)\right]^{n-\frac{3}{2}}$$

Substituirt man

$$z = \frac{k}{y}$$

so kommt:

$$Q_2 = k \int_k^1 \frac{\partial y}{y^{2n-3}} \left[(1-y^2)(y^2-k^2)\right]^{n-\frac{3}{2}}$$

und wenn man wieder z statt y schreibt:

$$Q = \int_k^1 \frac{z^2-k}{z^2-k} \left[(1-z^2)(z^2-k^2)\right]^{n-\frac{3}{2}} \partial z \tag{10}$$

Sei jetzt

$$z^2 = \cos^2\varphi + k^2 \sin^2\varphi,$$

dann wird

(11)

$$Q = (1-k)(1-k^2)^{2n-2} \int_0^{\mathrm{R}} \frac{\cos^2\varphi - k\sin^2\varphi}{(\cos^2\varphi + k^2\sin^2\varphi)^{n-1}} (\sin\varphi\cos\varphi)^{2n-2}\, \partial\varphi$$

Es ist zuerst zu beweisen, dass dies eine ganze Function von k ist, und der Grad zu bestimmen. Wir setzen

$$R^n{}_m = (1-k^2)^{2n} \int_0^{\mathrm{R}} \frac{(\sin\varphi\cos\varphi)^{2n}\,\partial\varphi}{(\cos^2\varphi + k^2\sin^2\varphi)^m}$$

dann ist

$$R^0{}_1 = \frac{\mathrm{R}}{k}$$

und es lässt sich teilen:

$$R^n{}_1 = \int_0^{\mathrm{R}} \frac{T\partial\varphi}{\cos^2\varphi + k^2\sin^2\varphi} + (-k^2)^n R^0{}_1$$

wo

$$T = (1-k^2)^{2n}(\sin\varphi\cos\varphi)^{2n} - (-k^2)^n_{\bullet}$$

Setzt man

$$(1-k^2)\sin^2\varphi = q$$

so wird

$$\frac{T}{\cos^2\varphi + k^2\sin^2\varphi} = \frac{q^n(1-k^2-q)^n - (-k^2)_n}{1-q}$$

das ist, da Zähler und Nenner für $q = 1$ verschwinden, ganze Func-

tion $(2n-1)$ten Grades von q und bei constantem φ ganze Function $(4n-2)$ten Grades von k.

Bezeichnet $\operatorname{Exp}(K)$ die Gradexponenten der ganzen Function K von k, so ist hiernach

$$\operatorname{Exp}(R^n{}_1) = 4n-2 \tag{12}$$

Durch teilweise Integration erhält man:

$$R^n{}_m = -\frac{(1-k^2)^{2n-1}}{2(m-1)}\int_0^R (\sin\varphi\cos\varphi)^{2n-1}\partial\varphi\,\frac{\partial}{\partial\varphi}(\cos^2\varphi+k^2\sin^2\varphi)^{1-m}$$

$$= \frac{2n-1}{2(n-1)}(1-k^2)^{2n-1}\int_0^R \frac{(\sin\varphi\cos\varphi)^{2n-2}\cos 2\varphi\,\partial\varphi}{(\cos^2\varphi+k^2\sin^2\varphi)^{m-1}} \tag{13}$$

insbesondere

$$R^n{}_2 = \frac{2n-1}{2}(1-k^2)^{2n-1}\int_0^R \frac{(\sin\varphi\cos\varphi)^{2n-2}\cos 2\varphi\partial\varphi}{\cos^2\varphi+k^2\sin^2\varphi}$$

$$= (2n-1)(1-k^2)^{2n-2}\int_0^R (\sin\varphi\cos\varphi)^{2n-2}\partial\varphi$$

$$-\frac{2n-1}{2}(1+k^2)R^{n-1}{}_1$$

woraus mit Anwendung von (12) zu ersehen, dass

$$\operatorname{Exp}(R^n{}_2) = 4n-4 \tag{14}$$

Reducirt man das Integral (13) nochmals durch die gleiche teilweise Integration, so stellen sich die ursprünglichen Formen wieder her und man findet:

$$R^n{}_m = \frac{2n-1}{(m-1)(m-2)}\left\{\frac{2n-3}{4}(1-k^2)^2R^{n-2}{}_{m-2} - (2n-2)R^{n-1}{}_{m-2}\right\} \tag{15}$$

Die Gleichungen (12) (14) bestätigen den Wert

$$\operatorname{Exp}(R^n{}_m) = 4n-2m$$

Wird dieser zur Rechten von Gl. (15) zugrunde gelegt, so ergibt ihn auch die Linke; folglich gilt er für jedes grössere m und n.

Nun ist

$$Q = R^{n-1}{}_{n-2} - kR^{n-1}{}_{n-1}$$

daher

$$\operatorname{Exp}(Q) = 2n$$

[redacted]

Differentiirt man nun den Ausdruck (11) von Q successive $2n-2$ mal nach k, so behält der Coefficient stets den Factor $1-k$, und das Integral verschwindet für $k=1$ nebst seiner ersten Ableitung. Folglich verschwindet Q nebst seinen $2n-1$ ersten Differentialquotienten für $k=1$, hat also den Factor

$$(1-k)^{2n}$$

und der ergänzende Factor ist constant.

Hiermit ist für gerade und ungerade n bewiesen, dass

$$M_n = \frac{2c^n}{a^{n-1}} N_n C \tag{16}$$

§. 4. Erstes Anziehungsgesetz.

Nach Gl. (16) und (7) hat man jetzt:

$$C = (1-k)^{-n} \int_k^1 \frac{z^2-k^2}{z^{n-1}} \left[(1-z^2)(z^2-k^2)\right]^{\frac{n-3}{2}} \partial z$$

wo C unabhängig von k. Setzt man $k=0$, so kommt:

$$C = \int_0^1 z^2(1-z^2)^{\frac{n-3}{2}} \partial z = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{z}(1-z)^{\frac{n-3}{2}} \partial z$$

$$= \frac{\Gamma\frac{3}{2}\,\Gamma\frac{n-1}{2}}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{\Gamma\frac{1}{2}\,\Gamma\frac{n+1}{2}}{2(n-1)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

und nach Vergleichung mit dem Ausdruck (2):

$$C = \frac{V^n}{2N_n c^n}$$

Dies in Gl. (16) eingeführt gibt:

$$M_n = \frac{V_n}{a^{n-1}}$$

Wie anfangs angezeigt, gilt also der Satz:

Eine homogene runde $n$dehnung zieht einen äussern Punkt ebenso stark an als ihr Mittelpunkt mit vereinigter Gesamtmasse.

§. 5. Anziehung auf einen innern Punkt.

Betrachten wir jetzt den Fall $a < c$, so wird die vorige Rechnung sehr wenig modificirt. Um über die Vorzeichen sicher zu sein, braucht man nur stets mit positiven Grössen zu rechnen, namentlich die Integralintervalle ins Positive zu legen. Zunächst gilt Gl. (1) ohne Unterschied. Zwischen die Grenzen $-c$ und c fällt der Wert $x = a$, wo $a-x$ sein Vorzeichen wechselt. Teilen wir hier das Intervall, so bleibt das Integral im untern Teile $-c < x < a$ im gleichen Falle, und behält seine Transformationen. Im obern Teile $a < x < c$ setzen wir

$$\varrho = (x-a)\operatorname{tg}\vartheta; \quad e = (x-a)\operatorname{tg}\beta$$

dann ist voraus bekannt, dass der obere Teil negativ ausfallen muss: es kann nur sein

$$M = N\left(\int_{-c}^{a}\partial x\int_{0}^{\alpha}\sin^{n-2}\vartheta\,\partial\vartheta - \int_{a}^{c}\partial x\int_{0}^{\beta}\sin^{n-2}\vartheta\,\partial\vartheta\right)$$

Bei teilweiser Integration $\int\partial x = x-a$ verschwindet der integrirte Teil auch an der Uebergangsstelle, und man findet nach Wiedereinführung von x für α und β, dass sich die zwei Teile zum Ausdruck (5) zusammenfügen, der nun nicht weiter geteilt zu werden braucht.

Jetzt ist statt des negativen k das positive

$$h = \frac{c-a}{c+a} = -k$$

einzuführen und vom Ausdruck (6) die positive Wurzel von z^2 anzuwenden, die für $x = c$

$$z = h$$

wird. Statt Gl. (7) erhält man dann:

$$M_n = \frac{2c^n}{a^{n-1}}\frac{N_n}{(1+h)^n}\int\frac{z^4-h^2}{z^{n-1}}\left[(1-z^2)(z^2-h^2)\right]^{\frac{n-3}{2}}\partial z$$

Das Integral ist dieselbe Function von h wie das Integral (7) von k; sein Wert ist also wie bewiesen

$$C(1-h)^n$$

und man findet:

$$M_n = \frac{V_n}{a^{n-1}}\left(\frac{1-h}{1+h}\right)^n = \frac{V_n}{a^{n-1}}\left(\frac{a}{c}\right)^n$$

§, 6. Zweites Anziehungsgesetz.

Bezeichnet W_n das Volum einer runden *n*dehnung vom Radius a, so verhält sich

$$V_n : W_n = c^n : a^n$$

daher ist die Anziehung von V_n auf den innern Punkt $x = a$

$$M_n = \frac{W_n}{a^{n-1}}$$

das heisst:

Eine runde *n*dehnung zieht einen innern Punkt so stark an als eine concentrische runde *n*dehnung, deren Grenze durch jenen Punkt geht.

Sei $a < b < c$. Dann ist die Anziehung der 2 concentrischen runden *n*dehnungen mit den Radien b und c gleich stark, folglich die der Schale, welche ihre Differenz bildet, $= 0$, und man hat das anfangs angezeigte zweite Gesetz:

Das homogene Gebilde zwischen den Grenzen zweier concentrischen runden *n*dehnungen übt auf einen Punkt innerhalb der innern Grenze eine Anziehung $= 0$.

Bemerkungen.

Da der Inhalt des Grenzgebildes von V

$$= \frac{\partial V}{\partial c}$$

ist, so gelten beide Gesetze auch von der Anziehung des Grenzgebildes.

In Anwendung auf ebene Gebilde ergibt sich, dass die auf die Ebene beschränkte Anziehung einer Kreisfläche und Kreislinie auf einen äussern Punkt $x = a$ bzhw.

$$= \frac{2\mathrm{R}c^2}{a}, \quad \frac{4\mathrm{R}c}{a}$$

auf einen innern Punkt $x = a$ bzhw.

$$= 2\mathrm{R}a, \quad 0$$

ist. Zur Vergleichung sei angeführt, dass für Anziehung in (—2)ter Potenz die Anziehung der Kreisfläche auf den Punkt $x = a \gtrless c$ bzhw.

$$= 2\,\frac{(2-k^2)K-2E}{1\pm k'}$$

für den elliptischen Modul

$$k=\frac{2\sqrt{ac}}{a+c}$$

ist, ein Wert der für $a=\infty$ und $a=0$ das Gesetz erfüllt, in der Nähe des Kreises unendlich wird. Nach Potenzen von k entwickelt gibt dies für äussern Punkt:

$$\frac{2\mathrm{R}c^2}{a^2}\,\varphi(k);\ \ \varphi(k)=1+\frac{3}{128}k^4+\dots$$

für innern Punkt:

$$\frac{2\mathrm{R}a^2}{a^2}\,\psi(k);\ \ \psi(k)=\tfrac{1}{4}k^2\left(1+\tfrac{1}{2}k^2+\frac{43}{128}k^4+\dots\right)$$

Variirt k von 0 bis 1, so wachsen $\varphi(k)$ und $\psi(k)$ beständig, während sich der Punkt bzhw. aus unendlicher Ferne und aus dem Mittelpunkt dem Kreise nähert, bzhw. von 1 und 0 bis ∞. $\varphi(0)=1$ entspricht dem Gesetze, $\psi(0)=0$ hingegen dem der vollen Kreisfläche nicht, sondern ist nur dem des Kreisrings, wo statt $a^2:a^2$ zu setzen ist $(c^2-b^2):a^2$; $\lim c=0$; $\lim b=0$; $\lim a=0$, wegen Unbestimmtheit vereinbar. Hier gibt es dafür eine Wurzel der transcendenten Gleichung

$$\psi(k)=1$$

nämlich

$$\frac{a}{c}=0{,}74763$$

welche dem Gesetze für die volle Kreisfläche entspricht.

V.

Ueber die Pascal'sche Spirale.

Von

Anton Sucharda,

Lehrer am k. k. Oberrealgymnasium in Tabor.

I.

Es sei mir gestattet, in den folgenden Zeilen auf zwei Erzeugungsarten der Pascal'schen Spirale (Limaçon de Pascal), die meines Wissens noch nirgends Erwähnung gefunden haben, aufmerksam zu machen und aus den sich hiebei ergebenden Tangenten-Constructionen einen neuen Beweis für die Richtigkeit der bekannten Tangenten-Construction in einem Punkte der Conchoide abzuleiten.

Eine kreiskrumme Kante $\breve{K}$ vom Radius $2r$ drehe sich um ihren, zur Projections-Ebene $\overline{M}$ normalen und von dieser im Punkte s halbirten Durchmesser $\breve{O}$ in gleichförmiger Winkelbewegung. Sie werde zugleich von einem sich gleichförmig bewegenden Punkte p durchlaufen [1]), dessen Winkelgeschwindigkeit dem Drittel der ihrigen gleichkommt. Untersuchen wir die Orthogonal-Projection der absoluten Trajectorie von p in die Projections-Ebene.

Die Orthogonal-Projection von $\breve{O}$ ist der Punkt $\overline{O^I}$, die der beweglichen Kante in ihrer Anfangslage $\breve{K}^I$, und diejenige des Punktes

---

1) Das allgemeine Erzeugungs-Gesetz von sphärischen Curven durch Drehung einer Kreiskante, die durch einen physischen Punkt durchlaufen wird, als auch die hieraus hervorgehende Tangentenconstruction mit Hilfe eines Kräfte-Parallelogrammes verdanke ich den Vorträgen des Herrn Prof. Franz Tilser über die organische Geometrie a. der k. k. böhm. technischen Hochschule in Prag.

p, welcher mit einem Endpunkte des zu $\overline{O}$ normalen Durchmessers $\overline{P}$ zusammenfällt, p^I. (Fig. 1)[1])

Nach vollführter Umdrehung um den Winkel α gelangt die Kante K nach ${}^{\alpha}\tilde{K}$, ihre, den Punkt $\overline{O^I}$ enthaltende Projection ist ${}^{\alpha}K^I$, welches selbstverständlich mit K^I den genannten Winkel α einschliesst. Der Punkt p durchläuft unterdessen in der Kreiskante einen, dem Winkel $\frac{\alpha}{3}$ zugehörigen, Bogen und gelangt nach ${}^{\alpha}p$. Um dieses ${}^{\alpha}p$ zu finden, genügt es bekanntlich[2]) den Punkt in der Kante während ihrer Bewegung von $\tilde{K}$ bis ${}^{\alpha}\tilde{K}$ für unbeweglich aufzufassen, nachher erst aus seiner relativen Ruhelage, die wir nun mit p_{α} bezeichnen wollen, um den Winkel $\frac{\alpha}{3}$ im gehörigen Sinne zu verschieben.

Hiernach lässt sich ${}^{\alpha}p^I$ leicht auf folgende Art bestimmen: Denken wir uns ${}^{\alpha}\tilde{K}$ nach $\overline{M}$ klinogonal so projicirt, dass die Projection ${}^{\alpha}\tilde{K}^{II}$ mit dem Originale ${}^{\alpha}\tilde{K}$ congruent sei.

Der Punkt p, welcher zuerst in relativer Ruhe vorausgesetzt wurde, und folglich in einem der Endpunkte des nun in ${}^{\alpha}\overline{P}$ zu suchenden Durchmessers geblieben ist, projicirt sich selbstverständlich in p_{α}^{II}, welches mit dem erwähnten Endpunkte zusammenfällt.

Von den Klinogonal- und Orthogonal-Projectionen einzelner Punkte der Kante ${}^{\alpha}\tilde{K}$ liegen die ersteren in ${}^{\alpha}\tilde{K}^{II}$, die letzteren in ${}^{\alpha}\tilde{K}^I$; je zwei entsprechende in einer Normale zu ${}^{\alpha}\tilde{K}^I$.

Die Klinogonal-Projection ${}^{\alpha}p^{II}$ von p in seiner eigentlichen, also absoluten Lage ${}^{\alpha}p$ muss notwendig mit dem Endpunkte eines, dem Centri-Winkel $\frac{\alpha}{3}$ zugehörigen Bogens von ${}^{\alpha}\tilde{K}^{II}$ zusammenfallen, welcher p_{α}^{II} zum Anfangspunkte hat; die zugehörige Orthogonal-Projection fällt — nach dem Erwähnten — mit dem Fusspunkte der von ${}^{\alpha}p^{II}$ zu ${}^{\alpha}\tilde{K}^I$ gefällten Normale zusammen. Für successiv grössere und grössere Werte von α erhalten wir bei einem, dem angeführten ana-

1) Es sei bemerkt, dass in diesem Aufsatze gemäss der von Prof. F. Tilser eingeführten Bezeichnungsart, p^I die Orthogonal-Projection des Punktes p, p_1 des derselben entsprechende Bild bezeichnet; p^{II} und p_2 beziehen sich auf die Klinogonal-Projection.

2) Vergl. Prof. Tilser's Vorträge, oder Duhamel's Analytische Mechanik.

[redacted]

logen Verfahren (also unter stetiger Benutzung der erwähnten Klinogonal-Projection) eine beliebige Anzahl von Orthogonal-Projectionen des beweglichen Punktes p. Für $\alpha = \pi$ ist in der Klinogonal-Projection der Bogen $\frac{\pi}{3}$ aufzutragen, und wir erhalten die Orthogonal-Projection ${}^{r}p$ in ${}^{r}p^{I}$, welches — weil ${}^{r}K^{I}$ mit K^{I} zusammenfallen muss — in $\tilde{K}^{I}$ enthalten ist. Es ist leicht einzusehen, dass ${}^{r}p^{I}$ die zugehörige Hälfte von $\tilde{K}^{I}$ halbirt.

Suchen wir nun die Polargleichung der, durch die erwähnten Projectionen von p gebildeten Curve für ${}^{r}p$ als Pol und $\tilde{K}^{I}$ als Polarachse.

Nach dem Carnotschen Satze schreiben wir:

$$\overline{{}^{r}p^{I}\,{}^{\alpha}p^{I}}^{2} = \overline{O^{I}\,{}^{\alpha}p^{I}}^{2} + \overline{O^{I}\,{}^{r}p^{I}}^{2} + 2\,\overline{O^{I}\,{}^{\alpha}p^{I}}\;\overline{O^{I}\,{}^{r}p^{I}}\cos\alpha$$

oder, weil

$$\overline{{}^{r}p^{I}\,{}^{\alpha}p^{r}} = \varrho,\quad \overline{O^{I}\,{}^{\alpha}p^{I}} = 2r\cos\frac{\alpha}{3},\quad \overline{O^{I}\,{}^{r}p^{I}} = r \text{ ist:}$$

$$\varrho^{2} = r^{2}\left(1 + 4\cos^{2}\frac{\alpha}{3} + 4\cos\frac{\alpha}{3}\cos\alpha\right)$$

welche Gleichung, da

$$\cos\alpha = 4\cos^{3}\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3}$$

auf die einfachere Form

$$\varrho = r\left(4\cos^{2}\frac{\alpha}{3} - 1\right) \tag{1}$$

gebracht werden kann.

Es erübrigt nun, den Winkel α durch die Anomalie φ zu ersetzen

Aus dem Dreiecke $O^{I}\,{}^{\alpha}p^{I}\,{}^{r}p^{I}$ folgt nach dem Sinus-Satze:

$$\sin\varphi = 2\cos\frac{\alpha}{3}\sin(\alpha - \varphi)$$

Die linke Seite dieser Gleichung durch das mit $\sin\varphi$ äquivalente Product $2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}$ ersetzend, finden wir durch Vergleich, dass wenn

$$\cos\frac{\alpha}{3} = \cos\frac{\varphi}{2} \tag{2}$$

wäre,

$$\sin(\alpha - \varphi) = \sin\frac{\varphi}{2}$$

gesetzt werden müsste; und es sind diese Prämissen auch vollkommen berechtigt, denn beide liefern für φ einen und denselben Wert $\frac{2\pi}{3}$. Durch Substitution aus (2) in (1) erhalten wir nun:

$$\varrho = r\left(4\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1\right)$$

oder schliesslich, $1 + \cos\varphi$ anstatt $2\cos^2\frac{\varphi}{2}$ setzend:

$$\varrho = r(2\cos\varphi + 1)$$

als die gesuchte Polar-Gleichung.

„Die Orthogonal-Projection der absoluten Trajectorie in eine zur „Achse $\bar{O}$ normale Ebene ist somit eine Pascal'sche Spirale."

Aus der im vorigen angeführten Erzeugungsart ergibt sich auch eine besondere Tangenten-Construction.

Man braucht da nur in Erwägung zu ziehen, dass die Tangente von ${}^{\alpha}p^{I}$ nichts anderes ist als die Orthogonal-Projection der Tangente des Punktes ${}^{\alpha}p$ zur sphärischen Curve, ferner dass letztere Tangente identisch ist mit der Resultante zweier auf p in seiner Lage ${}^{\alpha}p$ einwirkenden Kräfte, deren eine sie zur rotirenden Bewegung mit der Kante, die andere zum Durchlaufen derselben zwingt. Die erste dieser Kräfte wirkt in der Tangente $\overline{{}^{\alpha}pm}$ des Kreises $\tilde{U}$, welchen der Punkt durchlaufen würde, bliebe er in der Kante unbeweglich, die andere ist $\overline{{}^{\alpha}pn}$, nämlich die Tangente der Kante $\tilde{K}$ in ihrer mit ${}^{\alpha}\tilde{K}$ bezeichneten Lage.

Weil die Winkelgeschwindigkeit der Bewegung in der letztgenannten Kante dreimal kleiner ist, werden die Bahnen, welche der Punkt in demselben Zeitraume in der einen und in der anderen Richtung zurücklegen würde, sich zu einander verhalten wie der Radius r_U des Kreises $\tilde{U}$ zum Drittel jenes vom Kreise $\tilde{K}$, und die Componenten des zugehörigen Kräfteparallelogrammes werden folglich diesen Längen proportional sein; die Diagonale seiner Projection ist die gesuchte Tangente der Spirale.

Denken wir uns folglich (Fig. 1) in ${}^{\alpha}p^{I}$ eine Normale zu $\overline{O^{I}\,{}^{\alpha}p^{I}}$ von der Länge $r_U = \overline{O^{I}\,{}^{\alpha}p^{I}}$ so errichtet, dass ihr Endpunkt m^{I} von ${}^{\alpha}p^{I}$ aus genommen, nach der Seite hin gelegen erscheine, nach welcher der Punkt von ${}^{\alpha}p$ sich hinbewegt, so haben wir schon die Projection einer Seite des Kräfteparallelogrammes, dessen andere, ihr benachbarte, sich orthogonal in ${}^{\alpha}\tilde{K}^{I}$ klinogonal in der Tangente

$\overline{{}^a p^{II} n^{II}}$ zu ${}^a\check{K}^{II}$ projicirt, den Punkt n zum Endpunkte habend, dessen Klinogonal-Projection von ${}^a p^{II}$ um die Strecke $\frac{2r}{3}$ absteht. Die Orthogonal-Projection dieses Punktes liegt in der aus n^{II} zu $\overline{O^I\, {}^a p^I}$ gefällten Normale, folglich in n^I, wodurch auch die andere Seite der Parallelogramm-Projection bestimmt erscheint. Fügen wir nun noch die zwei gegenüberliegenden bei, so ist die dem Punkte ${}^a p^I$ zugehörige Diagonale $\overline{{}^a p^I q^I}$ die gesuchte Tangente.

Es sei gestattet zu zeigen, wie diese Construction auf eine bedeutend bequemere zurückgeführt werden kann.

Man sieht leicht ein, dass bei einem, zu dem angeführten normalen Parallelogramme die entsprechende Diagonale zur angeführten Tangente normal, folglich zur Normale parallel sein müsste. Dieses Parallelogramm erhalten wir auf folgende Weise:

Eine seiner Seiten sei $\overline{{}^a p^I O^I}$; weil $\overline{O^I\, {}^a p^{II}}$ normal ist zu $\overline{{}^a p^{II} n^{II}}$, genügt es, in Befolg der bereits erklärten Construction, auf $\overline{O^I\, {}^a p^{II}}$ das Drittel $\overline{O^I p^I}$ dieser Länge aufzutragen; durch die aus r^I zu $\overline{O^I\, {}^a p^I}$ Parallele wird die dem Punkte O^I gegenüberliegende Ecke t^I des gesuchten Parallelogrammes bestimmt. Die Diagonale $\overline{O^I t^I}$ ist zur Normale von ${}^a p^I$ parallel.

Schon früher wurde erwähnt, dass ${}^r p^I$ die zugehörige Hälfte von K^I halbirt; folglich wird die verlängerte Strecke $\overline{O^I\, {}^a p^{II}}$ mit Hilfe des um $\overline{O^I}$ als Centrum mit dem Radius r beschriebenen Kreises L^I in drei gleiche Teile geteilt. Die zu $\overline{v^I\, {}^a p^I}$ durch $\overline{O^I}$ parallele Gerade trifft folglich $\overline{{}^a p^I\, {}^a p^{II}}$ in dem uns bekannten Punkte t^I. Somit ist sie mit der vorher erwähnten Diagonale identisch, und $\overline{v^I\, {}^a p^I}$, als zu ihr parallel und den Punkt ${}^a p^I$ enthaltend, die Normale der Spirale in diesem. Unsere Construction ist also die folgende:

Wir bestimmen ${}^a p^{II}$, und darauf $\overline{{}^a p^{II} O^I}$, um v^I zu erhalten; die Normale zu $v^I\, {}^a p^I$ ist die gesuchte Tangente.

Um diese Construction schliesslich noch von ${}^a K^{II}$ unabhängig zu erhalten, erwägen wir folgendes:

Die Gerade $\overline{{}^a p^I\, {}^r p^I}$ wird von L^I im Punkte w^I getroffen. Die durch $\overline{O^I}$ und w^I bestimmte Gerade treffe ${}^a\check{K}^{II}$ in einem gewissen Punkte u^I. Aus bekannten Gründen ist

$$\overline{{}^a p^I w^I} = \overline{O^I w^I} = \overline{w^I u^I}$$

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$\text{Wkl. } {}^{r}p^{I}w^{I}O^{I} = {}^{a}p^{II}w^{I}\,{}^{a}p^{I} = \beta$$

so ist der Gleichheit der vorangeführten Strecken zufolge:

$$w^{I}\,{}^{a}p^{I}O^{I} = \frac{\beta}{2}$$

und

$$w^{I}\,{}^{a}p^{I}u^{I} = \frac{\pi - \beta}{2}$$

folglich

$$O^{I}\,{}^{a}p^{I}u^{I} = \frac{\pi}{2}$$

also der Punkt n^{I} mit ${}^{a}p^{II}$ identisch. Hieraus geht hervor, dass $\overline{{}^{a}p^{II}O^{I}}$ den Kreis L^{I} in demselben Punkte schneidet, in welchem dieser von $\overline{{}^{r}p^{I}\,{}^{a}p^{I}}$ getroffen wird.

Unsere Construction ist also schliesslich folgende:

Wir machen $\overline{{}^{a}p^{I}\,{}^{r}p^{I}}$, um w^{I} zu erhalten, dann $\overline{w^{I}O^{I}}$, und erhalten v^{I}. Die Normale in ${}^{a}p^{I}$ zu $\overline{v^{I}\,{}^{a}p^{I}}$ ist die gewünschte Tangente.

II.

Längs einer Schraubencurve $\check{A}$, deren Achse $\overline{O}$ zur Orthogonal-Projections-Ebene $\overline{M}$ normal, die Tangenten aber unter dem Winkel α geneigt sind, und deren Leitcylinder den Halbmesser R besitzt, bewege sich der Mittelpunkt einer kreiskrummen Kante $\check{B}$ vom Radius r, deren Ebene hiebei zur genannten Projections-Ebene parallel verbleibe. Durch diese bewegliche Kante wird die unter dem Namen gewundene Kreiscylinderfläche [1]) bekannte Rückungsfläche erzeugt.

An diese sei bei der, durch eine beliebige, gegen die Projections-Ebene geneigte, Gerade $\overline{S}$ gegebenen Parallel-Beleuchtung die Grenzisophote [2]) zu construiren.

Bekanntlich ist die Orthogonal-Projection der Curve $\check{A}$ ein Kreis $\check{A}^{I}$ vom Radius h, welcher die Orthogonal-Projection $\overline{O}^{I}$ der Achse $\ddot{O}$ zum Mittelpunkte hat. (Fig. 2.) Durch einen beliebigen, von der Projections-Ebene um die Strecke $\zeta a = R \operatorname{tg} \alpha$ entfernten Punkt a

1) 2) Vergl. Burmester: Theorie u. Darstellung der Beleuchtung gesetzmässig gestalteten Flächen.

jener Achse denken wir uns Parallele zu allen Tangenten eines Schraubenganges. Ihre Spuren füllen, wie leicht einzusehen, den Kreis $\tilde{A}^I$ vollständig aus, hier mit ihren eigenen Projectionen zusammenfallend. Durch die Spur m der durch a zu $\bar{S}$ parallelen Geraden und durch jeden der genannten Punkte, z. B. durch ${}^{M}p$, ist die Trace $\overline{{}^{M}R}$ einer, mit den zu $\bar{S}$ parallelen Tangential-Ebenen des durch die Tangente $\overline{{}^{M}T_a}$ der Schraubencurve bestimmten, die Rückungsfläche längs des Kreises ${}^{M}\tilde{B}$ berührenden Cylinders gegeben.

(Diese Tracen bilden somit ein Stralenbüschel vom Centrum m.)

Es ist einleuchtend, dass jedem Punkte ${}^{M}a^I$ der Curve $\tilde{A}^I$ als Orthogonal-Projection des Berührungspunktes der Tangente $\overline{{}^{M}T}$ auf diese Art ein bestimmter Punkt ${}^{M}p^I$ der erwähnten Curve entspricht. Die Tangente des ersteren ist parallel zur Normale des letzteren in Bezug auf die genannte Curve. Zu jedem Punkte ${}^{M}a^I$ gehört nun ein Kreis ${}^{M}\tilde{B}^I$ vom Radius r. Es ist das die Orthogonal-Projection der, dem Mittelpunkte ${}^{M}a$ zugehörigen Erzeugenden ${}^{M}\tilde{B}$. Die Berührungspunkte von ${}^{M}\tilde{B}^I$ mit dem zu $\overline{{}^{M}R^I}$ parallelen Tangenten gehören bekanntlich schon der Orthogonal-Projection der gesuchten Grenzisophote an. Es sind das die in dem zu $\overline{{}^{M}R^I}$ normalen Durchmesser $\overline{{}^{M}D^I}$ enthaltenen Punkte ${}^{M}i^I$, ${}^{M}u^I$. In Berücksichtigung dieses Umstandes, als auch der gegenseitigen Lage der Punkte ${}^{M}a^I$ und ${}^{M}p^I$ gelangen wir zu folgendem Schlusse:

Könnte durch entsprechende Viertelumdrehung des Kreises $\tilde{A}^I$ in seiner Eigenschaft als Träger der Punkte ${}^{M}a^I$ und der Geraden $\overline{{}^{M}D^I}$, der Punkt ${}^{M}a^I$ mit ${}^{M}p^I$ zur Deckung gebracht werden, so würden auch die Geraden $\overline{{}^{M}D^I}$ und $\overline{{}^{M}R^I}$ zur Deckung gelangen. Hieraus folgt aber:

Ebenso wie die Geraden $\overline{{}^{M}R^I}$, bilden auch alle Durchmesser $\overline{{}^{M}D^I}$ ein Stralenbüschel.[1]) Sein Centrum n^I kann durch entsprechende rückwärtige Drehung von m^I leicht ermittelt werden. Da nun aber jeder von diesen, den Punkt n^I enthaltenden Durchmessern zwei von ${}^{M}a^I$ um r abstehende Punkte ${}^{M}i^I$ ${}^{M}u^I$ der Grenzisophoten-Projection enthält, gelangen wir zu folgendem Schlusse:

---

1) Gelegentlich der Durchsicht einer Zeichnung wurde ich einst von Herrn Prof. Tilser auf diesen Umstand aufmerksam gemacht und veranlasst, den diesbezüglichen Beweis zu erbringen.

„Die Orthogonal-Projection der Grenzisophote in eine zur Achse „der Schraubencurve normale Ebene, ist eine Conchoide auf circularer „Basis."

Es sei nur nebenbei bemerkt, dass für besondere, leicht zu erratende Lagen der Spur m diese Curve in zwei concentrische, oder aber in zwei congruente nicht concentrische Kreise übergeht, und dass somit eventuell die behandelte Grenzisophote als Durchschnitt der Rückungsfläche mit zwei geraden Kreiscylindern aufgefasst werden kann.

In der Folge wollen wir unser Augenmerk ausschliesslich jenem Falle zuwenden, wo m in A^I enthalten, d. i. der Neigungswinkel von $\overline{S}$ gegen die Projections-Ebene gleich α ist. In diesem Falle liegt auch n^I in $\tilde{A}^I$, und die Conchoide wird zur Pascal'schen Spirale. (Fig. 3.) Wir sind somit zum zweiten Male bei der Eingangs dieser Zeilen angeführten Curve angelangt.

Da einem jeden der mit $\overline{{}^{M}D^{I}}$ bezeichneten, im Punkte n^I der Curve $\tilde{A}^I$ zusammenlaufenden Projectionen ein Durchmesser $\overline{{}^{M}D}$ im Raume entspricht, welcher den zugehörigen erzeugenden Kreis in den zwei Grenzisophoten-Punkten ${}^{M}i\,{}^{M}u$ trifft, folgt hieraus: Die sämtlichen Durchmesser $\overline{D}$ im Raume schneiden eine Mantellinie $\overline{C}$ des, die Schraubencurve projicirenden Kreiscylinders. (Ihre Orthogonal-Projection ist der mit n^I zusammenfallende Punkt $\overline{C}^I$.)

Da ferner dieselben je einer in den zur Projections-Ebene parallelen Ebenen des erzeugenden Kreises enthalten sind, und jeder in dessen Mittelpunkte die Leitcurve trifft, bilden sie ein gerades Konoid. Die Pascal'sche Spirale kann folglich als Orthogonal-Projection der Schnittcurve dieses Konoids mit der Rückungsfläche aufgefasst werden.

Versuchen wir, diesen Umstand benutzend, für einen Punkt a^I der Pascal'schen Curve die Tangente zu construiren. Diese ist bekanntlich identisch mit der Orthogonal-Projection der Tangente zu der erwähnten Raumcurve.

Letztere Tangente erhält man als Durchschnitt der, dem Punkte a zugehörigen Tangential-Ebenen beider ihn enthaltenden Flächen. Dem Punkte a gehört die Erzeugende $\overline{ab}$ des Konoids, von der die Leitcurve im Punkte b getroffen wird. Die Tangente $\overline{bc}$ zu dieser bestimmt mit der Leitgeraden des Konoids und seiner Richtungs-Ebene ein längs $\overline{ab}$ berührendes hyperbolisches Paraboloid. Ein beliebiger Punkt c von $\overline{bc}$ projicirt sich in c^I in die Projections-Ebene $\overline{M}$. Die

Gerade $\overline{c^I C^I}$ ist die Orthogonal-Projection der Trace des erwähnten Paraboloids in der, durch c zur Projections-Ebene parallelen Ebene $\overline{M_c}$. Die Parallele $\overline{a^I d^I}$ zu $\overline{b^I c^I}$ ist die Orthogonal-Projection der Geraden, welche mit $\overline{ab}$ die Tangential-Ebene im Punkte a zum Paraboloid bestimmt. Sie trifft die Ebene $\overline{M_c}$ im Punkte d; die Trace der erwähnten Tangential-Ebene in $\overline{M_c}$ ist folglich $\overline{dy} \parallel \overline{ab}$.

Die in $\overline{M_c}$ enthaltene Trace der Tangential-Ebene des Punktes a zur Rückungsfläche ist zu $\overline{ab}$ normal und vom Mittelpunkte c des Kreises, welcher die Trace des, dem Punkte a zugehörigen berührendenden Kreiscylinders bildet, um die Strecke $r = \overline{ab}$ entfernt.

Ihre Orthogonal-Projection muss folglich den Punkt e^I enthalten, für den es gilt: $\overline{c^I e^I} \,\sharp\, \overline{a^I b^I}$. Die Normale durch e^I zu $\overline{c^I e^I}$ trifft $\overline{d^I y^I}$ in f^I; f ist folglich der gemeinsame Punkt der Tracen beider Tangential-Ebenen, somit $\overline{fa}$ die gesuchte Tangente der Raumcurve, $\overline{f^I a^I}$ folglich die gesuchte Tangente der Spirale. Auch diese Construction kann ohne Schwierigkeiten auf die einfachste zurückgeführt werden, wenn man berücksichtigt, dass

$$\overline{a^I b^I} : \overline{b^I n^I} = \overline{d^I c^I} : \overline{c^I n^I} = \overline{d^I e^I} : \overline{e^I a^I} = \overline{e^I f^I} : \overline{e^I g^I}$$

Um also die Tangente des Punktes p zu erhalten [1]), errichten wir in diesem zu der Geraden $\overline{pn}$, welche auch den Punkt q enthält, eine Normale. Nun wird $\overline{pr} = \overline{nq}$, $\overline{rs} = \overline{qp}$ aufgetragen, und nachdem wir in r und s Normalen zu $\overline{ps}$ errichtet, die erste von ihnen von der zur Tangente des Kreises $\tilde{A}^I$ in q parallelen Geraden im Punkte t getroffen, endlich $\overline{tx}$ parallel zu $\overline{ps}$ gezogen; $\overline{px}$ ist die gesuchte Tangente. Um die Auftragung der vorerwähnten Strecken zu ersparen, benutzen wir direkt die Punkte p und q.

Weil $\overline{np}$ zu $\overline{ps}$ normal ist, benutzen wir, die vorbeschriebene Construction bei p, q, n wiederholend — wobei anstatt der Parallele zur Tangente des Kreises A^I folgerichtig eine Normale zu derselben angewendet wird — eine Parallele zur Normale des Punktes p.

Wir errichten also in p und q Normalen zu $\overline{pn}$; die erstere von ihnen wird von der zu $\overline{O^I q}$ parallelen Geraden in u durchschnitten. Nun ist $\overline{uv} \parallel \overline{np}$, und $\overline{nv}$ parallel zur gesuchten Normale. Doch auch

---

1) Von nun an bedeutet Fig. 3 das **unmittelbare** Bild einer Pascal-schen Spirale; die **unmittelbaren** Bilder der Punkte p, q, . . . sind nach Prof. Tilser mit p_1, q_1, . . . bezeichnet.

dieses lässt sich noch vereinfachen. Die Gerade $\overline{O^I q}$ trifft nämlich den Kreis A^I im Punkte k; da nun $\triangle\, nqk \backsim \triangle\, onu$, ist $\overline{kp} \parallel \overline{no}$, und folglich ist $\overline{kp}$ die gesuchte Normale.

Die Construction, auf das Einfachste zurückgeführt, ist demnach die folgende:

Um die Tangente des Punktes p zu erhalten, ziehe man $\overline{pn}$, um den Punkt q, dann $\overline{qO^I}$ um den Punkt k zu gewinnen. Die Senkrechte zu $\overline{kp}$ durch p ist die gesuchte Tangente.

Die in den vorigen Zeilen angeführte Construction lässt sich unter strenger Verfolgung des in II eingeschlagenen Weges sehr leicht bei allen Conchoiden — zu denen bekanntlich die Pascal'che Spirale zählt — in Anwendung bringen.

Man braucht da nur – vorausgesetzt der allgemeinste Fall — zu berücksichtigen, dass nun die Curve A^I — die sogenannte Basis der Conchoide — eine ganz beliebige Form haben, und der Punkt C^I - der Pol – nicht in derselben enthalten sein wird. Dies hat zur Folge, dass die Leitlinie der von uns angewendeten Rückungsfläche nunmehr keinem Kreiscylinder, sondern einem, durch A^I bestimmten, orthogonal-projicirenden, angehören, und dass die Leitgerade unseres Konoids keine Gerade dieses Cylinders, sondern eine mit diesem parallele $\overline{C}$ sein wird. In Anbetracht dessen, dass die Conchoide auch jetzt als Durchdringung der genannten zwei Flächen aufzufassen ist, kann Schritt für Schritt die in II erklärte Tangenten-Construction verfolgt werden.

Um die am Schlusse angeführte Vereinfachung derselben verwerten zu können, wolle man (Fig. 3) berücksichtigen, dass $\overline{qO^I}$ eine Normale zur Basis ist, und dass ferner $\overline{kC^I}$ mit $\overline{qu}$ parallel, folglich zu $\overline{pC^I}$ normal sein muss.

Der Punkt k darf demzufolge nun nicht in A^I, sondern im Durchschnitte von $\overline{qO^I}$ mit der in $\overline{C^I}$ zu $\overline{pC^I}$ errichteten Normale gesucht werden.

Folglich: „Soll die Tangente zu einer Conchoide, deren Basis „und Pol bekannt sind, in einem Punkte construirt werden, verbinde „man den Pol mit demselben durch seinen Radius-vector. Von die- „sem wird die Basis in einem, dem gegebenen entsprechenden Punkte „getroffen. Seine Normale zu derselben trifft mit der Normale des „Poles zum Radiusvector in einem Punkte der Normale des gegebe- „nen Punktes zusammen. Seine Normale ist die gesuchte Tangente."

Tabor, im März 1884.

[redacted]

VI.

Symmetrische und complementäre Verteilung der Indexsummenreste $\mathfrak{r}$ für Primzahlen von der Form:

$$p = 2^{2^\mu} + 1.$$

Von

J. Hermes.

Da in der Kreisteilung die Summe der Indices zweier aufeinander folgender Zahlen: $\operatorname{ind} \alpha + \operatorname{ind}(\alpha+1) \equiv \mathfrak{r} \bmod (p-1)$ darauf hin untersucht wird, ob sie ungerade oder durch 2, 4, 8, ... 2^r teilbar ist und hievon zunächst die betreffende Zerlegung der Zahl p in die Summe von Quadraten [1]) und somit auch eine Art der Auflösung des Problems im wesentlichen abhängt, so dürfte es von Interesse sein, auf die Verteilung der Zahlen $\mathfrak{r}$ näher einzugehen. Hiebei bieten sich die im Folgenden angegebenen Sätze dar, die sich gut zur Controle oder auch direct zur Aufstellung der $\mathfrak{r}$ brauchen lassen.

Denken wir uns $p-1$ Felder in Form eines Quadrates angeordnet und als Eingänge h der $\sqrt{p-1}$ horizontalen Reihen, von oben nach unten gehend, die Zahlen:

$$\frac{\sqrt{p-1}}{2^\infty};\ \tfrac{1}{2}\sqrt{p-1};\ \tfrac{1}{4}\sqrt{p-1};\ (\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2})\sqrt{p-1};\ \tfrac{1}{8}\sqrt{p-1};$$

$$(\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{2})\sqrt{p-1};\ (\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{4})\sqrt{p-1};\ (\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2})\sqrt{p-1};$$

---

1) vgl. Lagrange: résolution des équations numériques: Note 14. Bachmann: Lehre von der Kreisteilung, 10 te Vorlesung. Richelot: Crelle Journal Bd. IX pag. 215 ff. Jacobi Bd. XXX pag. 167.

etc. und als Eingänge h' der verticalen Reihen von links nach rechts gehend, die Zahlen:

$$\frac{p-1}{2^{\infty}};\ \tfrac{1}{2}(p-1);\ \tfrac{1}{4}(p-1);\ (\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2})(p-1);\ \tfrac{1}{8}(p-1)\ \ldots$$

benutzt und nun für irgend eine primitive Wurzel ε_1 in Bezug auf alle α von 1 bis $p-1$ die Summe $\operatorname{ind}\alpha+\operatorname{ind}(\alpha+1)\equiv \mathfrak{r} \bmod (p-1)$ gebildet, so wird jedes $\mathfrak{r}$ (als $h+h'$ dargestellt) zu einem bestimmten Felde gehören; hiebei werden aber, weil bekanntlich:

$$\operatorname{ind}\alpha+\operatorname{ind}(\alpha+1)\equiv\operatorname{ind}(p-\alpha)+\operatorname{ind}(p-\alpha-1)\quad \bmod (p-1)$$

nur die Hälfte der Felder getroffen und zwar jedes zweimal mit Ausnahme eines einzigen, das nur einmal, nämlich für:

$$\mathfrak{r}=\operatorname{ind}\left(\frac{p-1}{2}\right)+\operatorname{ind}\left(\frac{p+1}{2}\right)$$

erfolgt.

Es bleiben also $\frac{1}{4}(p-1)$ Felder leer und zählen für Null, ein Feld (Hauptfeld) zählt für Eins und $\frac{1}{4}(p-3)$ Felder für Zwei.

Jedes Feld möge nun durch dasjenige α {oder auch $-(\alpha+1)$} bezeichnet werden, aus dem sich das betreffende $\mathfrak{r}$ ergab.

Es gelten dann folgende Sätze:

1) In der oberen Hälfte des Quadrats {wo das Legendre'sche Symbol:

$$\left(\frac{\alpha(\alpha+1)}{p}\right)=+1,$$

denn $\operatorname{ind}\alpha+\operatorname{ind}(\alpha+1)$ ist eine gerade Zahl} entspricht jedem vollen[2]) Felde ein in bestimmter Weise (vgl. 5) symmetrisch liegendes volles Feld, mit Ausnahme des Hauptfeldes, das sich selbst entspricht und seines (je nach Wahl der primitiven Wurzel ε_1) rechts resp. links liegenden Nachbarfeldes, das sich auch selbst entspricht. Die Zahlen α und α_1 dieser beiden Felder sind:

$$\frac{p-1}{2}\quad\text{und}\quad\frac{p-1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt[4]{p-1}\,(\sqrt{p-1}-1)$$

2) In der untern Hälfte des Quadrats {wo $\left(\frac{\alpha(\alpha+1)}{p}\right)=-1$, denn $\operatorname{ind}\alpha+\operatorname{ind}(\alpha+1)$ ist eine ungerade Zahl} entspricht jedem vollen

2) Die Worte „voll" und „leer" können bei 1) und 2) auch mit einander vertauscht werden.

ein in derselben Weise wie vorhin symmetrisch liegendes leeres Feld {complementäre Beziehung} und muss daher die erste und letzte Horizontalreihe dieser Hälfte, ebenso wie die zweite und vorletzte etc. zusammen für $2\sqrt{p-1}$, also die untere Hälfte im Ganzen für $\frac{1}{4}\sqrt{p-1}\, 2\sqrt{p-1} = \frac{p-1}{2}$ zählen, mithin die obere für $\frac{p-3}{2}$.

3) Die erste Horizontalreihe beginnt mit $2^{\mu-1}$ leeren Feldern $\left\{\mu \geqq 2\right\}$, dann folgen $2^{\mu-1}$ volle, worunter die beiden sich selbst entsprechenden Felder.

4) Eine Veränderung der zu Grunde liegenden primitiven Wurzel ε_1 in eine andre ε lässt die Gesamtheit der in der untern Hälfte des Quadrats befindlichen Zahlen α invariant, ebenso wieder die in der unteren Hälfte des übrig bleibenden Teiles befindlichen Zahlen und so fort bis zur ersten Horizontalreihe. Auch hier bleibt die Gesamtheit der in der rechts liegenden Hälfte vorhandenen α invariant und wieder die Hälfte des übrig bleibenden Teiles und so fort bis zu jenen leeren Anfangsfeldern {analog den quadratischen Nichtresten, den quadratischen, aber nicht zugleich biquadratischen Resten, den biquadratischen, nicht zugleich 8ten Potenzresten etc. ...} Jede dieser Gruppen wird also im Ganzen für eine solche Zahl zählen, die $\equiv 0 \bmod 4$ ist, mit Ausnahme der beiden sich selbst entsprechenden Felder, welche zusammen für $3 \equiv -1 \bmod 4$ zählen.

5) Legen wir im Folgenden eine solche primitive Wurzel ε zu Grunde, dass $\varepsilon^{\vartheta} \equiv 2 \bmod p$ und $\vartheta = 2^{2^{\mu}-\mu-1}$, so lässt sich die Symmetrie zweier zusammengehöriger Felder $\mathfrak{r} = h + h'$ und $\mathfrak{r}_1 = h_1 + h_1'$ durch die Bedingung:

$$h + h' + h_1 + h_1' \equiv -\frac{(p-1)}{2^{\mu-1}} \bmod (p-1)$$

angeben, woraus folgt:

$$h + h_1 \equiv 0 \bmod \sqrt{p-1}$$

{also wird z. B. einem Felde in der Horizontalen mit dem Eingange $\frac{1}{8}\sqrt{p-1}$ ein Feld in der Horizontalen $(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2})\sqrt{p-1}$ entsprechen}; es wird nun aber $\frac{h'+h_1'}{\sqrt{p-1}}$ nicht $\equiv 0 \bmod (p-1)$, was eine völlige Symmetrie herstellen würde, sondern für die erste resp. eine andre Horizontale wird:

$$\left.\begin{matrix} 0 \\ \text{resp. } 1 \end{matrix}\right\} + \frac{1}{\sqrt{p-1}}(h' + h_1') \equiv -2^{2^{\mu-1}-\mu+1} \bmod \sqrt{p-1}$$

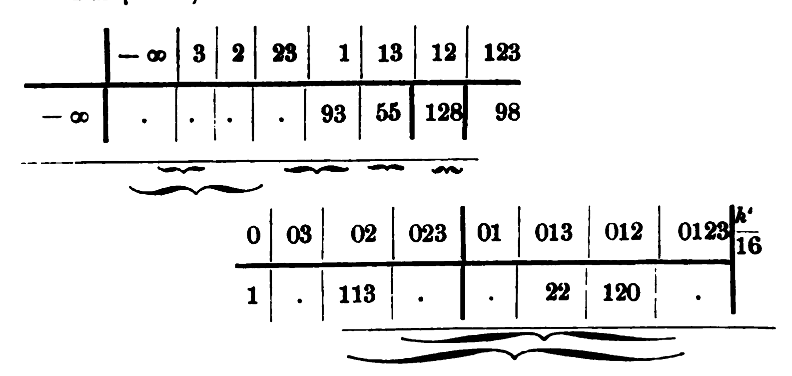
Hiedurch tritt also eine Abweichung von der völligen Symmetrie in Betreff der Verticalen ein, und erscheint die Verteilung auf den ersten Blick unregelmässig.

6) Des $2^\mu + 1$te Feld gehört zu $\alpha = 1$.

Beispiele: $\mu = 2$; $\varepsilon = 6$. {Als Eingänge sind nur die Exponenten von 2 angegeben, z. B. $2^0 + 2^1$ durch 01 angedeutet, und statt h' der $\sqrt{p-1}$te Teil von h' gesetzt}.

Tabelle α	$-\infty$	1	0	01	$\frac{h'}{4}$
$-\infty$	.	.	8	5	
1	1	.	6	.	
0	2	.	.	.	
01	3	7	.	4	
h					

Für $\mu = 3$, $\varepsilon = 115$ lautet die erste Horizontale:



	$-\infty$	3	2	23	1	13	12	123
$-\infty$	.	.	.	.	93	55	128	98

0	03	02	023	01	013	012	0123	$\frac{h'}{16}$
1	.	113	.	.	22	120	.	

Für $\mu = 4$, $\varepsilon = 11490$ folgen nach den ersten 8 leeren Feldern zuerst:

$$\alpha = 27567, \quad 8786, \quad 5271, \quad 17684, \quad 5081. \quad 5826$$

dann die sich selbst entsprechenden 32768, 30728 dann 1 etc.

Beweis. Bilden wir $\alpha(\alpha+1) \equiv \varrho \bmod p$ für $\alpha = \frac{p-1}{2}$ und für

$$\alpha_1 = \frac{p-1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt[4]{p-1}\,(\sqrt{p-1}-1)$$

so ergibt sich:

$$\varrho \equiv \frac{p-1}{4} \quad \text{und} \quad \varrho_1 \equiv -\left(\frac{p-1}{4}\right) \bmod p$$

also:

$$\varrho^2 \equiv \varrho_1^2 \equiv -\left(\frac{p-1}{16}\right) \bmod p$$

und es wird

$$\operatorname{ind}\left[-\left(\frac{p-1}{16}\right)\right] \equiv -\frac{(p-1)}{2^{\mu-1}} \bmod (p-1)$$

Wir können daher die Congruenz

$$x(x+1) \,.\, y(y+1) \equiv -\left(\frac{p-1}{16}\right) \bmod p$$

oder auch

$$\operatorname{ind} x + \operatorname{ind}(x+1) + \operatorname{ind} y + \operatorname{ind}(y+1) \equiv -\frac{(p-1)}{2^{\mu-1}} \bmod (p-1)$$

vgl. Satz 5)

1) durch $x \equiv y \equiv \alpha$ identisch mit $x_1 \equiv y_1 \equiv -(\alpha+1)$

befriedigen; dies sind die sich selbst entsprechenden Felder, das erste einfach, das zweite doppelt zählend.

Nun lässt die Cougruenz

$$RS \equiv -\left(\frac{p-1}{16}\right) \bmod p$$

noch $p-3$ Wertepaare R und S zu, wo R und S verschieden, aber es werden offenbar nicht alle Congruenzen $x(x+1) \equiv R$ {und dazu $y(y+1) \equiv S$} möglich sein, sondern, da zugleich $(2x+1)^2 \equiv 4R+1$, so muss das Legendre'sche Symbol:

$$\left(\frac{4R+1}{p}\right) = +1$$

sein und dies findet in $\frac{p-1}{2}$ Fällen nicht statt, also bleiben

$$(p-3) - \frac{p-1}{2} = \frac{p-5}{2}$$

Fälle übrig.

Existirt nun ein α, für welches $\alpha(\alpha+1) \equiv R \bmod p$, und ist hierin $R \equiv \varepsilon^{2^\pi \nu} \bmod p$, {wobei ν eine ungerade Zahl sei, und also für $\pi = 0$ resp. > 0 das Symbol $\left(\frac{\alpha(\alpha+1)}{p}\right) = -1$ resp. $+1$ wird}, so muss auch wegen der vorausgesetzten Existenz von α, das Symbol $\left(\frac{4R+1}{p}\right) = +1$, also

$$4R+1 = \varepsilon^{2^\pi k+2\vartheta}+1 \equiv \varepsilon^{2^k}{}_{\mathfrak{q}}$$

sein, wo $k \overset{=}{>} 1$.

Multiplicirt man diese Congruenz mit $\varepsilon^{-2^\pi \mathfrak{p}-2\vartheta}$, so erhält man, da $1 \equiv^{-}(p-1)$,

$$1+[-(p-1)]\varepsilon^{-2^\pi \mathfrak{p}-2\vartheta} \equiv \varepsilon^{2^k \mathfrak{q}-2^\pi \mathfrak{p}-2\vartheta} \bmod p$$

das ist:

$$1+\frac{4\left[-\frac{(p-1)}{16}\right]}{\varepsilon^{2^\pi \mathfrak{p}}} \equiv \varepsilon^{2^k \mathfrak{q}-2\vartheta-2^\pi \mathfrak{p}} \bmod p$$

Da die linke Seite $1+4S$ ist und einer Potenz von ε congruent wird, so entscheidet der Exponent, ob $\left(\frac{1+4S}{p}\right)=+1$ oder $=-1$ d. h. ob $y(y+1) \equiv S \bmod p$ möglich aufzulösen oder nicht.

Der Exponent $2^\varkappa \mathfrak{q}-2\vartheta-2^\varkappa \mathfrak{p}$ ist aber gerade, wenn $\varkappa > 0$, α also der oberen Hälfte des Quadrates angehört, dann gibt es also ein entsprechendes Feld β aus $\beta(\beta+1) \equiv S$ (vgl. Satz 1).

Ist dagegen $\pi = 0$ und daher $\left(\frac{\alpha(\alpha+1)}{p}\right) = -1$, so ist auch $y(y+1) \equiv S$ unmöglich, und das entsprechende Feld ist leer (vgl. Satz 2).

Da $\operatorname{ind}\alpha+\operatorname{ind}(\alpha+1) \equiv 2^\varkappa \mathfrak{p} \bmod (p-1)$ ist, so muss auch Satz 4) gelten, denn $R \equiv (\varepsilon^{\mathfrak{p}})^{2^\pi} \equiv (\varepsilon_1)^{2^\pi}$ ist ein 2^πter Potenzrest, S und und R gehören also in dieselbe Gruppe, die von π abhängt.

Die ersten 2^μ Felder enthalten solche $\mathfrak{r} \equiv \operatorname{ind}\alpha+\operatorname{ind}(\alpha+1)$ die durch 2ϑ teilbar sind, und zwar ist in den ersten $2^{\mu-1}$ Feldern $\mathfrak{r} = 2\vartheta . 2n_1$ in den folgenden $2^{\mu-1}$ Feldern $\mathfrak{r} = 2\vartheta(2n_1-1)$. Da nun $\varepsilon^\vartheta \equiv 2$ und $\varepsilon_1{}^\vartheta \equiv 2^{\mathfrak{p}}$, so ist $R \equiv \varepsilon_1{}^{\mathfrak{r}} \equiv 4^{2n}$ resp. 4^{2n-1}. Soll also α existiren, so muss $4^{2n+1} \pm 1$ resp. $4^{2n}+1$ quadratischer Rest zu $p = 2^{2^\mu}+1 = 4^{2^{\mu-1}}+1$ sein. Satz 3) ist daher bewiesen, sobald gezeigt wird, dass die um 1 vermehrte oder auch $\{$wegen $4^m(p-1) \equiv -4^m$ und $\left(\frac{-1}{p}\right) = +1\}$ verminderte ungerade Potenz von 4 quadratischer Nichtrest, dagegen eine um 1 vermehrte oder verminderte gerade Potenz yon 4 quadradischer Rest zu $p = 4^{2^{\mu-1}}$ ist. Der Fall $\left(\frac{4^{2n}-1}{p}\right)$ ist auf die drei andern zurückführbar, indem das Symbol

$$\left(\frac{4^{2n}-1}{p}\right)=\left(\frac{4^n+1}{p}\right)\left(\frac{4^n-1}{p}\right)$$

ist, und n nun entweder ungerade, oder falls es noch gerade, eine abermalige Zerlegung des 2ten Factors gestattet. Da ferner die drei Divisionen

$$\text{a)}\ \frac{x^t+1}{x^s+1} \qquad \text{b)}\ \frac{x^t-1}{x^s+1} \qquad \text{c)}\ \frac{x^t+1}{x^s-1}$$

als Reste resp.

a) x^r+1 oder $-(x^r-1)$
b) x^r-1 oder $-(x^r+1)$
c) x^r+1 lassen, wo $r<s$

und relativ prim zu s, wenn s relativ prim zu t, so bleibt bei dem bekannten Algorithmus des Jacobischen Reciprocitätsgesetzes in unserm Falle $\left(\frac{x^t\pm1}{x^r\pm1}\right)_{x=4}$, wenigstens eine der beiden im Zähler oder Nenner befindlichen, ebenfalls zu einander relativen Primzahlen, immer von der Form $4h+1$, weil dies ursprünglich der Fall war, auch darf das vor die Klammer gezogene Minuszeichen bei a) und b) fortfallen und so wird:

$$\left(\frac{x^{2n+1}\pm1}{p}\right)_{x=4} \quad \text{schliesslich:} \quad \left(\frac{\pm2}{x+1}\right)_{x=4}=\left(\frac{2}{5}\right)=-1$$

oder

$$\left(\frac{+2}{x-1}\right)^*_{x=4}=\left(\frac{2}{3}\right)=-1.$$

Wenn aber s und t einen Factor 2^π gemein haben, $\pi>0$, wird für $\left(\frac{x^{2n}+1}{p}\right)_{x=4}$ schliesslich

$$\left(\frac{\pm2}{x^{2^\pi}\pm1}\right)_{x=4}=\left(\frac{2}{8m\pm1}\right)=+1$$

erhalten. Ebenso ist auch

$$\left(\frac{x^{2n}-1}{p}\right)_{x=4}=+1$$

und somit Satz 3) bewiesen.

Zu 6). Das $2^\mu+1$te Feld gehört zu $\mathfrak{r}=\vartheta$, mithin folgt aus $\varepsilon^\vartheta\equiv2$, indem

*) Nicht $\left(\frac{-2}{x-1}\right)$, denn $(x-1)$ kann als Divisor nur bei c) auftreten.

$$\left(\frac{4.2+1}{p}\right) = \left(\frac{3^2}{p}\right) = +1 \text{ ist}$$

$$\alpha = \frac{3-1}{2} = 1.$$

Für die zunächst folgenden Felder käme $\left(\frac{x^{2n+1} \pm 1}{p}\right)_{x=2}$ in Betracht. Wir wollen jedoch nur den speciellen Fall $n = 2^{\mu-1}$ hervorheben, für welchen

$$\left(\frac{2^{2^\mu+1}+1}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) = +1$$

und

$$\left(\frac{2^{2^\mu+1}-1}{p}\right) = \left(\frac{3}{p}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = -1$$

wird. Die zugehörigen R sind hier $\frac{p-1}{2}$ und $-\left(\frac{p-1}{2}\right)$. Um überhaupt independent zu entscheiden, ob ein einzelnes Feld voll oder leer ist, muss in Bezug auf das zugehörige R, {so dass ind $R = h + h'$ ist} nach dem Reciprocitätsgesetze $\left(\frac{4R+1}{p}\right) = +1$ oder -1 ermittelt werden. Handelte es sich aber um die Durchführung für sämtliche Felder, so kann man folgende drei Wege einschlagen, von denen der letzte bei grösseren p [4]) am schnellsten znm Ziele führt.

I) Durch Multiplication der oben aufgestellten Ausdrücke für die Symbole: $\left(\frac{4R+1}{p}\right)$ und $\left(\frac{4S+1}{p}\right)$ ergibt sich leicht folgender Satz:

---

4) Die Entscheidung, ob $p = 2^{2^\mu}+1$ Primzahl oder nicht, kann nach dem Fermat'schen Satze durch Rechnung erfolgen, da im ersten Falle

$$\varepsilon_1^{2^{2^\mu}-\mu-1} = 2^\pi \mod p$$

sein müsste

$$\{\varepsilon_1 = 4^{2n+1} \pm 1\}.$$

Findet dies nun nicht statt, und ist also $p = P$ zerlegbar, so sind die Primfactoren wie bekannt in arithmetischen Reihen mit einer bestimmten Differenz h enthalten. Dies führt auf den Algorithmus der successiven Division. „Stellt man P in der Form $a + bq + cq^2 + \ldots$ dar, wo q ein Glied dieser arithmetischen $< \sqrt{P}$ sein möge, so wird, wenn q_1 die nächste um h kleinere Zahl bedeutet,

$$P = a + hb + ch^2 + \ldots + (b + 2ch + \ldots)q_1 + (c + \ldots)q_1^2 + \ldots$$
$$= a_1 + b_1 q_1 + c_1 q_1^2 + \ldots, \text{ wobei } a_1 < q_1,$$

indem

7) Wird $s = (2^{\mu} - 3)\vartheta$, $\varepsilon^{s \pm n} = r_{s \pm n} \bmod p$, $r_{s+n} + r_{s-n} = r_1$ und $\frac{p-1}{2} - r_1 = r_{11}$ gesetzt, so ist, je nachdem in $h + h' = \text{ind}(\pm r)$ und in $h + h' = \text{ind}\, r_{11}$ oder auch in $h + h' = \text{ind}(-r_{11} - 1)$ das zu Grunde liegende n gerade oder ungerade, das entsprechende Feld $h + h'$ voll oder leer. Doch werden hiebei, indem man n die geraden Zahlen von 0 bis $\frac{p-1}{2}$ durchlaufen lässt, nicht sämtliche vollen Felder getroffen.

II) Man schreibe in alle $p-1$ Felder statt der obigen nur in $\frac{p-1}{2}$ Feldern befindlichen α das zugehörige $\pm R \leqq \frac{p-1}{2}$ {„halbirende Anordnung der Reste"} und zu jedem R die um $+1$ algebraisch vermehrte Zahl R'.

Da sich nun die 4fachen R nämlich $4R = R_1$ in derselben Horizontalen befinden, so entscheidet über ein Feld R die zu R_1 geschriebene Zahl R_1', je nachdem sie mit einem quadratischen Reste in der oberen, oder mit einem Nichtreste in der unteren Hälfte identisch ist.

III) Man wende abwechselnd mit den oben angeführten Sätzen 1) und 2) {symmetrische und complementäre Beziehung}, nachdem man in alle $p-1$ Felder die zugehörigen R direct oder besser symbolisch geschrieben, folgenden Satz an {supplementare Beziehung}:

8) Das Feld R ist mit Feld $\frac{p-1}{2} - R$ folglich auch Feld $(-R)$ mit Feld $-\left[\frac{p+1}{2} - R\right]$ $\Bigg\}\; R \leqq \frac{p-1}{2}$ zugleich entweder voll oder leer, denn

---

$$a + bh + ch^2 + \ldots = a_1 + mq_1$$

gesetzt wird und

$$b_1 = m + b + 2ch + \ldots$$

etc. So lange nun $q > \sqrt[3]{P}$, werden durch dies Verfahren die Reste $a_1\, a_2, \ldots$ die

$$P \equiv \bmod q_1,\, q_2, \ldots$$

lässt, schneller (und mit Controle) ermittelt, als beim directen Dividiren, was wiederum für die $q < \sqrt[3]{P}$ bequemer und zuerst auszuführen ist. Denn lässt man nur Primzahlen zu, während man bei den grösseren q darauf keine Rücksicht zu nehmen braucht."

$$4R+1 \equiv -[4\left(\frac{p-1}{2}-R\right)+1] \bmod p$$

also auch, da

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=+1 \text{ ist, } \left(\frac{4R+1}{p}\right)=\left(\frac{4\left(\frac{p-1}{2}-R\right)+1}{p}\right)$$

Führen wir hienach das obige Beispiel $p=17$, $\mu=2$, $\varepsilon=6$ durch, so ergibt sich zuerst aus den Congruenzen $\varepsilon^1=6$, $\varepsilon^2\equiv 2$, $\varepsilon^4\equiv 4$, $\varepsilon^8\equiv -1$, $\varepsilon^{16}\equiv +1$ die Tabelle der R

Tabelle R	$-\infty$	1	0	01	$\frac{h'}{4}$
$-\infty$	1	−1	4	−4	
1	2	−2	8	−8	
0	6	−6	7	−7	
01	−5	5	−3	3	
h					

Es möge nun o,n bezeichnen, dass das durch die Anwendung der genannten Sätze in bestimmter Reihenfolge auftretende $n$te Feld leer, $2,n$ und $1,n$ dass es voll sei und resp. für zwei oder eins zählt, so ergibt sich entsprechend:

Tabelle ε^4 [5])	$-\infty$	6	0	01	$\frac{h'}{4}$
$-\infty$	0,5	0.6	1.1	2.2	
1	2.15	0.8	2.16	0.7	
0	2.14	0.12	0.4	0.9	
01	2.3	2.10	0.13	2.11	
h					

Hiebei treten zwei „Folgen" auf [6]). Die erste umfasst nur das 3te Feld der ersten Horizontalreihe 4, welches nach Satz 3) voll ist, aber als Hauptfeld einfach zählt 1,1. Die zweite Folge beginnt mit $R=-4$; voll 2,2 nach Satz 3). Hieraus nach Suppl. -5; voll 2,3. Nach Compl. 7; leer 0,4. Nach Suppl. 1; leer 0,5. Nach Symmetr. -1; leer 0,6 etc. und bricht mit $R=+8$; voll 2,16 ab, weil die supplementare Beziehung den nicht existirenden Wert $R=0$ verlangt.

Lässt man nun die Decimalen fort, welche je nur die an sich gleichgültige Reihenfolge bezeichnen und addirt paarweise, so erhält man nach einander die Summen ε^3, ε^2, ε^1, ε^0.

---

5) vgl. Journal für reine und angewandte Math. Bd. 87. pag. 86.

6) Bei $\mu=3$, $\varepsilon=115$ treten drei Folgen auf. (Allgemein?)

e^3		e^2	e^1	e^0
0	3	3	7	15
2	2	4		
2	0	2	8	
4	2	6		

Die Differenzen e geben dann bekanntlich die Grundzahlen der bei der Kreisteilung erforderlichen Zerlegung in Quadrate

$$p = 17 = (-3)^2 + 2^2 + 2^2 = (-1)^2 + (-4)^2 \equiv (-1)^2 \mod 16.$$

Die Vorzeichen der e werden für verschiedene primitive Wurzeln ε_1 zum Teil andre.

Königsberg i. P. den 22. Januar 1885.

VII.

Miscellen.

1.

Zur Theorie der Volumsbestimmungen.

Die Ausdehnbarkeit des Coordinatenbegriffes ermöglicht die directe Lösung von Aufgaben über Volumsbestimmungen von Körpern, welche von mehreren Flächen begrenzt werden, die auf gewöhnlichem Wege nur mittelst umständlicher Zerlegungen auszuführen sind.

Seien $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$, φ, φ_1, φ_2 sechs Flächen, welche einen Körper einschliessen, dessen Rauminhalt bestimmt werden soll. Je zwei derselben $\mathfrak{f}$ und φ, $\mathfrak{f}_1$ und φ_1 $\mathfrak{f}_2$ und φ_2 sollen aus Flächen allgemeinerer Art F, F_1, F_2 durch Specialisirung der in ihren Gleichungen vorkommenden Constanten hervorgehen, nämlich es werde:

$$1)\quad \text{aus}\quad F(x,y,z,\lambda)=0 \text{ für}\begin{cases}\lambda=\lambda_0 & F\equiv\mathfrak{f}\\ \lambda=\lambda_1 & F\equiv\varphi\end{cases},$$

$$2)\quad \text{aus}\quad F_1(x,y,z,\mu)=0 \text{ für}\begin{cases}\mu=\mu_0 & F_1\equiv\mathfrak{f}_1\\ \mu=\mu_1 & F_1\equiv\varphi_1\end{cases}$$

$$3)\quad \text{aus}\quad F_2(x,y,z,\nu)=0 \text{ für}\begin{cases}\nu=\nu_0 & F_2\equiv\mathfrak{f}_2\\ \nu=\nu_1 & F_2\equiv\varphi_2\end{cases}.$$

Zweien unendlich nahen Werten einer dieser Constanten, etwa λ, entsprechen zwei unendlich nahe liegende Flächen der Gattung F; für die Grenzwerte $\lambda=\lambda_0$ und $\gamma=\lambda_1$ gehen dieselben in die gegebenen den Körper begrenzenden Flächen $\mathfrak{f}$ und φ über. Werden

für jede der Constanten λ, μ, ν ein Paar unendlich naher Werte gesetzt, so entspricht dies dreien Paaren von unendlich nahen Flächen, die im allgemeinen einen Körper von unendlich kleinen Dimensionen begrenzen, der also als Volumselement angenommen werden kann.

Vorausgesetzt, dass den x, y, z die λ, μ, ν eindeutig entsprechen, können letztere Constanten als neue Variabeln eingeführt werden; durch diese naheliegende, der Natur der Aufgabe am besten entsprechende Wahl der Coordinaten, ergeben sich sehr einfache Grenzen des den Rauminhalt J darstellenden dreifachen Integrals, es wird nämlich:

$$J = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \int_{\mu_0}^{\mu_1} \int_{\nu_5}^{\nu_1} \Delta \, d\lambda . d\mu . d\nu$$

wo Δ die Functional-Determinante des Systemes x, y, z bedeutet, welches durch Auflösung des Systems 1) 2) 3) nach x, y, z erhalten wird; es ist

5) $$\Delta = \Sigma \pm \frac{\partial x}{\partial \lambda}, \frac{\partial y}{\partial \mu}, \frac{\partial z}{\partial \nu}$$

eine Function der Variabeln λ, μ, ν.

Der betrachtete Fall lässt noch eine weitere Verallgemeinerung zu, vielmehr es kann der allgemeine Fall, wo die Flächen $\mathfrak{f}$ und φ, $\mathfrak{f}_1$ und φ_1, $\mathfrak{f}_2$ und φ_2 in keiner Beziehung zu einander stehen, also wenn dieselben nicht durch Specialisirung der Werte gewisser Constanten entstehend gedacht werden, auf den eben betrachteten zurückgeführt werden. Werden nämlich drei Functionen gebildet:

6) $$F \equiv \lambda \mathfrak{f} + (1 - \lambda) \varphi = 0$$

7) $$F_1 \equiv \mu \mathfrak{f}_1 + (1 - \mu) \varphi_1 = 0$$

8) $$F_2 \equiv \nu \mathfrak{f}_2 + (1 - \nu) \varphi_2 = 0$$

so geht

F für $\lambda = 1$ in $\mathfrak{f} = 0$
$\lambda = 0$ in $\varphi = 0$
F_1 für $\mu = 1$ in $\mathfrak{f}_1 = 0$
$\mu = 0$ in $\varphi_1 = 0$
F_2 für $\nu = 1$ in $\mathfrak{f}_2 = 0$
$\nu = 0$ in $\varphi_2 = 0$ über.

Der Rauminhalt wird daher:

$$9)\qquad J=\int_1^0\int_1^0\int_1^0 \Delta\, d\lambda.d\mu.d\nu$$

wo Δ wieder die Functional-Determinante des Systems

$$x=\psi(\lambda.\mu.\nu)$$
$$y=\psi'(\lambda.\mu.\nu)$$
$$z=\psi''(\lambda.\mu.\nu)\quad\text{ist.}$$

Mit Vorteil kann manchmal von dem Satze Gebrauch gemacht werden, dass $\Delta.D=1$ ist, wenn D die Functional-Determinante des Systems:

$$\lambda=\frac{\varphi}{\varphi-\mathfrak{f}}$$

$$\mu=\frac{\varphi_1}{\varphi_1-\mathfrak{f}_1}$$

$$\nu=\frac{\varphi_2}{\varphi^2-\mathfrak{f}_2}\quad\text{bedeutet.}$$

Beispiel I. Der Rauminhalt eines Körpers ist zu besimmen, welcher durch drei Paare Ebenen begrenzt wird, deren Gleichungen aus den folgenden entstehen, wenn der Reihe nach $\alpha=\alpha_0$, $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_0$, $\beta=\beta_1$, $\gamma=\gamma_0$. $\gamma=\gamma_1$ gesetzt wird.

$$\begin{aligned} +y-\gamma z&=k\\ -\alpha x\qquad +z&=k\\ +x-\beta y\qquad &=k. \end{aligned}$$

Es sind Ebenen, welche sich paarweise in 3 sich nicht begegnenden Geraden schneiden, welche in Coordinaten-Ebenen parallel zu Axen liegen und vom Ursprung die Entfernung k haben.

Zunächst ist

$$x:y:z:1=k(1+\beta+\beta\gamma):k(1+\gamma+\alpha\gamma):k(1+\alpha+\alpha\beta):1-\alpha\beta\gamma$$

Daher nach Einsetzung der partiellen Differentialquotienten in den Ausdruck für Δ:

$$\Delta = \frac{k^3}{(1-\alpha\beta\gamma)^6}\begin{vmatrix} \beta\gamma(1+\beta+\beta\gamma), & 1+\gamma+\alpha\gamma, & \beta(1+\alpha+\alpha\beta) \\ \gamma\alpha(1+\gamma+\alpha\gamma), & 1+\alpha+\alpha\beta, & \gamma(1+\beta+\beta\gamma) \\ \alpha\beta(1+\alpha+\alpha\beta), & 1+\beta+\beta\gamma, & \alpha(1+\gamma+\alpha\gamma) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{k^3}{(1-\alpha\beta\gamma)^6}\left\{\begin{array}{l} 3\alpha\beta\gamma(1+\alpha+\alpha\beta)(1+\beta+\beta\gamma)(1+\gamma+\alpha\gamma)-\beta\gamma^2(1+\beta+\beta\gamma)^3 \\ -\gamma\alpha^2(1+\gamma+\gamma\alpha)^3-\alpha\beta^2(1+\alpha+\alpha\beta)^3 \end{array}\right\}$$

wird der Rauminhalt:

$$J = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\int_{\beta_0}^{\beta_1}\int_{\gamma_0}^{\gamma_1} \Delta \, d\alpha \, . \, d\beta \, . \, d\gamma$$

Die Integration dieses algebraischen Ausdruckes bietet kein weiteres Interesse.

Beispiel 2. 8 Punkte $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7 P_8$ bestimmen einen Körper, dessen 6 Seitenflächen

$$P_1P_2P_3P_4, \quad P_1P_2P_6P_5, \quad P_5P_6P_7P_8$$
$$P_3P_4P_8P_7, \quad P_1P_4P_5P_8, \quad P_2P_3P_6P_7$$

parabolische Hyperboloide sind, von denen je zwei benachbarte in einer Geraden, der Verbindungslinie zweier gegebener Punkte sich schneiden.

Um den Rauminhalt zu bestimmen, stehen zwei Wege offen. Es können die Gleichungen der Seitenflächen aufgestellt und nach der angegebenen Methode vorgegangen werden, oder es kann das folgende einfachere Verfahren gewählt werden, wobei von dem bekannten Satze, dass bei dieser Art windschiefer Flächen die eine Schaar Erzeugender von der anderen proportional geschnitten wird, vorteilhaft Gebrauch gemacht werden wird.

Der beliebige Punkt x, y, z entstehe durch den Schnitt dreier noch näher zu bestimmenden windschiefen Flächen obiger Art, nämlich $E_1 E_2 E_3$.

E_1 schneide den Körper in einem windschiefen Vierecke, 9, 10, 11, 12; 9.10 liege in der Fläche 1.2.3.4; dann ist

$$\frac{9.1}{1.4} = \frac{10.2}{2.3} \text{ constant } = a$$

ebenso

$$\frac{12.5}{5.8} = \frac{11.6}{6.7} = a$$

oder

$$9.1 = a.1.4, \qquad 12.5 = a.5.8$$
$$10.2 = a.2.3, \qquad 11.6 = a.6.7$$

E_2 schneide den Körper ebenfalls in einem windschiefen Vierecke, insbesondere 9.10 in 13 und 11.12 in 14.

Dann ist

$$\frac{9.13}{9.10} = \frac{12.14}{12.11} = b$$

oder

$$9.13 = b.9.10, \qquad 12.14 = b.12.11$$

oder wenn man statt der Strecken die Coordinaten einführt:

$$x_9 = x_1 + a(x_4 - x_1), \qquad x_{12} = x_5 + a(x_8 - x_5)$$
$$x_{10} = x_2 + a(x_3 - x_2), \qquad x_{11} = x_6 + a(x_7 - x_6)$$

$$x_{13} = x_1 + a(x_4 - x_1) + b[x_2 - x_1 + a(x_3 - x_2 - x_4 + x_1)]$$
$$x_{14} = x_5 + a(x_8 - x_5) + b[x_6 - x_5 + a(x_7 - x_6 - x_8 + x_5)]$$

Endlich schneide E_3 die Gerade 13.14 im Punkte (P) x, y, z, so dass ist:

$$\frac{P_{13}}{14.13} = c$$

oder

$$x = x_{13} + c(x_{14} - x_{13})$$

oder

$$x = x_1 + a(x_4 - x_1) + b(x_2 - x_1) + c(x_5 - x_1) + ab(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$$
$$+ ac(x_1 - x_4 - x_5 + x_8) + bc(x_1 - x_2 - x_5 + x_6)$$
$$+ abc(-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 - x_6 + x_7 - x_8)$$

y, z sind analog zusammengesetzt.

Sei

$$x_4 - x_1 = \xi_1, \qquad x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = \xi_4$$
$$x_2 - x_1 = \xi_2, \qquad x_1 - x_4 - x_5 + x_8 = \xi_5$$
$$x_5 - x_1 = \xi_3, \qquad x_1 - x_2 - x_5 + x_6 = \xi_6$$
$$-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 - x_6 + x_7 - x_8 = \xi_7$$

so ist

$$x = x_1 + a\xi_1 + b\xi_2 + c\xi_3 + ab\xi_4 + ac\xi_5 + bc\xi_6 + abc\,\xi_7$$
$$y = y_1 + a\eta_1 + b\eta_2 + c\eta_3 + ab\eta_4 + ac\eta_5 + bc\eta_6 + abc\,\eta_7$$
$$z = z_1 + a\zeta_1 + b\zeta_2 + c\zeta_3 + ab\zeta_4 + ac\zeta_5 + bc\zeta_6 + abc\,\zeta_1$$

Werden nun a, b, c als veränderliche Grössen betrachtet, so entspricht einem Wertsystem von abc ein einziger Punkt, da die letztern Gleichungen in Bezug auf x, y, z linear sind; der Aenderung z. B. von a bei constanten b, c ein Fortschreiten des Punktes in einer

der durch die Kanten 1.4, 5.8, 6.7 und 2.3 repräsentirten Schar von Erzeugenden angehörenden Geraden, während Aenderungen von b, c bei constanten ac, ab, zwei andere Systeme hervorbringen, denen beziehungsweise die Kanten 1.2, 4.3, 5.6, 8.7 und 1.5, 4.8, 3.7, 2.6 angehören. Diese veränderlich gedachten Grössen als neue Coordinaten eingeführt, und die partiellen Differentialquotienten gebildet, wird die Functional-Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_1+b\xi_4+c\xi_5+bc\xi_7, & \xi_2+a\xi_4+c\xi_6+ac\xi_7, & \xi_3+a\xi_5+b\xi_6+ab\xi_7 \\ \eta_1+b\eta_4+c\eta_5+bc\eta_7, & \eta_2+a\eta_4+c\eta_6+ac\eta_7, & \eta_3+a\eta_5+b\eta_6+ab\eta_7 \\ \zeta_1+b\zeta_4+c\zeta_5+bc\zeta_7, & \zeta_2+a\zeta_4+c\zeta_6+ac\zeta_7, & \zeta_3+a\zeta_5+b\zeta_6+ab\zeta_7 \end{vmatrix}$$

Die Grenzen des dreifachen Integrals werden bei dieser Wahl des Coordinatensystems sehr einfache sein. Die Summirung in Bezug auf a erstreckt sich von $a=0$ bis $a=1$, ebenso für b von $b=0$ bis $b=1$ und für c von $c=0$ bis $c=1$. Der Rauminhalt dieses Körpers repräsentirt sich daher durch:

$$J = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \Delta\, da\,.\,db\,.\,dc$$

Obige Determinante lässt sich umformen; die erste Colonne mit a, die zweite mit b, die dritte mit c multiplicirt hat zur Folge, dass in allen Elementen $abc\xi_7$, $abc\eta_7$ und $abc\zeta_7$ als Summanden erscheinen; durch Verwandlung in eine Determinante 4ten Grades, können diese Grössen heraus geschafft werden; es ist dann

$$\Delta = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ abc\xi_7, & a\xi_1+ab\xi_4+ac\xi_5, & b\xi_2+ab\xi_4+bc\xi_6, & c\xi_3+ac\xi_5+bc\xi_6 \\ abc\eta_7, & a\eta_1+ab\eta_4+ac\eta_5, & \dots & \dots \\ abc\zeta_7, & a\zeta_1+ab\zeta_4+ac\zeta_5 & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

die zweite, dritte und vierte Zeile durch abc dividirt, giebt:

$$\Delta = (abc)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1, & -1, & -1 \\ \xi_7 & \frac{\xi_1}{bc}+\frac{\xi_4}{c}+\frac{\xi_5}{b}, & \frac{\xi_2}{ac}+\frac{\xi_4}{c}+\frac{\xi_6}{a}, & \frac{\xi_3}{ab}+\frac{\xi_5}{b}+\frac{\xi_6}{a} \\ \eta_7 & \frac{\eta_1}{bc}+\frac{\eta_4}{c}+\frac{\eta_5}{b}, & \dots & \dots \\ \zeta_7 & \frac{\zeta_1}{bc}+\frac{\zeta_4}{c}+\frac{\zeta_5}{b}, & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Die Integration führt auf algebraische Ausdrücke mit Coëfficienten der Form $\Sigma \pm (x_m y_n z_p)$ und $\Sigma \pm (1\,.\,x_m\,.\,y_n\,.\,z_p)$.

Franz Rogel.

2.

Analytisch specifische Grössen des Vierecks.

Sind $(x_1 y_1)(x_2 y_2)(x_3 y_3)(x_4 y_4)$ in der Umfangsfolge die Ecken eines Vierecks V für den Schwerpunkt der gleich belasteten Ecken als Anfang, so kann man setzen:

$$x_1 = u - u_1; \quad x_2 = -u - u_2; \quad x_3 = u + u_1; \quad x_4 = -u + u_2$$
$$y_1 = v - v_1; \quad y_2 = -v - v_2; \quad y_2 = v + v_1; \quad y_4 = -u + v^2$$

Sei nun

$$Vx_0 = \int x \partial V; \quad Vy_0 = \int y \partial V; \quad w = u_2 v_1 + u_1 v_2$$
$$VA = \int x^2 \partial V; \quad VB = \int y^2 \partial V; \quad VD = \int xy \partial V$$

Dann ergeben sich folgende einfache Ausdrücke:

$$V = 2(u_2 v_1 - u_1 v_2); \quad x_0 = 2\frac{2u_1 u_2 v - uw}{3V}; \quad y_0 = 2\frac{vw - 2uv_1 v_2}{3V}$$

$$A = \frac{2u^2 + u_1{}^2 + u_2{}^2}{6}; \quad B = \frac{2v^2 + v_1{}^2 + v_2{}^2}{6}; \quad D = \frac{2uv + u_1 v_1 + u_2 v_2}{6}$$

Bedingung dafür, dass alle Trägheitsmomente für Axen, die durch den Schwerpunkt gehen, gleich sind, ist:

$$A - B = x_0{}^2 - y_0{}^2; \quad D = x_0 y_0$$

Beide Gleichungen haben in u, v die Form:

$$\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma uv = \varepsilon; \quad \lambda u^2 + \mu v^2 + \nu uv = \pi$$

Setzt man zur Abkürzung

$$a = \begin{vmatrix} \beta\gamma \\ \mu\nu \end{vmatrix}; \quad b = \begin{vmatrix} \gamma\alpha \\ \nu\lambda \end{vmatrix}; \quad c = \begin{vmatrix} \alpha\beta \\ \lambda\mu \end{vmatrix}$$

$$d = \begin{vmatrix} \alpha\varepsilon \\ \lambda\pi \end{vmatrix}; \quad e = \begin{vmatrix} \beta\varepsilon \\ \mu\pi \end{vmatrix}; \quad 2f = \begin{vmatrix} \gamma\varepsilon \\ \nu\pi \end{vmatrix}$$

so lautet die Lösung:

$$u^2 = \frac{-ce + a(-f + Q)}{c^2 - ab}; \quad v^2 = \frac{cd + b(f + Q)}{c^2 - ab}$$
$$Q^2 = f^2 - de$$

wodurch das 4 fach unendliche System trägheitscentrischer Vierecke dargestellt ist.

R. Hoppe.

V.

Transformationen der elliptischen Integrale und Functionen in Verbindung mit der Theorie der Kettenlinie.

Von

Emil Oekinghaus.

Fortsetzung von Teil II. Nr. VII.

Dritter Teil.

XII.

Da die elliptischen Functionen bei manchen dynamischen Problemen mit grossem Erfolg verwertet werden können, so werden wir dieselben und zwar mit Anschluss an die bisher entwickelten Reihen auf einige einfache Beispiele jener Art beziehen und wollen unsere Betrachtung zunächst darauf richten, die mechanische Bedeutung des elliptischen Integrals der ersten Art, also

1) $$u = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin\varphi^2}}$$

vermittelst der Kettenlinie zu definiren.

In der X-Achse dieser Curve schwinge ein Punkt um die Anfangslage in Folge der Wirkung einer Kraft hin und her. Wir setzen voraus, dass die wirkende Kraft einfach proportional sei der trigonometrischen Tangente des Tangentenwinkels der Kettenlinie, so dass also für die Oscillationsphase x des schwingenden Punktes das Gesetz der Bewegung durch die Formel

2) $$p = -g \operatorname{tg} \delta$$

charakterisirt wird.

Darin bedeutet p die Acceleration der Bewegung und g die der Schwere.

Die bekannte Bewegungsgleichung

$$vdv = -pdx,$$

ist demnach jetzt

$$vdv = -g \operatorname{tg} \delta \, dx,$$

und

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{dy}{dx},$$

also geht in Folge dieser Substitution die letzte Gleichung in

$$vdv = -g\, dy$$

über. Integrirt man, so folgt

$$\tfrac{1}{2}v^2 = -2gy + C.$$

Im Mittelpunkt sei die Geschwindigkeit $= c$, demnach hat man schliesslich

3) $$v^2 = c^2 + 2g - 2gy.$$

Diese Formel können wir in folgender Art deuten:

In der Kettenlinie bewege sich von einem durch die Ordinate h' bezeichneten Punkte ohne Anfangsgeschwindigkeit ein materieller Punkt in Folge der Schwere hin und her. Die Geschwindigkeit in der tiefsten Lage sei c, dann ist dieselbe im Punkte xy durch

$$v^2 = 2g(h' - y),$$

und im tiefsten Punkte durch

$$c^2 = 2g(h' - 1)$$

bestimmt.

Aus der Differenz beider Formeln ergibt sich

4) $$v^2 = c^2 + 2g - 2gy.$$

Demnach kann in Folge der Uebereinstimmung beider Gleichungen 3) und 4) die oscillirende Bewegung in der X-Achse auch in dem Sinne definirt werden, dass man sagt, die Geschwindigkeit im Abstand x von der Gleichgewichtslage ist gleich der Fallgeschwindigkeit des Punktes von h' bis y in der Kettenlinie. Zur Ableitung der Bewegungsgleichungen kann man also 2 Ausgangspunkte wählen, die zu demselben Ziele führen. Da nun $dt = \frac{dx}{dv}$, $dx = dy \cot \delta$, $\operatorname{tg} \delta = s$, $s^2 = y^2 - 1$, so hat man das Zeitintegral

[redacted]

5) $$t = \int \frac{dy}{\sqrt{2g(y^2-1)(h'-y)}}.$$

Die Reduction desselben auf die Normalform der elliptischen Integrale basirt auf den Substitutionen

6) $$Z = \frac{y-(h'-s')}{-y+h'+s'}$$

woraus

$$y = \frac{h'-s'+(h'+s')Z}{1+Z},$$

und

7) $$t = \int \frac{dZ}{\sqrt{g(h'+s')(Z^2-(g'-s)^2)(1-Z^2)}}.$$

Substituiren wir ferner hierin

$$Z = \frac{z'}{\sqrt{1-z^2 \sin\varphi^2}}, \quad z^2 = 1-(h'-s')^2,$$

woraus also

8) $$z' = h'-s'$$

so resultirt

9) $$t = \frac{1}{\sqrt{g(h'+s')}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-z^2 \sin\varphi^2}}.$$

Der Modulus hängt von den Grenzen des Integrals ab.

Der Ausdruck für y ist demnach:

10) $$y = \frac{1+z'\Delta}{z'+\Delta},$$

vergleiche VIII 8).

Aus dem Endintegral

11) $$t = \sqrt{\frac{z'}{g}} \int \sqrt{\frac{d\varphi}{1-z^2 \sin\varphi^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{g}{z'}(1+z'^2-2z'y)(y^2-1)}}$$

vergl. a. a. O.), folgt also auch

12) $$u = \sqrt{\frac{g}{z'}}.t, \quad K = \sqrt{\frac{g}{z'}}.T,$$

woraus

13) $$\frac{u}{K} = \frac{t}{T},$$

also

$$t = \frac{T}{K} \cdot u.$$

$2T$ bedeutet die Schwingungsdauer.

Die verschiedenen Phasen der Bewegung können nun bei Anwendung der Reihen in Functionen der Zeit leicht bestimmt werden

Die Zeit t rechnen wir vom Mittelpunkt der Bewegung an. Die Phase x wird nun durch

14) $$w = 8\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi t}{2T} - \frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi t}{2T} + \frac{1}{5}\frac{q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi t}{2T}\cdots\right)$$

als Function der Zeit bekannt.

Die Amplitude oder Schwingungsweite ist demnach

15) $$A = 8\left(\frac{q}{1-q^2} + \frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^6} + \frac{1}{5}\frac{q^5}{1-q^{10}} + \cdots\right).$$

Die Acceleration der Bewegung oder $g\,\mathrm{tg}\,\delta$ ist gleich

16) $$p = \frac{2\pi^2}{T^2}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi t}{2T} - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi t}{2T} + \frac{5q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi t}{T}\cdots\right).$$

Die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{g}{z'}(1 + z'^2 - 2z'y)}$$

oder

17) $$v = \frac{4\pi}{T}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi t}{2T} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi t}{2T} + \frac{q^5}{1-q^{10}}\cos\frac{5\pi t}{2T} - \cdots\right).$$

Uebrigens kann die eine Reihe leicht aus der andern abgeleitet werden.

Im Anschluss an diese Erörterung wollen wir auch noch die Bewegung eines schweren Punktes in einer Kettenlinie betrachten. Hierfür ist das Integral

18) $$t = \int\frac{ds}{\sqrt{2g(h'-y)}} = \int\frac{y\,dy}{\sqrt{-2g(y+1)(y-1)(y-h')}}.$$

Infolge der schon oben angewandten Substitution erhält man

$$t = \frac{1}{\sqrt{(h'+s')g}}\int\left(\frac{1}{\cos\varphi^2} - \frac{s'\mathrm{tg}\,\varphi^2}{\Delta}\right)d\varphi$$

oder

[redacted]

19) $$t = \frac{1}{\sqrt{\varkappa' g}}\left(E_\varphi - \operatorname{tg}\varphi\,(\Delta - \varkappa')\right).$$

Berücksichtigt man nun die in 104) abgeleitete Gleichung, so geht aus

$$t = \frac{1}{\sqrt{\varkappa' g}}\left(E_\varphi - \varkappa^2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta + \varkappa'}\right)$$

die folgende Reihe hervor

20) $$t = \frac{4\pi}{K\sqrt{\varkappa' g}}\left(\frac{Eu}{4\pi} - \frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^4}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} - \frac{q^6}{1-q^{12}}\sin\frac{3\pi u}{K} + \cdots\right).$$

Die halbe Schwingungszeit ist also

$$T' = \frac{E}{\sqrt{\varkappa' g}},$$

und

$$T : T' = K\varkappa' : E.$$

XIII.

Wir haben am Schluss des II. Teiles die folgende Relation abgeleitet

21) $$\frac{1+\sqrt{\varkappa\sin\varphi}}{1-\sqrt{\varkappa\sin\varphi}} = e^4\left(\frac{\sqrt[4]{q}}{1-\sqrt{q}}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\,\frac{\sqrt[4]{q^3}}{1-\sqrt{q^3}}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \cdots\right),$$

die wegen ihrer einfachen Form zu einer genauern Untersuchung wohl geeignet erscheint. Wir wollen zeigen, dass dieselbe mit dem Problem der Pendelbewegung im verticalen Kreis in Verbindung steht

Analog unsern frühern Betrachtungen soll die Function

22) $$x = 4\left(\frac{\sqrt[4]{q}}{1-\sqrt{q}}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\,\frac{\sqrt[4]{q^3}}{1-\sqrt{q^3}}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \cdots\right)$$

durch die Abscisse eines Punhtes einer Kettenlinie definirt werden.

Indem wir also wie früher

23) $$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad z = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{tg}\delta$$

setzen, ergibt sich

24) $y = \frac{1 + z \sin\varphi^2}{1 - z \sin\varphi^2}, \qquad s = \frac{2\sqrt{z}\sin\varphi}{1 - z\sin\varphi^2},$

und aus

$$z\sin\varphi^2 = \frac{y-1}{y+1}, \qquad y = \frac{1}{\cos\delta}$$

folgt

25) $$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\delta = \sqrt{z}\sin\varphi,$$

wonach $\sin\operatorname{am} u$ leicht durch δ bestimmt werden kann.

Aus der Hauptformel ergibt sich durch Differentiation und darauf erfolgter Division beider Gleichungen nach einer kleinen Umwandlung

26) $$\sqrt{(1+z)^2 - (1-z)^2 y^2} = \frac{2\pi}{K}\left(\frac{\sqrt[4]{q}}{1-\sqrt{q}}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{\sqrt[4]{q^3}}{1-\sqrt{q^3}}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right).$$

Ferner ist

27) $$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\delta^2 = \frac{K-E}{zK} - \frac{2\pi^2}{zK^2}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^2}{1-q^4}\cos\frac{2\pi u}{K} + \ldots\right).$$

Und aus 25 folgt bei Einführung der bekannten Reihe $\sin\operatorname{am} u$

28) $$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\delta = \frac{2\pi}{K\sqrt{z}}\left(\frac{\sqrt{q}}{1-q}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{\sqrt{q^3}}{1-q^3}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right).$$

Um nun diese Ableitung in dynamischem Sinne zu deuten, transformiren wir das Integral

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - Z^2\sin\varphi^2}}$$

vermittelst der Ordinate y um in

29) $$u = \int_1^y \frac{dy}{\sqrt{(y^2-1)((1+z)^2 - (1-z)^2 y^2)}},$$

welches Integral auch mit dem analogen für die Rectification der elastischen Curve in Uebereinstimmung gebracht werden kann.

Hier wollen wir indessen anstatt y den Ausdruck $\frac{1}{\cos\delta}$ einsetzen, man erhält

30) $$u = \frac{1}{1+z}\int_0^\delta \frac{d\delta}{\sqrt{\frac{4z}{(1+z)^2} - \sin\delta^2}}$$

und dieses Integral lässt eine Anwendung auf die Pendelbewegung zu, und zwar für Oscillationen. Zum festen Kreis benutzen wir den Einheitskreis der Kettenlinie, welche den Scheitel der Curve berührt.

Das bekannte Zeitintegral ist

31) $$t = \frac{a\,d\frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{ag\,(\sin\frac{1}{2}\alpha^2 - \sin\frac{1}{2}\vartheta^2)}},$$

worin a der Radius des Kreises, α der Polarwinkel der grössten Elongation, wo die Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit beginnt, und ϑ der veränderliche Winkel ist.

Die Uebereinstimmung beider Integrale basirt auf den folgenden Identitäten

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{2\sqrt{z}}{1+z}, \quad \text{oder} \quad \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{1-z}{1+z} \quad \text{oder} \quad z = \operatorname{tg}\tfrac{1}{4}\alpha^2,$$

32) $$u = \sqrt{\frac{g}{a}}\cdot\frac{t}{1+z},$$

$$\tfrac{1}{2}\vartheta = \delta,$$

und man hat demnach die neuen Ableitungen

$$x = 4\left(\frac{\sqrt[4]{q}}{1-\sqrt{q}}\sin\frac{\pi t}{2T} - \frac{1}{3}\frac{\sqrt[4]{q^3}}{1-\sqrt{q^3}}\sin\frac{3\pi t}{2T} + \ldots\right).$$

33) $$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta = \frac{2\pi}{K\sqrt{z}}\left(\frac{\sqrt{q}}{1-q}\sin\frac{\pi t}{2T} + \frac{\sqrt{q^3}}{1-q^3}\sin\frac{3\pi t}{2T} + \frac{\sqrt{q^5}}{1-q^5}\sin\frac{5\pi t}{2T}\cdots\right)$$

worin $2T$ die Schwingungsdauer bezeichnet.

Die letzte Formel kann auch unter Benutzung von $K = \sqrt{g}\cos\frac{1}{4}\alpha^2 T$ wie folgt geschrieben werden

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta = \frac{4\pi}{T\sqrt{g}\,.\sin\frac{1}{2}\alpha}\left(\frac{\sqrt{q}}{1-q}\sin\frac{\pi t}{2T} + \frac{\sqrt{q^3}}{1-q^3}\sin\frac{3\pi t}{2T} + \ldots\right).$$

Da ferner

$$e^x = y + s = \frac{1+\sqrt{z}\sin\varphi}{1-\sqrt{z}\sin\varphi} = \frac{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta} = \operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\delta),$$

so ist

34) $$x = \log\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\vartheta}{4}\right), \quad y = \frac{1}{\cos\frac{1}{2}\vartheta},$$

wodurch man noch eine zweite Reihe zur Berechnung von ϑ aus der Zeit gewinnt

$$35)\ \tfrac{1}{2}\log \operatorname{tg}\left(45^0+\frac{\vartheta}{4}\right)=\frac{\sqrt[4]{q}}{1-\sqrt{q}}\sin\frac{\pi t}{2T}-\frac{1}{3}\,\frac{\sqrt[4]{q^3}}{1-\sqrt{q^3}}\sin\frac{3\pi t}{2T}$$
$$+\frac{1}{5}\,\frac{\sqrt[4]{q^5}}{1-\sqrt{q^5}}\sin\frac{5\pi t}{2T}-\ldots,$$

deren Ableitung vermittelst der Kettenlinie sehr einfach ist.

Interessant ist noch, dass der den Polarwinkel ϑ halbirende Durchmesser auf der Tangente des an der Bewegung mit teilnehmenden Punktes xy der Kettenlinie stets senkrecht steht.

Bezüglich der letzten Formel erinnern wir an die in XI. 65) abgeleitete, welche wir auch hier verwenden können. Die obige geht demnach in folgenden Quotienten über

$$36)\ \operatorname{tg}(45^0+\tfrac{1}{2}\vartheta)$$
$$=\frac{\left(1+2\sqrt[4]{d}\sin\frac{\pi t}{2T}+\sqrt{q}\right)\left(1+2\sqrt[4]{q^3}\sin\frac{\pi t}{2T}+\sqrt{q^3}\right)\ldots}{\left(1-2\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi t}{2T}+\sqrt{q}\right)\left(1+2\sqrt[4]{q^3}\sin\frac{\pi t}{2T}+\sqrt{q^3}\right)\ldots}$$

Diese neuen Formeln, welche die Amplitude der Bewegung als Functionen der Zeit darstellen, zeigen wiederum, wie sehr die Kettenlinie sich den verschiedenen Modificationen ungezwungen anbequemt und zu neuen Verhältnissen Veranlassung gibt. Auch die oben erwähnte Integralformel für die Rectification einer elastischen Curve ist einer analogen Deutung fähig, wie wir jetzt zeigen wollen.

Wie die Mechanik zeigt, ist die Formel der elastischen Curve durch

$$37)\qquad \varrho y=A^2$$

definirt. Es ist die Curve, welche entsteht, wenn ein langer feiner elastischer an einem Ende befestigter Stahldraht von einer in seiner Längsrichtung wirkenden Kraft angegriffen und in einer durch das feste Ende und die Richtung der Kraft gehenden Ebene gebogen wird.

Aus der bekannten Formel für den Krümmungsradius ergibt sich

$$38)\qquad y=\frac{A^2y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

Die Multiplication dieser Differentialformel mit $2dy$ und darauf erfolgter Integration gibt

[redacted]

39) $$y^2 = C^2 - \frac{2A^2}{(+y'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

und da der Bogen

$$S = \int \sqrt{1+y'^2}\, dx\,,$$

so ist

$$S = 2A^2 \int \frac{dy}{\sqrt{4A^4 - C^4 + 2C^2y^2 - y^4}},$$

oder

40) $$S = 2A^2 \int \frac{dy}{\sqrt{(y^2-(C^2-2A^2))(C^2+A^2-y^2)}}.$$

Soll nun dies Integral mit dem vorhin gefundenen

41) $$(1-z)u = \int \frac{dy}{\sqrt{(y^2-1)\left(\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - y^2\right)}}$$

übereinstimmen, so ist zu setzen

$$C^2 - 2A^2 = 1, \quad C^2 + 2A^2 = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2,$$

woraus

$$A^2 = \frac{z}{(1-z)^2}, \quad C^2 = \frac{1+z^2}{(1-z)^2}$$

also

$$C^2 > 2A^2,$$

also ist auch

42) $$S = \frac{2z}{1-z} \cdot u = \frac{2z}{z'^2}\sqrt{g}\,.\,t.$$

Bei den Oscillationen des Pendels und der entsprechenden Bewegung des Punktes in der Kettenlinie bewegt sich also auch in der elastischen Curve ein dritter Punkt und zwar in gleichförmiger Geschwindigkeit $\frac{2z}{z'^2}\sqrt{g}$. Die für diese Bewegung charakteristische elastische Curve ist derjenige specielle Fall dieser an Formen reichen Linien, in welchem Maximal- und Minimalwerte von y vorkommen, wie die Mechanik dies nachweist. Fig. 3.).

Um nun auch für die besprochene Curve Reihenentwickelungen zu geben, führen wir den Winkel ω ein, welchen die Tangente mit der X-Achse einschliesst. Demnach ist $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\omega$ und aus der Differentialformel folgt

$$y^2 = 2A^2 \cos\omega + C^2.$$

Vermittelst dieser Formel wird

$$4z \sin \tfrac{1}{2}\omega^2 = (1+z)^2 - (1-z)^2 y^2$$

dadurch wird aus der Reihe 26)

$$44) \qquad \sin \tfrac{1}{2}\omega = \frac{\pi}{K\sqrt{z}}\left(\frac{\sqrt[4]{q}}{1-\sqrt{q}}\cos\frac{\pi t}{2T} - \frac{\sqrt[4]{q^3}}{1-\sqrt{q^3}}\cos\frac{3\pi t}{2T} + \frac{\sqrt[4]{q^5}}{1-\sqrt{q^5}}\cos\frac{5\pi t}{2T} - \ldots\right)$$

die jetzt also geometrisch definirt ist.

Da ferner $\frac{dx}{dt}$ die auf die X-Achse der Kettenlinie projicirte Bewegung des Curvenpunktes xy darstellt, wonach also $v_x = \frac{dx}{dt}$

$$45) \qquad v_x = \frac{2\pi}{T}\left(\frac{\sqrt[4]{q}}{1-\sqrt{q}}\cos\frac{\pi t}{2T} - \frac{\sqrt[4]{q^3}}{1-\sqrt{q^3}}\cos\frac{3\pi t}{2T} + \ldots\right)$$

so dass

$$v_x = \frac{2\sqrt{zg}}{1+z}\sin\tfrac{1}{2}\omega$$

ist. Das auf die Amplitude $\frac{1}{2}\omega$ leitende Integral ist

$$46) \qquad \sqrt{g}\,.\,t = \int \frac{d\tfrac{1}{2}\omega}{\sqrt{1-\frac{4z}{(1+z)^2}\sin\tfrac{1}{2}\omega^2}}$$

Bei der betrachteten Bewegung der im Kreise, der Kettenlinie, und der elastischen Curve einhergehenden Punkte ist noch zu bemerken, dass die in den letzten Curven sich bewegenden Punkte immer in gleicher Entfernung von der X-Achse sich befinden, deren Minimum durch $y = 1$, deren Maximum durch $y = \frac{1+z}{1-z}$ mit den entsprechenden Winkeln $\omega = 180^0$, und $\omega = 0$ ist. Bei weiterer Untersuchung der angedeuteten Verhältnisse wird man noch manches Bemerkenswerte finden.

XIV.

Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf die in II. Formel 31 abgeleitete Reihe

$$\frac{1}{4}\arcsin\sqrt{\frac{1-z'}{1+z'}\frac{1-\varDelta}{1+\varDelta}} = \frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \cdots$$

in welche wir die Relation $\Delta \operatorname{am}(u+iK') = -i \operatorname{cotam} u$ einführen. Unter Benutzung einer bekannten Formel der algebraischen Analysis erhält man für den Ausdruck zur Linken die complexe Form

$$\frac{1}{4} \arcsin \sqrt{\frac{1-\Delta}{1+\varkappa'}} + \frac{i}{4} \log\left(\sqrt{\frac{1+\Delta}{1+\varkappa'}} + \sqrt{\frac{\Delta-\varkappa'}{1+\varkappa'}}\right)$$

und rechter Hand hat man

$$\frac{q}{1+q^2} \sin\left(\frac{\pi u}{2K} + \frac{\pi K'}{2K} i\right) = \frac{q}{1+q^2}\left(\frac{1+q}{2\sqrt{q}} \sin\frac{\pi u}{2K} + i \frac{1-q}{2\sqrt{q}} \cos\frac{\pi u}{2K}\right).$$

daher hat man die beiden Reihen

$$\frac{1}{2} \arcsin \sqrt{\frac{1-\Delta}{1+\varkappa'}} = \sqrt{q}\, \frac{(1+q)}{1+q^2} \sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{1}{3} \sqrt{q^3}\, \frac{(1+q^3)}{1+q^6} \sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots$$

47)

$$\frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{1+\Delta} + \sqrt{\Delta-\varkappa'}}{\sqrt{1+\varkappa'}} = \sqrt{q}\, \frac{(1-q)}{1+q^2} \cos\frac{\pi u}{2K} + \frac{1}{3} \sqrt{q^3}\, \frac{(1-q^3)}{1+q^6} \cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots$$

Vermittelst einer Transformation kann letztere wie folgt dargestellt werden

48) $$\frac{\sqrt{\Delta+\varkappa'} + \sqrt{\varkappa'(1-\Delta)}}{\sqrt{(1+\varkappa')\Delta}} = e^{2\left(\sqrt{q} \frac{(1-q)}{1+q^2} \sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\sqrt{q^3} \frac{1-q^3}{1+q^3} \sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)}$$

Wir setzen fest, dass

49) $$x = 2\left(\sqrt{q}\, \frac{1-q}{1+q^2} \sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\sqrt{q^3}\, \frac{1-q^3}{1+q^6} \sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

die Abscisse eines Punktes einer Kettenlinie bezeichne, wonach also wegen $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ die Beziehungen bestehen:

50) $$y^2 = \frac{\Delta+\varkappa'}{(1+\varkappa')\Delta}, \quad \varkappa^2 = \varkappa' \frac{(1-\Delta)}{(1+\varkappa')\Delta}, \quad \Delta = \frac{\varkappa'}{(1+\varkappa')y^2 - 1}$$

Daher geht das Integral $u = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin\varphi^2}}$ über in

51) $$u = \frac{2}{1+z'}\int\frac{dy}{\sqrt{(y^2-1)\left(y^2-\frac{1-z'}{1+z'}\right)\left(\frac{2}{1+z'}-y^2\right)}}$$

oder in Folge von $y = \frac{1}{\cos\delta}$ in

52) $$u = \frac{2}{\sqrt{2(1-z')}}\int\frac{d\sin\delta}{\sqrt{\left(\frac{2z'}{1-z'}+\sin\delta^2\right)\left(\frac{1-z'}{2}-\sin\delta^2\right)}}.$$

Wir führen, um dieses Integral zu reduciren, ein

53) $$p^2 = \left(\frac{1-z'}{1+z'}\right)^2, \quad \sin\delta = \sqrt{\frac{1-z'}{2}}\cos\tau$$

und es resultirt

54) $$K-u = \frac{2}{1+z'}\int\frac{d\tau}{\sqrt{1-p^2\sin\tau^2}}$$

Vermöge IV. Formel 72) ist

55) $$\cos\delta^2 = \frac{K-E}{(1-z')K}+\frac{2\pi^2}{(1-z')K^2}\left(\frac{2q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K}-\frac{4q^4}{1-q^8}\cos\frac{2\pi u}{K}+\ldots\right)$$

Ferner ist

$$\sin\delta^2 = \frac{s^2}{y^2} = z'\,\frac{(1-\Delta)}{z'+\Delta}$$

also nach Formel 61)

$$\sin\delta = \frac{4\pi}{\sqrt{2(1-z')}K}\left(\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{2K}-\frac{q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K}+\ldots\right)$$

56)

$$\cos\tau = \frac{4\pi}{(1-z')K}\left(\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{2K}-\frac{q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K}+\ldots\right)$$

Man wird ferner finden, dass

$$\Delta = z'\,\frac{1+\frac{1-z'}{1+z'}\sin\tau^2}{1-\frac{1-z'}{1+z'}\sin\tau^2}, \quad \frac{\Delta-z'}{\Delta+z'} = \frac{1-z'}{1+z'}\sin\tau^2$$

ist, und demnach wird

$$\tau = \arcsin\sqrt{\frac{1+z'}{1-z'}\,\frac{\Delta-z'}{\Delta+z'}}$$

Indem man nun II. 34) benutzt, besteht demnach die Reihe

[redacted]

57) $$\tau = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi u}{2K} + \frac{1}{2}\frac{4q^2}{1+q^4}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{1}{4}\frac{4q^4}{1+q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} + \ldots$$

Eine weitere Reduction des Integrals führt auf folgende Transformationen:

58) $$\sin(2\omega - \tau) = p\sin\tau,$$
$$\frac{K-u}{2} = \int\frac{d\omega}{\sqrt{1-z^2\sin\omega^2}}$$

worin also

$$2\omega = \tau + \arcsin\left(\frac{1-z'}{1+z'}\sin\tau\right)$$

oder auch

$$2\omega = \arcsin\sqrt{\frac{1+z'}{1-z'}\frac{\varDelta - z'}{\varDelta + z'}} + \arcsin\sqrt{\frac{1-z'}{1+z'}\frac{\varDelta - z'}{\varDelta + z'}}$$

Benutzt man eine bekannte Reihe für $\omega = \operatorname{am}\frac{K-u}{2}$ **so folgt**

59)
$$\arcsin\sqrt{\frac{1+z'}{1-z'}\frac{\varDelta - z'}{\varDelta + z'}} + \arcsin\sqrt{\frac{1-z'}{1+z'}\frac{\varDelta - z'}{\varDelta + z'}} = \frac{\pi}{2}\frac{(K-u)}{K} + 4\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} + \ldots\right)$$
$$\arcsin\sqrt{\frac{1+z'}{1-z'}\frac{\varDelta - z'}{\varDelta + z'}} - \arcsin\sqrt{\frac{1-z'}{1+z'}\frac{\varDelta - z'}{\varDelta + z'}} = \frac{\pi}{2}\frac{(K-u)}{K} - 4\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \ldots\right)$$

Da ferner

$$\varDelta = \frac{z'\cos\delta^2}{1+z'-\cos\delta^2}$$

so geht nach Substitution der in 55) für $\cos\delta^2$ **entwickelten Reihe der obige Ausdruck über in**

60) $$\frac{\varDelta}{z'} = \frac{\frac{K-E}{K} + \frac{2\pi^2}{K^2}\left(\frac{2q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{4q^4}{1-q^8}\cos\frac{2\pi u}{K} + \ldots\right)}{z^2 - \frac{K-E}{K} - \frac{2\pi^2}{K^2}\left(\frac{2q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K} - \ldots\right)}$$

oder auch nach einer Umformung

61) $$\varDelta = \frac{z^2 - \frac{K-E}{K} + \frac{2\pi^2}{K^2}\left(\frac{2q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K} + \ldots\right)}{\frac{K-E}{K} - \frac{2\pi^2}{K^2}\left(\frac{2q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K} + \ldots\right)}$$

Die in ihren Folgen bemerkenswerteste Transformation bezieht sich auf die Formel 35) in II., da dieselbe analytisch-dynamisches Interesse darbietet. Die Formel ist

$$62)\quad \frac{1}{4}\arcsin\sqrt{\frac{1+\varkappa'}{1-\varkappa'}\,\frac{1-\varDelta}{1+\varDelta}} = \frac{\pi u}{8K}+\frac{1}{2}\frac{q^2}{1+q^4}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{1}{4}\frac{q^4}{1+q^8}\sin\frac{2\pi u}{K}+\dots$$

Nun führen wir ein

$$63)\quad \begin{aligned} x &= 4\left(\frac{\pi u}{8K}+\frac{1}{2}\frac{q^2}{1+q^4}\sin\frac{\pi u}{K}+\frac{1}{4}\frac{q^4}{1+q^8}\sin\frac{2\pi u}{K}+\dots\right) \\ y &= \sqrt{\frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'}}\sin x, \end{aligned}$$

wodurch also

$$y^2 = \frac{1-\varDelta}{1+\varDelta} \quad \text{oder} \quad y = \frac{1-\varDelta}{\varkappa\sin\varphi}$$

Vermittelst dieser Substitutionen sind wir demnach auf eine Sinuslinie gekommen, worin die Variabele x der Gleichung durch eine Reihe dargestellt wird. Vermöge 87) kann auch y durch eine solche bestimmt werden, nämlich durch

$$64)\quad y = \frac{4\pi}{\varkappa K}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K}+\frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K}+\dots\right)$$

Wir wollen indessen diese Curve weniger in geometrischem als im dynamischen Sinn betrachten, indem wir dieselbe mit der Bewegung eines schwingenden Punktes in Beziehung bringen. Zu dem Ende sind noch folgende Betrachtungen einzuschalten.

Das Integral

$$u = \int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin\varphi^2}}$$

wollen wir vermittelst der Formel $\varDelta = \frac{1-y^2}{1+y^2}$ umformen.

Wir finden nach einigen leichten Entwickelungen

$$65)\quad u = \frac{2}{\varkappa}\int\frac{dy}{\sqrt{\left(y^2-\frac{1+\varkappa'}{1-\varkappa'}\right)\left(y^2-\frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'}\right)}}$$

Setzen wir $\frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'} = p$, so wird die Reduction dieses Integrals auf

66) $$\frac{u(1+\varkappa')}{2}=\int\frac{d\tau}{\sqrt{1-p^2\sin\tau^2}}$$

führen, und hierfür besteht die Bedingungsgleichung

67) $$y=\sqrt{\frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'}}\sin\tau$$

Demnach ist $x=\tau$.

Benutzen wir endlich noch die Landen'sche Substitution, so resultirt

68) $$\frac{u}{2}=\int\frac{d\omega}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin\omega^2}}=v,\qquad u=2v$$
$$\sin(2\omega-\tau)=\frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'}\sin\tau$$

Folgende geometrische Betrachtung wird uns von Nutzen sein.

Wir beschreiben mit dem Radius = Eins um C einen Kreis, ziehen einen Durchmesser AB und bestimmen darin eine Strecke $CO=\frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'}$. Eine durch O gehende Sehne DE bilde mit dem Durchmesser den Winkel τ. Der demselben entsprechende Winkel zwischen DB und dem Durchmesser ist dann gleich ω. Siehe Durège § 48.

Wir denken uns nun den Winkel τ mit der Zeit wachsend oder, was dasselbe ist, wir lassen die Sehne DE in constanter Winkelgeschwindigkeit $\frac{2\pi}{T}$ um den Punkt O rotiren. Demnach ist

$$\tau=\frac{2\pi t}{T}$$

und also auch

$$y=\sqrt{\frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'}}\sin\frac{2\pi t}{T}$$

69) $$\frac{2\pi t}{T}=\frac{\pi v}{K}+4\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{1+q^4}\sin\frac{2\pi v}{K}+\frac{1}{4}\frac{q^4}{1+q^8}\sin\frac{4\pi v}{K}+\ldots\right)$$
$$y=\frac{4\pi}{\varkappa K}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi v}{K}+\frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi v}{K}+\ldots\right)$$

70) $$v(1+\varkappa')=\int\frac{d\frac{2\pi t}{T}}{\sqrt{1-\left(\frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'}\right)^2\sin\frac{2\pi t^2}{T}}}$$

70)
$$v = \int \frac{d\omega}{\sqrt{1 - z^2 \sin \omega^2}}$$

Wie man sieht, stimmt die obige Gleichung für y mit der bekannten Bewegungsgleichung fur Schwingungen nach dem Gesetz $f = -ky$ überein. Die Vergleichung bietet manches Anziehende. Hat z. B. der Winkel τ die Grösse $\frac{\pi}{2}$ erreicht, so ist der schwingende Punkt in seiner Grenzlage $\sqrt{\frac{1-z'}{1+z'}}$ angelangt und kehrt in seine mittlere Lage zurück, wenn τ von $\frac{\pi}{2}$ bis π und demnach ω bis $\frac{\pi}{2}$ wächst. Bei weiterer Drehung von DE ergeben sich die Bewegungen im entgegengesetzten Sinne. Sobald D nach E gelangt, wächst v bis $v + K$, und die Zeit, welche während dieser Bewegung verfliesst, ist $\frac{1}{2}T$. Die durch O gehenden Sehnen bestimmen demnach Bogen gleicher Zeitdauer, welchen Oscillationen von halber Periode entsprechen.

Bevor wir aus den letzten Integralen wichtige Folgerungen ziehen, möchten wir noch beiläufig auf folgendes aufmerksam machen.

In der Planetenbewegung ist die Gleichung

71)
$$E + \varepsilon \sin E = \frac{2S}{ab} = \frac{2\pi t}{T'}$$

unter dem Namen des Kepler'schen Problems bekannt.

Nehmen wir an, dass die Curve von einem Kreise nur wenig verschieden, mithin ε ein kleiner Bruch sei, und ferner, dass die Zeit vom Aphel an gezählt werde. Dann können wir die Gleichung, in welcher E die excentrische Anomalie, ε die numerische Excentricität $\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ und S die innerhalb der Zeit t überstrichene Fläche des Radiusvectors bezeichnet, mit der Reihe

72)
$$\frac{2\pi v}{K} + 4q^2 \sin \frac{2\pi v}{K} = \frac{2\pi t}{T'}$$

identisch machen, falls q^4 hinreichend klein ist, um vernachlässigt werden zu können. Indem wir also annehmen, dass q, ε, z bestimmte Grenzen nicht überschreiten, erhalten wir durch Vergleichen

73)
$$E = \frac{2\pi v}{K_{(z)}}, \quad \frac{S}{ab} = \frac{\pi t}{T'}, \quad \varepsilon = 4q^2$$

Dann bedeutet T' die volle Umlaufszeit, und es ist

$$74)\qquad \varepsilon = \left(\frac{1-\sqrt{z'}}{1+\sqrt{z'}}\right)^2 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{1-z'}{1+z'}\right)^2 = \frac{4\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}$$

Demnach ist die excentrische Anomalie

$$75)\qquad E = \frac{\pi}{K\left(\frac{1-z'}{1+z'}\right)} \int \frac{d\frac{\pi t}{T}}{\sqrt{1-\frac{4\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}\sin\frac{\pi t^2}{T'}}} = 2\tau - 4q^2 \sin 2\tau$$

durch ein elliptisches Integral der 1. Art ausgedrückt, worin das vollständige K sich auf den Modulus $\frac{2\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon}$ bezieht. Die Amplitude schreitet der Zeit proportional fort. Ist t gleich der halben Umlaufszeit, so wird E zu π.

Für die Erdbahn ist $\varepsilon = 0{,}01675$, woraus $q^2 = 0{,}00418$, $q^4 = 0{,}00001$ als Mass der Genauigkeit folgt. Für Venus und Neptun ist der Grad der Annäherung noch grösser, indem für den ersten Planeten $\varepsilon = 0{,}00681$, $q^2 = 0{,}00170$, $q^4 = 0{,}000002$ ... für den zweiten $\varepsilon = 0{,}00917$, $q^2 = 0{,}00229$, $q^4 = 0{,}000005$ ... Die übrigen Planeten entfernen sich schon zu sehr von der Kreisbahn, als dass ε^2 vernachlässigt werden dürfte.

Wir differentiiren 71) und 75), eliminiren $\frac{dE}{dt}$ und beachten, dass $\frac{r}{a} = 1 + \varepsilon \cos E$ ist. Dann resultirt, wenn $a = 1$ und ε^2 verschwindend klein ist,

$$r = \frac{2K}{\pi}\sqrt{1-\frac{4e}{(1+e)^2}\sin\frac{\pi t^2}{T'}}$$

oder

$$76)\qquad r = \sqrt{1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\frac{2\pi t}{T'}}$$

Hieraus folgt für von der Kreisform wenig abweichende Ellipsen eine einfache Construction, vermittelst der Zeit den Ort des Planeten zu bestimmen. Wir nehmen an, dass vom Aphelium aus zugleich mit dem Himmelskörper ein zweiter Punkt seine Bewegung beginnt, mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortschreitet und mit dem ersten im Perihelium anlangt. Diese Bewegung finde statt in dem die Ellipse umschliessenden Kreise. Der letzten Formel gemäss verbinden wir den der Zeit t entsprechenden Punkt des Kreises mit dem Gravitationscentrum durch den Radiusvector r und beschreiben um das Centrum mit ihm einen Kreisbogen bis zum Durchschnitt mit der Ellipse. Dieser Schnittpunkt ist der gesuchte Ort des Planeten zur Zeit t.

Wenden wir auf 75) das Additionstheorem an mit der Annahme, dass beide Integrale sich zum vollständigen Integrale K ergänzen, so wird $\frac{\pi}{K}(F+F_1)=E+E_1$, und da $F+F'=K$, so ist $E+E'=180^\circ$. Die diesem Fall entsprechenden Anomalien E und E' ergänzen sich also zu 2R, und die Bedingungsgleichung hierfür ist

$$77)\qquad \operatorname{tg}\frac{\pi t}{T}\operatorname{tg}\frac{\pi t'}{T'}=\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

Um zu sehen, bis zu welchem Grade der Genauigkeit diese einfache Relation gültig ist, wollen wir den strengen Wert derselben berechnen. Aus den Formeln

$$\frac{\pi t}{T}=\frac{E}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\sin E,\quad \frac{\pi t'}{T'}=\frac{E'}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\sin E'$$

erhält man ohne Mühe:

$$78)\qquad \operatorname{tg}\frac{\pi t}{T}\operatorname{tg}\frac{\pi t'}{T'}=\frac{\sin E+\sin(\varepsilon\sin E)}{\sin E-\sin(\varepsilon\sin E)}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(1+\varepsilon)E}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(1-\varepsilon)E}$$

$$=\frac{1+\varepsilon-\frac{\varepsilon^3}{6}\sin E^2+\frac{\varepsilon^5}{24}\sin E^4-\dots}{1-\varepsilon+\frac{\varepsilon^3}{6}\sin E^2-\frac{\varepsilon^5}{24}\sin E^4+\dots}.$$

Bei $\varepsilon=0{,}01675$ ist $\frac{\varepsilon^3}{6}=0{,}0000007\dots$

Die Relation ist demnach hinlänglich genau.

XV.

Legendre hat in der Theorie der elliptischen Functionen Reihenentwickelungen für die unvollständigen Integrale der 1. und 2. Art entwickelt, worin die Glieder nach den Sinus der Vielfachen der Amplitude fortschreiten. Da aber die Convergenz derselben keine bedeutende ist, indem für grössere Moduli eine nicht geringe Anzahl von Reihengliedern berechnet werden müssen, so ist man genötigt zu den bekannten Näherungsmethoden seine Zuflucht zu nehmen, unter welchen die von Jacobi gegebene

$$\frac{1}{2q}\,\frac{\sqrt{1-\varkappa^2\sin\varphi^2}-\sqrt{\varkappa'}}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin\varphi^2}+\sqrt{\varkappa'}}=\frac{\cos\frac{\pi u}{K}+q^8\cos\frac{3\pi u}{K}+\dots}{1+2q^4\cos\frac{2\pi u}{K}+\dots}$$

ziemlich rasch zum Ziele führt.

Die in XIV. entwickelten Gleichungen geben, wie wir jetzt zeigen wollen, eine rasche Auflösung des Problems, wenn wir uns einer Formel bedienen, welche Lagrange zuerst gegeben hat. Sie bezieht sich auf die Auflösung der Gleichung

$$z = x + \alpha f(z)$$

worin f eine gegebene Function, α eine kleine Grösse bezeichnet. Die Aufgabe ist nun die, die Unbekannte z nach Potenzen von α zu entwickeln. Sie wird dargestellt durch die Reihe

$$z = x + \alpha f(x) + \frac{\alpha^2}{2}\frac{d(fx)^2}{dx} + \frac{\alpha^3}{3!}\frac{d^2(fx)^3}{dx^2} + \cdots \frac{\alpha^m}{m!}\frac{d^{m-1}(fx)^m}{dx^{m-1}}$$

Indem wir also auf die genannten Relationen in XIV.

$$2\tau = \vartheta + \frac{4q^2}{1+q^4}\sin\vartheta + \tfrac{1}{2}\frac{4q^4}{1+q^8}\sin 2\vartheta + \tfrac{1}{3}\frac{4q^6}{1+q^{12}}\sin 3\vartheta + \ldots$$

79) $$\vartheta = \frac{\pi}{K\left(\frac{1-z'}{1+z'}\right)}\int\frac{dt}{\sqrt{1-\left(\frac{1-z'}{1+z'}\right)^2\sin\tau^2}}, \quad v_1 = \int\frac{d\omega}{\sqrt{1-z^2\sin\omega^2}}$$

$$\vartheta = \frac{2\pi v}{K}, \quad \operatorname{tg}(\tau-\omega) = z'\operatorname{tg}\omega$$

uns beziehen, schreiben wir die erste Gleichung wie folgt

$$\vartheta = 2\tau - 4q^2\left(\frac{1}{1+q^4}\sin 2\vartheta + \tfrac{1}{2}\frac{q^2}{1+q^8}\sin 2\vartheta + \tfrac{1}{3}\frac{q^4}{1+q^{12}}\sin 3\vartheta + \ldots\right)$$

Vermittelst der Lagrange'schen Formel wird man also ϑ, welches durch ein elliptisches Integral der ersten Art, nämlich

$$\vartheta = \frac{\pi}{K(p)}\int\frac{d\tau}{\sqrt{1-p^2\sin\tau^2}}$$

bestimmt ist, nach Functionen der Amplitude τ zu entwickeln haben. Die einzige Schwierigkeit besteht also nur darin die Potenzen von

$$f(x) = \frac{1}{1+q^4}\sin x + \tfrac{1}{2}\frac{q^2}{1+q^8}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\frac{q^4}{1+q^{12}}\sin 3x \ldots$$

worin $x = 2\tau$ gesetzt ist, und die Differentialquotienten derselben zu berechnen. Die entstehende Reihe wird rasch convergiren, da $\alpha = 4q^2$ eine im allgemeinen kleine Zahl sein wird. Die letzte Reihe schreiben wir kurz

$$f(x) = a\sin x + b\sin 2x + c\sin 3x + d\sin 4x + \ldots$$

und man findet der Reihe nach

$$f(x)^2 = a^2 \sin x^2 + 2ab \sin x \sin 2x + b^2 \sin 2x^2 + 2ac \sin x \sin 3x + c^2 \sin 3x^2$$
$$+ 2ad \sin x \sin 4x + 2ae \sin x \sin 5x + 2bc \sin 2x \sin 3x$$
$$+ 2bd \sin 2x \sin 4x \ldots$$

$$f(x)^3 = a^3 \sin x^3 + 3a^2b \sin x^2 \sin 2x + 3ab^2 \sin x \sin 2x^2 + b^3 \sin 2x^3$$
$$+ 3a^2c \sin x^2 \sin 3x + 3a^2d \sin x^2 \sin 4x + 6abc \sin x \sin 2x \sin 3x$$

$$f(x)^4 = a^4 \sin x^4 + 4a^3b \sin x^3 \sin 2x + 6a^2b^2 \sin x^2 \sin 2x^2$$
$$+ 4a^3c \sin x^3 \sin 3x \ldots$$

$$f(x)^5 = a^5 \sin x^5 + 5a^4 b \sin x^4 \sin 2x + \ldots$$

$$f(x)^6 = a^6 \sin x^6 + \ldots$$

. . . .

Bei der Berechnung der Differentialquotienten ist es gut, die Potenzen von Sinus durch vielfache von x auszudrücken. Wir benutzen daher die Formeln

$$2 \sin x^2 = -\cos 2x + 1$$
$$2^2 \sin x^3 = -\sin 3x + 3 \sin x$$
$$2^3 \sin x^4 = \cos 4x - 4 \cos 2x + 3$$
$$2^4 \sin x^5 = \sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x$$
$$2^5 \sin x^6 = -\cos 6x + 6 \cos 4x - 15 \cos 2x + 10$$

Zufolge dieser Formeln hat man die folgenden Ableitungen

$$\frac{d\,(fx)^2}{dx} = a^2 \sin 2x + 2b^2 \sin 4x + 3c^2 \sin 6x + 4d^2 \sin 8x$$
$$+ ab\,(3 \sin 3x - \sin x) + 2ac\,(2 \sin 4x - \sin 2x)$$
$$+ ad\,(5 \sin 5x - 3 \sin 3x) + 2ae\,(-2 \sin 4x + 3 \sin 6x)$$
$$+ bc\,(5 \sin 5x - \sin x) + 2\,bd\,(3 \sin 6x - \sin 2x) + \ldots$$

$$\frac{d^2\,(fx)^3}{dx^2} = \frac{a^3}{4}(9 \sin 3x - 3 \sin x) + 3a^2b\,(-2 \sin 2x + 4 \sin 4x)$$
$$+ \frac{3ab^2}{4}(-2 \sin x + 25 \sin 5x - 9 \sin 3x) + b^3\,(9 \sin 6x - 3 \sin 2x)$$
$$+ \frac{3a^2c}{4}(25 \sin 5x - 18 \sin 3x + \sin x)$$
$$+ 3a^2d\,(\sin 2x - 8 \sin 4x + 9 \sin 6x)$$
$$+ 6abc\,(9 \sin 6x - 4 \sin 4x - \sin 2x) \ldots$$

$$\frac{d^3\,(fx)^4}{dx^3} = a^4\,(8 \sin 4x - 4 \sin 2x) + \tfrac{1}{2}a^3b\,(2 \sin x + 125 \sin 5x - 81 \sin 3x)$$
$$+ 4a^3c\,(-24 \sin 4x + 3 \sin 2x + 27 \sin 6x) + \ldots$$

[redacted]

$$\frac{d^4(fx)^5}{dx^4} = \frac{a^5}{16}(625\sin 5x - 405\sin 3x + 10\sin x)$$
$$+ 5a^4b(5\sin 2x - 64\sin 4x + 81\sin 6x)$$
$$\frac{d^5(fx)^6}{dx^5} = a^6(243\sin 6x - 192\sin 4x + 15\sin 2x)$$

. . . .

Die entwickelten Glieder reichen zur genauen Berechnung des Integrals aus. Setzt man nun diese Ausdrücke in die Lagrange'sche Formel ein, entwickelt die Coefficienten $abc\ldots$ nach Potenzen von q in Reihen und ordnet nach den Sinus der Vielfachen von τ, so resultirt schliesslich

$$\vartheta = \frac{\pi}{K_{(p)}}\int\frac{d\tau}{\sqrt{1-p^2\sin\tau^2}}$$

80) $$= 2\tau - 4(q^2 - 2q^6 + 6q^{10} - \ldots)\sin 2\tau + 2(3q^4 - 16q^8 + \ldots)\sin 4\tau$$
$$- \frac{40}{3}(q^6 - 9q^{10} + \ldots)\sin 6\tau + 35q^8\sin 8\tau - \frac{504}{5}q^{10}\sin 10\tau + \ldots$$

Nach Potenzen von q^2 entwickelt würde man haben

81) $$\frac{\pi}{K\left(\frac{1-z'}{1+z'}\right)}\int\frac{d\tau}{\sqrt{1-\left(\frac{1-z'}{1+z'}\right)^2\sin\tau^2}}$$
$$= 2\tau - 4\sin 2\tau\,.\,q^2 + 6\sin 4\tau\,.\,q^4 + (8\sin 2\tau - 13\tfrac{1}{3}\sin 6\tau)q^6$$
$$- (32\sin 4\tau - 35\sin 8\tau)q^8 + (120\sin 6\tau - 100\tfrac{4}{5}\sin 10\tau)q^{10} - \ldots$$

. . . .

Stellen wir nun das Zusammengehörige übersichtlich zusammen so ergibt sich folgendes:

Um das elliptische Integral

82) $$\int_0^{\omega}\frac{d\omega}{\sqrt{1-z^2\sin\omega^2}}$$

zu berechnen, bestimme man vermittelst der Formel

83) $$\operatorname{tg}(\tau - \omega) = z'\operatorname{tg}\omega$$

die Amplitude τ, und man hat

84) $$\frac{\pi}{K_{(z)}}\int\frac{d\omega}{\sqrt{1-z^2\sin\omega^2}} = \tau - 2(q^2 - 2q^6 + 6q^{10} - \ldots)\sin 2\tau$$
$$+ (3q^4 - 16q^8 + \ldots)\sin 4\tau$$
$$- \frac{20}{3}(q^6 - 9q^{10} + \ldots)\sin 6\tau$$
$$+ \frac{35}{2}q^8\sin 8\tau - \frac{252}{5}q^{10}\sin 10\tau$$

. . . .

Diese Reihe convergirt sehr schnell, da in den meisten Fällen q, welches sich auf den Modulus $\varkappa$ bezieht, ein kleiner Bruch ist. Selbst in dem ungünstigen Falle $\varkappa = 0,99$ ist die Potenz $q^{12} = 0,00000002$.. weshalb wir dieselbe vernachlässigen können. Ist $\varkappa^2 \overline{\gtrless} \frac{1}{2}$ so reichen schon 3 Glieder hin, um der Rechnung bis auf 7 Decimalen sicher zu sein. Demnach ist in diesem Falle

$$85)\qquad \frac{\pi}{K}\int \frac{d\omega}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin \omega^2}} = \tau - 2q^2 \sin 2\tau + 3q^4 \sin 4\tau - \ldots$$

Zur Berechnung von K kann man sich des in Formel 49) III. gegebenen Ausdrucks

$$K = \frac{8\pi q^2}{(1-\sqrt{\varkappa'})^2}$$

bedienen. Für nicht zu grosse Werte von $p = \frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'}$ woraus $\varkappa = \frac{2\sqrt{p}}{1+p}$, ist auch die Reihe 81) recht brauchbar. Beispiel. Es möge berechnet werden

$$v = \int_0^{30^\circ} \frac{d\omega}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin \omega^2}}$$

Aus $\operatorname{tg}(\tau - \omega) = \varkappa' \operatorname{tg} \omega$ folgt für $\omega = 30^0$ $\tau = 52^0 12' 27''$, und da $q^2 = 0,0018674$, $q^4 = 0,0000035$ ist, so folgt

$$\frac{\pi}{1,85407\overline{47}}\, v = 0,907553, \quad \text{woraus} \quad v = 0,535622$$

Wir erwähnen noch des folgenden wegen, dass, wenn die Reihe 81) differentiirt und darauf $\tau = 0$ gesetzt wird, folgt

$$86)\qquad \frac{\pi}{(1+\varkappa')K} = 1 - 4q^2 + 12q^4 - 32q^6 + 76q^8 - 168q^{10} + \ldots$$

Wir ziehen ferner hier die Formel 111 in VI. an, setzen darin $\varphi = 0$ wodurch

$$87)\qquad \frac{1+\varkappa'}{\pi} K = 1 + \frac{4q^2}{1-q^2} - \frac{4q^6}{1-q^6} + \frac{4q^{10}}{1-q^{10}} + \cdots$$
$$= 1 + 4q^2 + 4q^4 + 4q^8 + 8q^{10}$$

und erhalten dadurch ein Mittel, die Constanten der vorhin entwickelten Reihen hinsichtlich ihrer Richtigkeit zu prüfen. Multiplicirt man demnach die letzten Reihen, und geht bis q^{10}, so ergibt sich bis zu diesem Grade genau identisch $1 = 1$.

Um noch für das folgende alles beisammen zu haben, benutzen wir in V. Formel 87) für $\varphi = 0$, also

88) $$\sqrt{\frac{1-z'}{1+z'}} = \frac{4\pi}{zK}(q+2q^5+q^9)$$

Indem wir sie mit 86) multipliciren erhalten wir

89) $$\frac{1}{4}\frac{1-z'}{1+z'} = q-4q^3+14q^5-40q^7+101q^9-236q^{11}$$

Aehnlich findet man

90) $$\frac{\pi}{4K}\frac{(1-z')}{(1+z')^2} = q-8q^3+42q^5-176q^7+633q^9-2040q^{11}$$
$$\left(\frac{1-z'}{1+z'}\right)^2 = 16\,(q^2-8q^4+44q^6-192q^8+718q^{10}-\ldots)$$

Wir gehen jetzt dazu über, eine Reihenentwickelung für die elliptischen Integrale der zweiten Art durchzuführen. Hierfür stehen verschiedene Wege zu Gebote, welche die Theorie der elliptischen Integrale angibt und die sich beziehen auf die bekannten Relationen

91) $$\int\frac{\sin\varphi^2\,d\varphi}{\Delta} = \frac{F-E}{z^2}$$
$$\int\frac{\operatorname{tg}\varphi^2\,d\varphi}{\Delta} = \frac{\Delta\operatorname{tg}\varphi-E}{1-z^2}$$
$$\int\frac{d\varphi}{\Delta^3} = \frac{1}{1-z^2}\left(E-z^2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\right)$$

Wir wählen davon die erste, die wir in folgender Weise zu unsern Entwickelungen benutzen.

Die differentiirte Gleichung 81) ist

92) $$\frac{\pi}{K(p)}\,\frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin\tau^2}} = 2-8(q^2-2q^6+6q^{10})\cos 2\tau$$
$$+8(3q^4-16q^8)\cos 4\tau$$
$$-80(q^6-9q^{10})\cos 6\tau$$
$$+280q^8\cos 8\tau-1008q^{10}\cos 10\tau+\ldots$$

wir multipliciren sie mit $2\sin\tau^2 = 1-\cos 2\tau$, wodurch rechter Hand die Reihe in 2 Teile zerfällt, deren 2ter bei der Integration auf Integrale von der Form

$$\int 4\cos 2t\cos 2nt = \frac{\sin 2(n+1)t}{n+1}+\frac{\sin 2(n-1)t}{n-1}$$

stösst, so dass man nach Durchführung derselben folgendes Resultat gewinnt

$$93)\quad \frac{2\pi}{K_{(p)}}\cdot\int\frac{\sin\tau^2\,d\tau}{\sqrt{1-\sin\tau^2}} = 2\tau - 4(q^2-2q^6+6q^{10})\sin 2\tau$$
$$+2(3q^4-16q^8)\sin 4\tau$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$-\sin 2\tau + 4(q^2-2q^6+6q^{10})(\tau+\tfrac{1}{4}\sin 4\tau)$$
$$-2(3q^4-16q^8)(\tfrac{1}{3}\sin 6\tau+\sin 2\tau)$$
$$+20(q^6-9q^{10})(\tfrac{1}{4}\sin 8\tau+\tfrac{1}{2}\sin 4\tau)$$
$$-70q^8(\tfrac{1}{5}\sin 10\tau+\tfrac{1}{3}\sin 6\tau)$$
$$+252q^{10}(\tfrac{1}{6}\sin 12\tau+\tfrac{1}{4}\sin 8\tau)-\ldots$$

Der 1. Teil der Reihe ist das bekannte Integral

$$\frac{\pi}{K_{(p)}}\int\frac{d\tau}{\sqrt{1-p^2\sin\tau^2}}.$$

Wir bezeichnen den zweiten Teil kurz mit R, so dass man 94) gemäss die Relation hat

$$94)\quad F_{(p\tau)}-E_{(p\tau)} = \tfrac{1}{2}p^2F_{(p\tau)}+\frac{K_{(p)}}{2\pi}p^2.R.$$

Die Theorie dieser Integrale leitet aber folgende Formel ab

$$95)\quad E_{(p\tau)} = -p\sin\tau+(1+p(E_{(s\omega)}+\tfrac{1}{2}(1-p^2)F_{(p\tau)}.$$

damit können wir $E^{(p\tau)}$ der vorher gehenden Gleichung eliminiren, wodurch

$$96)\quad F_{(p\tau)}-\tfrac{1}{2}p^2F_{(p\tau)} = -p\sin\tau+(1+p)E_{(s\omega)}+\tfrac{1}{2}(1-p^2)F_{(p\tau)}$$
$$-\frac{Kp^2}{2\pi}R.$$

Hier heben sich einzelne Glieder fort, so dass folgende Beziehung für $E_{(s\omega)}$, deren Entwickelung in's Auge gefasst ist, gewonnen wird:

$$(1+p)E_{(s\omega)} = \tfrac{1}{2}F_{(p\tau)}+p\sin\tau-\frac{K_{(p)}}{2\pi}p^2R.$$

Nun ist aber bekanntlich

$$F_{(s\omega)}(1+s') = F_{(p\tau)},$$
$$2K_{\left(p\,\frac{\pi}{2}\right)} = K_{\left(s\,\frac{\pi}{2}\right)}(1+s'),\quad p=\frac{1-s'}{1+s'}$$

demnach

$$4E_{(z\omega)} = (1+z')F_{(p\tau)} + 2(1-z')\sin\tau - \frac{K_{(z)}}{2K}(1-z')^2 R,$$

d. i.

$$97)\quad 4E_{(z\omega)} = (1+z')^2\frac{K_z}{2\pi}(2\tau - 4(q^2\ldots)\sin 2\tau + \ldots)$$
$$-(1-z')^2\frac{K_{(z)}}{2\pi}(-\sin 2\tau + 4(q^2\ldots)(\tau + \tfrac{1}{4}\sin 4\tau)\ldots)$$
$$+2(1-z')\sin\tau$$

Aus diesen Entwickelungen geht hervor, dass $\int\sqrt{1-z^2\sin\omega^2}\,d\omega$ nach τ und den Sinus von τ, 2τ, 4τ fortschreiten wird. Wir werden die Constanten K etc. vermittelst der Reihen fortschaffen und geben der letzten Reihe deshalb folgende Einrichtung:

$$98)\quad \frac{4\pi E_{(z\omega)}}{K_{(z)}(1+z')^2} = \tau - 2(q^2 - 2q^6 + 6q^{10})\sin 2\tau + (3q^4 - 16q^8)\sin 4\tau$$
$$-\frac{20}{3}(q^6 - 9q^{10})\sin 6\tau + \frac{35}{2}q^8\sin 8\tau$$
$$-\frac{252}{5}q^{10}\sin 10\tau + \ldots$$
$$-\left(\frac{1-z'}{1+z'}\right)^2(2(q^2-2q^6+6q^{10})\tau - (\tfrac{1}{2}+3q^4-16q^8)\sin 2\tau$$
$$+\tfrac{1}{4}(q^2+8q^6-84q^{10})\sin 4\tau$$
$$-\tfrac{1}{3}(3q^4+19q^8)\sin 6\tau + \tfrac{1}{2}(5q^6+18q^{10})\sin 8\tau$$
$$-7q^8\sin 10\tau + 21q^{10}\sin 12\tau)$$
$$+\frac{2\pi}{K_{(z)}}\frac{(1-z')}{(1+z')^2}\sin\tau$$

Aus diesen Substitutionen geht nun zunächst folgende Reihe hervor:

$$99)\quad \frac{4\pi}{K_{(z)}(1+z')^2}\int\sqrt{1-z^2\sin\omega^2}\,d\omega$$
$$= \tau(1 - 32(q^4 - 8q^6 + 42q^8 - 176q^{10} + \ldots))$$
$$+8\sin\tau . q(1 - 8q^2 + 42q^4 - 176q^6 + 633q^8 - 2040q^{10} + \ldots)$$
$$+2\sin 2\tau(3q^2 - 32q^4 + 202q^6 - 960q^8 + 3794q^{10})$$
$$-\sin 4\tau(5q^4 - 64q^6 + 432q^8 - 2048q^{10})$$
$$+\tfrac{1}{3}\sin 6\tau(28q^6 - 384q^8 + 2434q^{10})$$
$$-\tfrac{1}{2}\sin 8\tau(45q^8 - 640q^{10})$$
$$+\tfrac{1}{5}\sin 10\tau . q^{10}$$

Da aber das Integral noch mit einem Factor versehen ist, so scheint es geeignet zu sein, unter Benutzung der Formel 87) dieselben in der Reihe aufgehen zu lassen, wodurch wir schliesslich folgende definitive Lösung erhalten. Es ist

$$100)\qquad \frac{1}{1+z'}\int\sqrt{1-z^2\sin\omega^2}\,d\omega$$
$$=\tau\left(\tfrac{1}{4}+q^2-7q^4+32q^6-111q^8+322q^{10}-\ldots\right)$$
$$+2\sin\tau\left(1-6q^2+28q^4-108q^6+368q^8-1158q^{10}+\ldots\right)q$$
$$+\tfrac{1}{2}\sin 2\tau\left(3q^2-20q^4+86q^6-280q^8+774q^{10}-\ldots\right)$$
$$-\tfrac{1}{4}\sin 4\tau\left(5q^4-44q^6+196q^8-576q^{10}+\ldots\right)$$
$$+\tfrac{1}{6}\sin 6\tau\left(14q^6-136q^8+505q^{10}-\ldots\right)$$
$$-\tfrac{1}{8}\sin 8\tau\left(45q^8-460q^{10}+\ldots\right)$$
$$+\tfrac{1}{10}\sin 10\tau\left(154q^{10}-\ldots\right)$$

$$\operatorname{tg}(\tau-\omega)=z'\operatorname{tg}\omega$$

Auch diese Reihe convergirt recht gut, so dass in den meisten Fällen der Anwendung wenige Glieder zur genauen Berechnung hinreichen. Für das vollständige $E_{\left(z\frac{\pi}{2}\right)}$ ist $\tau=\pi$ zu setzen, weshalb man auch noch die Reihe gewinnt

$$101)\qquad E_{\left(z\frac{\pi}{2}\right)}=\pi(1+z')\left(\tfrac{1}{4}+q^2-7q^4+32q^6-111q^8+322q^{10}-\ldots\right)$$

Wir können noch eine zweite Methode mitteilen.

Die in XIV. Formel 69) aufgestellte Reihe d. i.

$$102)\qquad \sqrt{\frac{1-z'}{1+z'}}\sin\tau=\frac{4\pi}{zK}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi v}{K}+\frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi v}{K}+\ldots\right)$$

zu welcher das Integral

$$103)\qquad v=\int\frac{d\omega}{\sqrt{1-z^2\sin\omega^2}}=\frac{1}{1+z'}\int\frac{d\tau}{\sqrt{1-\left(\frac{1-z'}{1+z'}\right)\sin\tau^2}}$$

nebst der Gleichung

$$104)\qquad \operatorname{tg}(\tau-\omega)=z'\operatorname{tg}\omega$$

gehört, bestimmt bei gegebenem Argument v die Amplitude ω oder τ. Die Umkehrung der Reihe würde demnach das Argument als eine Function von τ darzustellen haben und zwar in der Form

$$\sin\frac{\pi v}{K}=\alpha\sin\tau+\beta\sin 3\tau+\gamma\sin 5\tau+\ldots$$

wonach die Glieder nach den Sinus der ungeraden Vielfachen von τ fortschreiten.

Um die obige Reihe dementsprechend einzurichten, benutzen wir die in 88) gegebenen Formeln, und man kann

$$\frac{\sqrt{\frac{1-z'}{1+z'}}}{\frac{4\pi}{zK}} \text{ durch } q+2q^5+q^9$$

ersetzen. Daher ist

$$(q+2q^5+q^9)\sin\tau = \frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi v}{K}+\frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi v}{K}+\ldots$$

worin wir $x = \frac{\pi v}{K}$ schreiben und die Sinus nx entwickeln. Demnach ist abgekürzt

104) $(q+2q^5+q^9)\sin\tau = a\sin x + b(3\sin x - 4\sin x^3)$
$+c(5\sin x - 20\sin x^3 + 16\sin x^5)$
$+d(7\sin x - 56\sin x^3 + 112\sin x^5$
$- 64\sin x^7)$ u. s. w,

Ordnen wir nach Potenzen von $\sin x$ so resultirt

105) $(q+2q^5+q^9)\sin\tau = \sin x(a+3b+5d+7d\ldots)$
$-4\sin x^3(b+5c+14d+30e+55f)$
$+16\sin x^5(c+7d+27e+77f\ldots)$
$-64\sin x^7(d+9e+44f)$
$+256\sin x^9(e+11f)$
$-1024\sin x^9 f$

Berechnet man die Coefficienten dieser Reihe, so wird die letzte Reihe zur folgenden

106) $(q+2q^5+q^9)\sin\tau = \sin x(q+4q^3+6q^5+8q^7+13q^9+12q^{11})$
$-4\sin x^3(q^3+5q^5+14q^7+31q^9+55q^{11})$
$+16\sin x^5(q^5+7q^7+27q^9+77q^{11})$
$-64\sin x^7(q^7+9q^{11}+44q^{11})$
$+256\sin x^9(q^9+11q^{11})$
$-1024\sin x^{11}(q^{11}\ldots)$

Diese dividiren wir durch den Coefficienten von $\sin x$ und erhalt en

107) $(1-4q^2+12q^4-32q^6+76q^8-168q^{10})\sin\tau$
$= \sin x - 4\sin x^3(q^2+q^4+4q^6+q^8+6q^{10})$
$+16\sin x^5(q^4+3q^6+9q^8+15q^{10})$
$-64\sin x^7(q^6+5q^8+18q^{10})$
$+256\sin x^9(q^8+7q^{10})$
$-1024\sin x^{11}(q^{10})$

Bevor wir diese Reihe umkehren, bemerken wir noch folgendes. Hat man eine Reihe, welche nach ungeraden Potenzen von x fortschreitet, auf die Form

108) $$y = x - Bx^3 + Cx^5 - Dx^7 + Ex^9 - Fx^{11}$$

gebracht, so findet man mittelst der Methode der unbestimmten Coefficienten die Umkehrung derselben, welche wir ohne weitere Zwischenrechnung wie folgt niederschreiben

109) $$\begin{aligned} x = y + By^3 + (3B^2 - C)y^5 + 12B^3 - 8BC + D)y^7 \\ + (55B^4 - 55B^2C + 10BD + 5C^2 - E)y^9 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Die Anwendung dieser Reihe auf die obige gibt schliesslich als erstes Resultat

110) $$\begin{aligned} \sin\frac{\pi v}{K} = (1 - 4q^2 + 12q^4 - 32q^6 + 76q^8 - 168q^{10}) \sin\tau \\ + 4(q^2 - 11q^4 + 76q^6 - 411q^8 + 1886q^{10}) \sin\tau^3 \\ + 16(2q^4 - 37q^6 + 398q^8 - 3205q^{10}) \sin\tau^5 \\ + 64(5q^6 - 131q^8 + 1918q^{10}) \sin\tau^7 \\ + 256(14q^8 - 476q^{10}) \sin\tau^9 \\ + 1024(42q^{10}) \sin\tau^{11} \end{aligned}$$

Will man indessen die Reihe nicht nach Potenzen von $\sin\tau$, sondern nach Vielfachen dieser Amplitude τ entwickeln, so benutzen wir die Relationen

$$\begin{aligned} 2^2 \sin x^3 &= -\sin 3x + 3\sin x \\ 2^4 \sin x^5 &= \sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x \\ 2^6 \sin x^7 &= -\sin 7x + 7\sin 5x - 21\sin 3x + 35\sin x \\ 2^8 \sin x^9 &= \sin 9x - 9\sin 7x + 36\sin 5x - 84\sin 3x + 126\sin x \\ 2^{10} \sin x^{11} &= -\sin 11x + 11\sin 9x - 55\sin 7x + 165\sin 5x - 330\sin 3x \\ &\quad + 462\sin x \end{aligned}$$

Diese Substitutionen führen endlich zu der gewünschten Reihe, so dass man das Resultat in folgender Art definiren kann:

Wenn das unvollständige elliptische Integral 1. Art

$$v = \int_0^\omega \frac{d\omega}{\sqrt{1 - x^2 \sin\omega^2}}$$

zur Berechnung vorliegt, so hat man zunächst mittelst der Formel

$$\operatorname{tg}(\tau - \omega) = x' \operatorname{tg}\omega$$

den Winkel τ zu bestimmen, und der Wert des Integrals ergibt sich dann aus

$$\sin\frac{\pi v}{K} = (1 - q^2 - q^4 + q^6 + 2q^8 - 2q^{10})\sin\tau$$

$$- (q^2 - q^4 - 4q^6 + 4q^8 + 15q^{10})\sin 3\tau$$

110) $$+ (2q^4 - 2q^6 - 15q^8 + 15q^{10})\sin 5\tau$$

$$- (5q^6 - 5q^8 - 56q^{10})\sin 7\tau$$

111) $$+ (14q^8 - 14q^{10})\sin 9\tau$$

$$- (42q^{10})\sin 11\tau + ,..$$

Diese Reihe bietet insofern Vorzüge, als die Coefficienten von q klein sind, weshalb sie rasch convergirt.

Wenn $\tau = 90^0$ ist, wird $v = \frac{K}{2}$ und $\operatorname{tg}\omega = \frac{1}{\sqrt{\varkappa'}}$.

Aus der zu diesen Ableitungen benutzten Reihe 101) lassen sich noch Folgerungen ziehen, welche mit den Entwickelungen in I. in Beziehung stehen. Die Resultate konnten übrigens auch noch aus andern Fundamentalformeln gewonnen werden, so z. B. aus II. 31). Die Entwickelungen führen zu den eben mitgeteilten Formeln.

Die Formeln 125) bis 128), ferner 68) u. a. m. können gleichfalls mit Erfolg zur Berechnung von u dienen. Sofern q^{10} vernachlässigt werden kann, hat man demnach folgende Hülfswerte zu bestimmen:

112) $$\operatorname{tg}2\psi = \frac{\varkappa}{\varkappa'}\cos\varphi, \quad \sin\tau = \sqrt{\frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'}}\operatorname{tg}\psi,$$

$$\sin 2\gamma = \frac{1-\sqrt{\varkappa'}}{1+\sqrt{\varkappa'}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\tau$$

und es ist

113) $$\cos\frac{\pi u}{2K} = \frac{1}{2q^2}\operatorname{tg}\gamma$$

Ebenso lässt sich die Reihe

114) $$\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{q^2}{1+q^4}\cos\frac{\pi u}{2K} - \tfrac{1}{3}\,\frac{q^6}{1+q^{12}}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \cdots$$

hierzu verwerten, wenn man das 2. Glied transformirt. Setzt man $q^2\cos\frac{\pi u}{2K} = y$, so folgt aus der letzten Reihe

115) $$y^3 - \tfrac{3}{4}y + \tfrac{3}{8}\gamma = 0$$

Ist also

$$\cos 3\varepsilon = \tfrac{3}{2}\gamma$$

so resultirt als zulässiger Wert

$$y = \cos(60^0 + \varepsilon)$$

Hat man demnach aus den obigen Formeln γ bestimmt, so ergibt sich aus

$$\cos 3\varepsilon = \tfrac{3}{2}\gamma$$

116) $$\cos\frac{\pi u}{2K} = \cos\frac{(60^0 + \varepsilon)}{q^2}$$

Die vorstehenden Resultate zeigen, wie reich an Beziehungen die eingeführten Transformationen sind. Man wird bei Durchsicht der gegebenen Entwickelungen noch manches finden, was analytisch verwertet werden kann.

XVI.

Wir haben schon früher die Methode des Imaginairen benutzt um zu neuen Resultaten zu gelangen. Wir wenden sie auch jetzt noch einmal an zu dem Zwecke, die in XI. Formel 64) gegebene Reihe einen Weg aus dem Reellen ins Imaginaire und wieder zurück ins Reelle machen zu lassen.

Bei diesem Gang der Untersuchung nehmen wir Bezug auf die bekannte Relation der algebraischen Analysis

117) $$\tfrac{1}{2}\log\frac{1+ix}{1-ix} = i\,\mathrm{arc\,tg}\,x.$$

Um nun für unsere Reihenentwickelungen diese Formel nutzbar zu machen, bemerken wir, dass nach bekannten Methoden der Theorie der elliptischen Functionen folgende Transformationen bestehen:

S. Schlömilch, Compendium II. S. 417.

Ersetzt man

$$z \text{ durch } \frac{iz}{z'} \text{ und zugleich } u \text{ durch } z'u,$$

so verwandeln sich

118) $$K \text{ in } z'K, \quad K' \text{ in } z'(K' - iK)$$
$$q \text{ in } -q,$$

[redacted]

$$\sin\operatorname{am} u \text{ in } \varkappa\frac{\sin\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u},\quad \cos\operatorname{am} u \text{ in } \frac{\cos\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u},$$

$$\Delta\operatorname{am} u \text{ in } \frac{1}{\Delta\operatorname{am} u}.$$

Diese Relationen führen wir nun in

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{1+\varkappa\dfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}}{1-\varkappa\dfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}} = 2\left(\frac{\sqrt{q}}{1-q}\sin\frac{\pi u}{K} - \tfrac{1}{3}\frac{\sqrt{q^3}}{1-q^3}\sin 3\frac{\pi u}{K} + \ldots\right),$$

wodurch folgende Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{1+i\varkappa\dfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}}{1-i\varkappa\dfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}} = 2i\left(\frac{\sqrt{q}}{1+q}\sin\frac{\pi u}{K} + \tfrac{1}{3}\frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\sin 3\frac{\pi u}{K} + \ldots\right)$$

entsteht, die vermittelst der genannten Relation in die neue

$$119)\quad \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\varkappa\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} = \frac{\sqrt{q}}{1+q}\sin\frac{\pi u}{K} + \tfrac{1}{3}\frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\sin 3\frac{\pi u}{K} + \ldots$$

übergeht.

Nach Durège § 58. ist

$$\sqrt{\frac{1-\Delta}{1+\Delta}} = \frac{\varkappa\sin\operatorname{am}\tfrac{1}{2}u\cos\operatorname{am}\tfrac{1}{2}u}{\Delta\operatorname{am}\tfrac{1}{2}u}.$$

Indem wir diese Bemerkung benutzen, schreiben wir die letzte Gleichung um in

$$120)\quad \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-\Delta}{1+\Delta}} = \frac{\sqrt{q}}{1+q}\sin\frac{\pi u}{2K} + \tfrac{1}{3}\frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\sin 3\frac{\pi u}{2K} + \ldots,$$

die man wieder mit bekannten Reihenentwickelungen der elliptischen Functionen vergleichen kann.

Die vorletzte Reihe kann nochmals transformirt werden, wenn man die Formeln benutzt, welche den Uebergang von q^2 in q etc. bestimmen.

Man wird folgende Relation finden:

$$121)\quad \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{\varkappa}\sin\operatorname{am} u) = \frac{\sqrt[4]{q}}{1+\sqrt{q}}\sin\frac{\pi u}{2K} + \tfrac{1}{3}\frac{\sqrt[4]{q^3}}{1+\sqrt{q^3}}\sin 3\frac{\pi u}{2K} + \ldots$$

Das sin am u kann hiernach wie folgt bezeichnet werden:

$$122)\quad \sin \operatorname{am} u = \frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{tg} 2\left(\frac{\sqrt[4]{q}}{1+\sqrt{q}}\sin\frac{\pi u}{2K}+\frac{1}{3}\,\frac{\sqrt[4]{q^3}}{1+\sqrt{q^3}}\sin\frac{3\pi u}{2K}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5}\,\frac{\sqrt[4]{q^5}}{1+\sqrt{q^5}}\sin 5\frac{\pi u}{2K}\cdots\right).$$

Auch die Fundamentalformel

$$123)\quad \frac{1+\sqrt{z}\sin\varphi}{1-\sqrt{z}\sin\varphi} = e^4\left(\frac{\sqrt[4]{q}}{1-\sqrt{q}}\sin\frac{\pi u}{2K}-\frac{1}{3}\,\frac{\sqrt[4]{q^3}}{1-\sqrt{q^3}}\sin 3\frac{\pi u}{2K}+\cdots\right)$$

ergibt auf diesem Wege noch zwei bemerkenswerte Reihen, die aus der transformirten

$$\log\frac{1+\frac{\sin\varphi}{\Delta}\sqrt{zz'}\,\sqrt[4]{-1}}{1-\frac{\sin\varphi}{\Delta}\sqrt{zz'}\,\sqrt[4]{-1}}$$
$$= 4\,\frac{\sqrt[4]{-q}}{1-\sqrt{-q}}\sin\frac{\pi u}{2K}-\frac{4}{3}\,\frac{\sqrt[4]{-q^3}}{1+q\sqrt{-q}}\sin 3\frac{\pi u}{2K}-\frac{4}{5}\,\frac{q\sqrt[4]{-q}}{1-q^2\sqrt{-q}}\sin 5\frac{\pi u}{2K}$$

vermittelst Vergleichung der reellen und imaginären Teile hervorgehen.

Hierzu müssen wir zunächst die Werte für $\sqrt[4]{-1}$ einsetzen. Die Wurzeln der Gleichung $x^4+1=0$ sind aber $\frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm i)$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1\pm i)$.

Der Ausdruck links geht demnach für den 1. Wurzelausdruck über in

$$\log\frac{1+\sqrt{\frac{zz'}{2}}\,\frac{\sin\varphi}{\Delta}+\sqrt{\frac{zz'}{1}}\,\frac{\sin\varphi}{\Delta}\sqrt{-1}}{1-\sqrt{\frac{zz'}{2}}\,\frac{\sin\varphi}{\Delta}-\sqrt{\frac{zz'}{2}}\,\frac{\sin\varphi}{\Delta}\sqrt{-1}}$$

Die Analysis leitet aber für logarithmische complexe Zahlen die nachfolgende Gleichung ab

$$\operatorname{Log}(u+iv) = \tfrac{1}{2}\log(u^2+v^2)+i\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{v}{u}+\operatorname{Log}(+1).$$

Demzufolge zerlegt sich der obige Logarithmus in

$$\tfrac{1}{2}\log\left(1+\sqrt{2zz'}\,\frac{\sin\varphi}{\Delta}+zz'\,\frac{\sin\varphi^2}{\Delta^2}\right)+i\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\frac{zz'}{2}}\,\frac{\sin\varphi}{\Delta}}{1+\sqrt{\frac{zz'}{2}}\,\frac{\sin\varphi}{\Delta}}$$

$$-\tfrac{1}{2}\log\left(1-\sqrt{2zz'}\,\frac{\sin\varphi}{\Delta}+zz'\,\frac{\sin\varphi^2}{\Delta^2}\right)+i\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\frac{zz'}{2}}\,\frac{\sin\varphi}{\Delta}}{1-\sqrt{\frac{zz'}{2}}\,\frac{\sin\varphi}{\Delta}}$$

Bemerkt man aber, dass

$$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$$

ist, so haben wir als Resultat der Transformation den complexen Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{2zz'}\,\frac{\sin\varphi}{\Delta}+zz'\,\frac{\sin\varphi^2}{\Delta^2}}{1-\sqrt{2zz'}\,\frac{\sin\varphi}{\Delta}+zz'\,\frac{\sin\varphi^2}{\Delta^2}}+i\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2zz'}\,\frac{\sin\varphi}{\Delta}}{1-zz'\,\frac{\sin\varphi^2}{\Delta^2}},$$

womit die Untersuchung für den linken Teil der obigen Gleichung beendet ist.

Die rechte Seite wird unter diesen Umständen zur folgenden, welche indes noch mit $2\sqrt{2}$ multiplicirt werden muss:

$$\sqrt[4]{q}\,\frac{(1-\sqrt{q}+i(1+\sqrt{q}))}{1+q}\sin\frac{\pi u}{2K}+\tfrac{1}{3}\sqrt[4]{q^3}\,\frac{(1-\sqrt{q^3}-i(1+\sqrt{q^3}))}{1+q^3}\sin\frac{3\pi u}{2K}$$

$$-\tfrac{1}{5}\sqrt[4]{q^5}\,\frac{1-\sqrt{q^5}+i(1+\sqrt{q^5})}{1+q^5}\sin 5\frac{\pi u}{2K}-\tfrac{1}{7}\sqrt[4]{q^7}\,\frac{1-\sqrt{q^7}-i(1+\sqrt{q^7})}{1+q^7}\sin 7\frac{\pi u}{2K}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Also erhält man nach Sonderung des Reellen und Imaginären

124) $$\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\log\frac{1+\sqrt{2zz'}\,\frac{\sin\varphi}{\Delta}+zz'\,\frac{\sin\varphi^2}{\Delta^2}}{1-\sqrt{2zz'}\,\frac{\sin\varphi}{\Delta}+zz'\,\frac{\sin\varphi^2}{\Delta^2}}=$$

$$\sqrt[4]{q}\,\frac{(1-\sqrt{q})}{1+q}\sin\frac{\pi u}{2K}+\tfrac{1}{3}\sqrt[4]{q^3}\,\frac{(1-\sqrt{q^3})}{1+q^3}\sin 3\frac{\pi u}{2K}$$

$$-\tfrac{1}{5}\sqrt[4]{q^5}\,\frac{(1-\sqrt{q^5})}{1+q^5}\sin 5\frac{\pi u}{1K}-\tfrac{1}{7}\sqrt[4]{q^7}\,\frac{(1-\sqrt{q^7})}{1+q^7}\sin 7\frac{\pi u}{2K}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$125)\quad \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2\varkappa\varkappa'}\,\frac{\sin\varphi}{\Delta}}{1-\varkappa\varkappa'\frac{\sin\varphi^2}{\Delta^2}} =$$

$$\sqrt[4]{q}\,\frac{(1+\sqrt{q})}{1+q}\sin\frac{\pi u}{2K}-\tfrac{1}{3}\sqrt[4]{q^3}\,\frac{(1+\sqrt{q^3})}{1+q^3}\sin 3\frac{\pi u}{2K}$$

$$-\tfrac{1}{5}\sqrt[4]{q^5}\,\frac{(1+\sqrt{q^5})}{1+q^5}\sin 5\frac{\pi u}{2K}+\tfrac{1}{7}\sqrt[4]{q^7}\,\frac{(1+\sqrt{q^7})}{1+q^7}\sin 7\frac{\pi u}{2K}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots-\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die letzte Formel ist unter anderm auch aus dem Grunde bemerkenswert, weil sie zu einer neuen Darstellung von π in Reihenform benutzt werden kann. Ist nämlich $\varkappa = 1$, also $\varkappa' = 0$, so wird $q = 1$. Setzen wir also zunächst $u = K$, $\varphi = 90^0$, so ist

$$126)\quad \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa'}}}{1-\frac{\varkappa}{\varkappa'}} =$$

$$\sqrt[4]{q}\,\frac{(1+\sqrt{q})}{1+q}+\tfrac{1}{3}\sqrt[4]{q^3}\,\frac{(1+\sqrt{q^3})}{1+q^4}-\tfrac{1}{5}\sqrt[4]{q^5}\,\frac{(1+\sqrt{q^5})}{1+q^5}-\ldots$$

wobei man bei variabeln Moduln auf das Vorzeichen $1-\frac{\varkappa}{\varkappa'}$ zu achten hat.

Für $\varkappa = 1$ besteht demnach folgende Relation

$$127)\quad \tfrac{1}{4}\sqrt{2}.\pi = 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\ldots,$$

und weil

$$\frac{1}{4}\pi = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13},$$

so folgt durch Combination

$$128)\quad \begin{cases} \frac{\pi}{8}(\sqrt{2}-1) = \frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{19}-\frac{1}{21}+\frac{1}{29}-\ldots, \\ \frac{\pi}{8}(\sqrt{2}+1) = 1-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{23}+\frac{1}{25}-\frac{1}{31}+\ldots, \end{cases}$$

oder

$$\frac{\pi}{16}(\sqrt{2}-1) = \frac{1}{3.5}+\frac{1}{11.13}+\frac{1}{19.21}+\frac{1}{27.29}+\ldots \quad \text{u. s. w.}$$

Vermittelst Multiplication und Division lassen sich noch leicht verschiedene Producte und Reihenquotienten ableiten.

Wird in der Reihe 126) $1-\frac{z}{z'}$ Null gleichgesetzt, so geht der Arcustangens in $\frac{\pi}{2}$ über und die Reihe bezieht sich auf den Modulus $z=\frac{1}{\sqrt2}$.

Die beiden Hauptentwickelungen können übrigens durch eine in der Einleitung gegebene Transformation vereinfacht werden. Sie gehen dann über in

$$129)\quad \tfrac18\sqrt2\log\frac{1+\sqrt{\frac{2z}{z'}}\cos\varphi+\frac{z}{z'}\cos\varphi^2}{1-\sqrt{\frac{2z}{z'}}\cos\varphi+\frac{z}{z'}\cos\varphi^2}=$$

$$\sqrt[4]{q}\,\frac{(1-\sqrt q)}{1+q}\cos\frac{\pi u}{2K}-\tfrac13\sqrt[4]{q^3}\,\frac{(1-\sqrt{q^3})}{1+q^3}\cos3\frac{\pi u}{2K}$$
$$-\tfrac15\sqrt[4]{q^5}\,\frac{(1-\sqrt{q^5})}{1+q^5}\cos5\frac{\pi u}{2K}+\tfrac17\sqrt[4]{q^7}\,\frac{(1-\sqrt{q^7})}{1+q^7}\cos7\frac{\pi u}{2K}$$

$$130)\quad \tfrac14\sqrt2\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{\frac{2z}{z'}}\cos\varphi}{1-\frac{z}{z'}\cos\varphi^2}=$$

$$\sqrt[4]{q}\,\frac{(1+\sqrt q)}{1+q}\cos\frac{\pi u}{2K}+\tfrac13\sqrt[4]{q^3}\,\frac{(1+\sqrt{q^3})}{1+q^3}\cos3\frac{\pi u}{2K}$$
$$-\tfrac15\sqrt[4]{q^5}\,\frac{(1+\sqrt{q^5})}{1+\sqrt{q^5}}\cos5\frac{\pi u}{2K}-\tfrac17\sqrt[4]{q^7}\,\frac{(1+\sqrt{q^7})}{1+q^7}\cos7\frac{\pi u}{2K}+\dots$$

welche auch noch wie folgt geschrieben werden können:

$$131)\quad \tfrac18\sqrt2\log\frac{1+\sqrt{\frac{2z}{z'}}\cos\mathrm{am}\,u+\frac{z}{z'}\cos\mathrm{am}\,u^2}{1-\sqrt{\frac{2z}{z'}}\cos\mathrm{am}\,u+\frac{z}{z'}\cos\mathrm{am}\,u^2}=$$

$$\frac{q^{\frac18}-q^{-\frac18}}{q^{\frac18}+q^{-\frac18}}\cos\frac{\pi u}{2K}-\tfrac13\frac{q^{\frac38}-q^{-\frac38}}{q^{\frac38}+q^{-\frac38}}\cos3\frac{\pi u}{2K}$$
$$-\tfrac15\frac{q^{\frac58}-q^{-\frac58}}{q^{\frac58}+q^{-\frac58}}\cos5\frac{\pi u}{2K}+\tfrac17\frac{q^{\frac78}-q^{-\frac78}}{q^{\frac78}-q^{-\frac78}}\cos7\frac{\pi u}{2K}$$

$$132\quad \tfrac14\sqrt2\arccos\frac{1-\frac{z}{z'}\cos\mathrm{am}\,u^2}{\sqrt{1+\frac{z^2}{z'^2}\cos\mathrm{am}\,u^4}}=$$

$$\frac{q^{\frac{1}{4}}+q^{-\frac{1}{4}}}{q^{\frac{1}{2}}+q^{-\frac{1}{2}}}\cos\frac{\pi u}{2K}+\frac{1}{3}\frac{q^{\frac{3}{4}}+q^{-\frac{3}{4}}}{q^{\frac{3}{2}}+q^{-\frac{3}{2}}}\cos\frac{\pi u}{2K}$$

$$-\frac{1}{5}\frac{q^{\frac{5}{4}}+q^{-\frac{5}{4}}}{q^{\frac{5}{2}}+q^{-\frac{5}{2}}}\cos 3\frac{\pi u}{2K}-\frac{1}{7}\frac{q^{\frac{7}{4}}+q^{-\frac{7}{4}}}{q^{\frac{7}{2}}+q^{-\frac{7}{2}}}\cos 7\frac{\pi u}{2K}\cdots$$

Auch diese letzte Formel kann wiederum zu neuen Reihenentwickelungen benutzt werden. Indem wir nämlich die Eingangs gegebenen Substitutionen einführen, geht der Ausdruck zur Linken über in

$$\frac{1}{4}\sqrt{2}\arccos\frac{1-z\frac{\cos\varphi^2}{\Delta^2}i}{\sqrt{1-z^2\frac{\cos\varphi^4}{\Delta^4}}}$$

Demnach wäre dieselbe in geeigneter Form zu entwickeln.

Wir benutzen für diese cyklometrische Function die entsprechende Formel der Analysis:

$$\operatorname{Arc}\cos(u+iv)=\arccos\frac{u}{p}+i\log(p+q),$$

$$p=\sqrt{\tfrac{1}{2}(u^2+v^2+1+\sqrt{(u^2+v^2+1)^2-4u^2})},$$

$$q=\sqrt{\tfrac{1}{2}(u^2+v^2-1+\sqrt{(u^2+v^2-1)^2+4v^2})}.$$

Setzen wir $\frac{z\cos\varphi^2}{\Delta^2}=A$ so ist demnach

$$\operatorname{Arc}\cos\frac{1-Ai}{\sqrt{1-A^2}}$$

$$=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+z\frac{\cos\varphi^2}{\Delta^2}}}+i\log\left(\sqrt{\frac{1}{1-A}}+\sqrt{\frac{A}{1-A}}\right).$$

Da aber

$$\arccos\frac{1}{\sqrt{1+z\frac{\cos\varphi^2}{\Delta^2}}}=\arccos\sqrt{z}\frac{\cos\varphi}{\Delta},$$

so ist die erste Reihe

133) $$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{z}\frac{\cos\varphi}{\Delta}\right)=\frac{\cos\frac{\pi u}{2K}}{q^{\frac{1}{2}}+q^{-\frac{1}{2}}}-\frac{1}{3}\frac{\cos 3\frac{\pi u}{2K}}{q^{\frac{3}{2}}+q^{-\frac{3}{2}}}+\frac{1}{5}\frac{\cos 5\frac{\pi u}{2K}}{q^{\frac{5}{2}}+q^{-\frac{5}{2}}}-\cdots$$

oder

[redacted]

$$134)\quad \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{z}\sin\varphi) = \frac{\sin\frac{\pi u}{2K}}{q^{\frac{1}{2}}+q^{-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3}\,\frac{\sin 3\frac{\pi u}{2K}}{q^{\frac{3}{2}}+q^{-\frac{3}{2}}} + \frac{1}{5}\,\frac{\sin 5\frac{\pi u}{2K}}{q^{\frac{5}{2}}+q^{-\frac{5}{2}}} + \cdots$$

Die zweite Reihe ist dagegen

$$135)\quad -\tfrac{1}{2}\log\sqrt{\frac{1+\sqrt{z}\,\frac{\cos\varphi}{\Delta}}{1-\sqrt{z}\,\frac{\cos\varphi}{\Delta}}} =$$

$$\frac{\cos\frac{\pi u}{2K}}{q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3}\,\frac{\cos 3\frac{\pi u}{2K}}{q^{\frac{3}{2}}-q^{-\frac{3}{2}}} + \frac{1}{5}\,\frac{\cos 5\frac{\pi u}{2K}}{q^{\frac{5}{2}}-q^{-\frac{5}{2}}} - \cdots$$

oder

$$136)\quad -\tfrac{1}{4}\log\frac{1+\sqrt{z}\sin\varphi}{1-\sqrt{z}\sin\varphi} =$$

$$\frac{\sin\frac{\pi u}{2K}}{q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{3}\,\frac{\sin 3\frac{\pi u}{2K}}{q^{\frac{3}{2}}-q^{-\frac{3}{2}}} + \frac{1}{5}\,\frac{\sin 5\frac{\pi u}{2K}}{q^{\frac{5}{2}}-q^{-\frac{5}{2}}} - \cdots,$$

wodurch wir wieder zu unserm Ausgangspunkt zurückgekehrt sind.

Uebersieht man die bisher gewonnenen Resultate, so lässt sich nicht läugnen, dass die durch Kreis und Kettenlinie vermittelte Transformation für die geometrische Darstellung der entwickelten mannigfaltigen elliptischen Functionen sich wirksam und erfolgreich erwiesen hat. Der Vorzug geometrischer Methoden zur Interpretation analytischer Entwickelungen besteht darin, dass die gesamten Eigenschaften der durch eine geeignete Transformation eingeführten Curve wie hier der Kettenlinie in den Dienst der analytischen Processe gestellt und letztere ausser durch die geometrische Deutung ihrer Ausdrücke und der dadurch bedingten klareren Uebersichtlichkeit noch durch neue und nicht unwichtige Entwickelungen bereichert werden können.

Vierter Teil.

XVII.

Der in IX. entwickelte Fall des durch elliptische Functionen und die Kettenlinie dargestellten casus irreductibilis liess die Frage offen, ob auch die durch die Cardanische Formel lösbaren Fälle vermittelst dieser Curve in geometrisch analytischer Methode erledigt werden können.

Insofern dies der Fall sein sollte, würde ein inniger merkwürdiger Zusammenhang zwischen den Eigenschaften der Kettenlinie mit denjenigen der Lemniskate und gleichseitigen Hyperbel bestehen, der wichtig genug erscheinen könnte, die von uns in früheren Abhandlungen mitgeteilten Lösungen der reducirten kubischen Gleichungen bezüglich der letztern Curven durch die Kettenlinie verallgemeinern zu lassen.

Wir werden zeigen, dass diese merkwürdige Curve nicht nur die durch die Cardanische Formel repräsentirten Fälle, sondern auch eine ganze Gruppe analoger Gleichungen in eleganter geometrischer Fassung und Lösung darstellt, welche den Vorzug grosser Einfachheit besitzt und zur Entwickelung neuer interessanter Verhältnisse Veranlassung gibt.

Um nun diese Eigenschaften abzuleiten, bezeichnen wir die den Abscissen x, $2x$, $3x$, $4x$, ... nx entsprechenden Ordinaten mit y, y_2, y_3, y_4, ... y_n, und analog die Bogen s, s_2 ... s_n.

Demgemäss bestehen folgende Relationen

$$1)\quad \begin{array}{ll} y_1 = \dfrac{e^{x_1}+e^{-x_1}}{2}, & s_1 = \dfrac{e^{x_1}-e^{-x_1}}{2} \\ y_2 = \dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}, & s_2 = \dfrac{e^{2x_1}-e^{-2x_1}}{2} \\ y_3 = \dfrac{e^{3x}+e^{-3x}}{2}, & s_3 = \dfrac{e^{3x_1}-e^{-3x_1}}{2} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ y_n = \dfrac{e^{nx}+e^{-nx}}{2}, & s_n = \dfrac{e^{nx}-e^{-nx}}{2}. \end{array}$$

Bevor wir verallgemeinern, wollen wir den Fall $y_3 s_3$ besonders betrachten. Wir erheben

$$y_1 = \frac{e^{+x}+e^{-x}}{2}$$

zur 3. Potenz, woraus

$$y^3 = \frac{e^{3x}+3e^{x}+3e^{-x}+e^{-3x}}{8}$$

oder

$$4y^3 = \frac{e^{3x}+e^{-3x}}{2}+3\,\frac{(e^{x}+e^{-x})}{2}.$$

Da aber

[redacted]

$$y_3 = \frac{e^{3x} + e^{-3x}}{2},$$

so geht die vorletzte Gleichung über in

$$4y^3 = y_3 + 3y,$$

d. i. in

2) $$y^3 - \tfrac{3}{4}y - \tfrac{1}{4}y_3 = 0,$$

welche kubische Gleichung 1 reelle und 2 imaginaire Wurzeln hat. Um dieselbe durch die Curve selbst auflösen zu lassen, bemerke man, dass aus der Gleichung für y_3 in Verbindung mit

$$s_3 = \frac{e^{+3x} - e^{-3x}}{2}$$

die Relation

3) $$y_3 + s_3 = e^{3x}, \quad y_3 - s_3 = e^{-3x}$$

folgt.

Aus diesen folgt

4) $$e^x = \sqrt[3]{y_3 + s_3}, \quad e^{-x} = \sqrt[3]{y_3 - s_3}$$

so dass, wenn wir noch die bekannte allgemeine Eigenschaft

$$s_3 = \sqrt{y_3^2 - 1}$$

beachten,

5) $$e^x = \sqrt[3]{y_3 + \sqrt{y_3^2 - 1}} \text{ und } e^{-x} = \sqrt[3]{y_3 - \sqrt{y_3^2 - 1}}$$

ist. Addiren wir beide Ausdrücke und dividiren durch 2, so resultirt die reelle Wurzel

6) $$y = \frac{\sqrt[3]{y_3 + \sqrt{y_3^2 - 1}} + \sqrt[3]{y_3 - \sqrt{y_3^2 - 1}}}{2}$$

der Gleichung

$$y^3 - \tfrac{3}{4}y - \tfrac{1}{4}y_3 = 0,$$

deren Auflösung sich durch Eleganz und Einfachheit auszeichnet. Die trigonometrische Auflösung geben wir nachher.

In analoger Weise potenziren wir die Gleichung

$$s = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

woraus

$$s^3 = \frac{e^{3x} - 3e^x + 3e^{-x} - e^{-3x}}{8},$$

oder

$$4s^3 = \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{2} - 3\frac{(e^x - e^{-x})}{2},$$

d. i.

$$4s^3 = s_3 - 3s,$$

7) $$s^3 + \tfrac{3}{4}s - \tfrac{1}{4}s_3 = 0.$$

Die Auflösung erfolgt wie oben, man hat

8) $$e^x = \sqrt[3]{\sqrt{s_3^2+1} + s_3}, \quad e^{-x} = \sqrt[3]{\sqrt{s_3^2+1} - s_3},$$

die Wurzel s ist demnach

9) $$s = \frac{\sqrt[3]{s_3 + \sqrt{s_3^2+1}} + \sqrt[3]{s_3 - \sqrt{s_3^2+1}}}{2}.$$

Beide Lösungen entsprechen den auf die kubischen Gleichungen

$$x^3 \mp px + q = 0$$

sich beziehenden Fällen der Cardanischen Formel. Setzt man nämlich allgemein

$$y = a\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2},$$

so erhält man

$$y^3 - \tfrac{3}{4}a^2 . y - \frac{a^2}{4} y_3 = 0.$$

Die Identität mit

$$x^3 - px - q = 0$$

gibt die Bedingungen

$$a = \sqrt{\frac{4}{3}p}, \quad y_3 = \frac{3q}{p}.$$

Führt man dieselben in 6) ein, so folgt die bekannte Formel

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{1}{27}p^3}}$$

Da $y_3 >$ als a sein muss, so ist demnach $27q^2 > 4p^3$.

Das vorläufige Resultat dieser Untersuchungen besteht also darin, dass die Kettenlinie ein ausgezeichneter Repräsentant derjenigen Art von Curven ist, welche eine geometrische Darstellung analytischer oder algebraischer Functionen in anschaulichster Weise gestatten.

In den folgenden Erörterungen werden wir die Grösse a gleich der Einheit nehmen, da die Resultate einfacher und übersichtlicher werden und die Wiedereinführung von a keine Schwierigkeit hat. Hat man eine Kettenlinie gezeichnet, so reicht dieselbe für alle Fälle aus.

Das Absolutglied ergibt die Ordinate y_3. Die entsprechende Abscisse $3x$ ergibt durch Teilung die von x und damit die Wurzel y. Bezüglich der Gleichung $s^3 + \frac{3}{4}s - \frac{1}{4}s_3 = 0$ lässt sich ebenso einfach aus dem Absolutglied die zugehörige Ordinate $y_3 = \sqrt{1+s_3^2}$ durch Abtragen von s_3 auf die X-Achse und das Ziehen einer Geraden vom Scheitelpunkt nach dem andern Endpunkt gewinnen. Die Wurzel s ist dann die Projection von y auf die Tangente. Die letztere möge mit der X-Achse den Winkel δ, mit der Y-Achse den Winkel ε einschliessen.

Auch hier bezeichnen wir die den Abscissen x, $2x$, ... nx entsprechenden Winkel der Tangenten mit den Achsen durch δ_1, δ_2 ... δ_nr esp. $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ ... ε_n und beachten, dass

$$y_n = \frac{1}{\sin \varepsilon_n}, \quad s_n = \cot \varepsilon_n$$

Führen wir diese Substitutionen in 5) ein, so resultirt

$$10) \qquad e^x = \sqrt[3]{\cot \tfrac{1}{2}\varepsilon_3}, \quad e^{-x} = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varepsilon_3}$$

$$y = \tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{\cot \tfrac{1}{2}\varepsilon_3} + \sqrt[3]{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varepsilon_3}).$$

Da aber

$$y = \frac{1}{\sin \varepsilon}$$

ist, so erhält man schliesslich

$$11) \qquad \sqrt[3]{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varepsilon_3} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

welches die bekannte Hülfsformel der trigonometrischen Auflösung ist.

Wir haben in der Abhandlung über die Eigenschaften der Lemniskate eine Anwendung dieser Curve auf ein bekanntes Problem der Astronomie gegeben und zwar auf das der Bewegung eines Kometen in einer Parabel. Für die Kettenlinie würde sich die Auflösung folgendermassen gestalten.

In der Gleichung

$$s^3 + \tfrac{3}{4}s - \tfrac{1}{4}s_3 = 0$$

führen wir statt s den entsprechenden Wert $\operatorname{tg}\delta$ und ausserdem

$$2\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v$$

ein. Demnach ist

12) $$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^3 = \tfrac{2}{3}s_3.$$

Die Bewegungsgleichung ist

13) $$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{4}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^3 = 2\frac{kt}{p^{\frac{3}{2}}}.$$

Demnach ist zu setzen

14) $$s_3 = \frac{t}{\frac{p^{\frac{3}{2}}}{3k}} = \frac{t}{c}.$$

Aus dieser Relation erkennt man, dass der Bogen s_3 proportional der Zeit t wächst, und dass die gleichförmige Bewegung des dem Kometen entsprechenden Punktes durch den Ausdruck

$$\frac{3k}{p^{\frac{3}{2}}}$$

definirt wird.

Wie aus der genannten Abhandlung zu ersehen ist, ist die dort auftretende $\operatorname{tg}2\varphi$ mit unserer jetzigen s_3, also mit $\operatorname{tg}\delta_3$ identisch, daher ist

$$\delta_3 = 2\varphi.$$

Bezeichnen wir die vom Radiusvector R beschriebene Fläche mit F, so ist

15) $$\frac{F}{q^2} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^3 \quad \text{also} \quad = \tfrac{2}{3}s_3$$

Da aber nach der Theorie der Kettenlinie s_3 ebenfalls die von den Achsen, der Curve und der Ordinate y_3 begrenzte Fläche ausdrückt, so folgt der Satz, dass die auf die Kettenlinie sich beziehenden Flächenräume analog wie in der Parabel der Zeit proportional wachsen, indem

$$\frac{F}{q^2} = \tfrac{2}{3}s_3$$

Ferner ist

$$\frac{q}{R} = \cos\tfrac{1}{2}v^2 = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^2} = \frac{1}{1 + 4\operatorname{tg}\delta^2} = \frac{1}{1 + 4s^2} = \frac{1}{4y^2 - 3} = \frac{y}{y_3}.$$

also folgt aus der Relation $\frac{R}{q} = \frac{y_3}{y}$, dass das Verhältniss der Ordinaten y_3 und y durch den Radiusvector der Parabel bezeichnet wird.

In der Theorie der Planetenbewegung erhält man bekanntlich die mittlere Anomalie M aus der excentrischen E durch die Formel

$$M = E - e \sin E = k \frac{\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}} . t.$$

Analog wie bei dieser elliptischen Bewegung die Anomalie M durch die gleichförmige Bewegung in einem Kreise dargestellt wird, tritt bei der parabolischen anstatt des Kreises die Kettenlinie als Curve der mittleren Bewegung auf, so dass also beide Curven sich gegenseitig entsprechen.

XVIII.

Die vorhin gegebene Darstellung der Wurzeln der kubischen Gleichungen behandelte nur eine specielle Anwendung der Kettenlinie.

Der allgemeinsten Betrachtung liegen nun die beiden Gleichungen

16) $$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad y_n = \frac{e^{nx} + e^{-nx}}{2}$$

zu Grunde. Die erste erheben wir zur n. Potenz, man hat demnach, wenn zunächst n ungerade ist

17) $$2^n y^n = e^{nx} + n_1 e^{(n-2)x} + n_2 e^{(n-4)x} \dots n_1 e^{-(n-2)x} + e^{-nx}.$$

Sämtliche Glieder sind ungerade Potenzen von e, die zu zweien in der Form $e^{mx} + e^{-mx}$ auftreten, und da dies gleich $2y_m$ ist, so resultirt

18) $$2^{n-1} y^n = y_n + n_1 y_{n-2} + n_2 y_{n-4} \dots + n_{\frac{n-1}{2}} y.$$

Die verschiedenen Werte von y sind demnach durch y, y_3, y_5 ... ausgedrückt. y_3 ist nach früherem $= 4y^3 - 3y$, demnach kann man y_5 und allgemein y_n durch y darstellen.

Für gerade n hat man

19) $$2^{n-1} y^n = y_n + n_1 y_{n-2} + n_2 y_{n-4} \dots + \tfrac{1}{2} n_{\frac{n}{2}},$$

wodurch allgemein folgende Gleichungen bestehen:

$$
\begin{aligned}
&y^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} y_2 = 0, \\
&y^3 - \frac{3}{4} y - \frac{1}{4} y_3 = 0, \\
&y^4 - y^2 + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} y_4 = 0, \\
&y^5 - \frac{5}{4} y^3 + \frac{5}{16} y - \frac{1}{16} y_5 = 0, \\
&y^6 - \frac{3}{2} y^4 + \frac{9}{16} y^2 - \frac{1}{32} - \frac{4}{32} y_6 = 0, \\
&y^7 - \frac{7}{4} y^5 + \frac{7}{8} y^3 - \frac{7}{64} y - \frac{1}{64} y_7 = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{20}
$$

und analog

$$
\begin{aligned}
&s^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} y_2 = 0, \\
&s^3 + \frac{3}{4} s - \frac{1}{4} s_3 = 0, \\
&s^5 + \frac{5}{4} s^3 + \frac{5}{16} s - \frac{1}{16} s_5 = 0, \\
&s^7 + \frac{7}{4} s^5 + \frac{7}{8} s^3 + \frac{7}{64} s - \frac{1}{64} s_7 = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Die Gleichungen mit geraden Potenzen von y reduciren sich auf die übrigen. So geht die Gleichung

$$y^6 - \frac{3}{2} y^4 + \frac{9}{16} y^2 - \frac{1}{32} - \frac{1}{52} y_6 = 0$$

durch Substitutionen

$$y^2 = \tfrac{1}{2} y_2 + \tfrac{1}{2}$$

über in

$$y_2^3 - \tfrac{3}{4} y_2 - \tfrac{1}{4} y_6 = 0,$$

wie ohnedies klar ist. Alle Gleichungen dieser durch die Kettenlinie dargestellten Gattung haben eine positive reelle Wurzel, die übrigen sind complex. Wählen wir als Beispiel die Gleichung 5. Grades

$$x^5 - px^3 + qx - r = 0$$

oder

$$x^5 + px^3 + qx - r = 0, \tag{22}$$

so besteht eine Bedingungsgleichung zwischen p und q, indem aus der allgemeinern Gleichung für y

23) $$y^5-\frac{5}{4}a^2.y^3+\frac{5}{16}a^4.y-\frac{a^4}{16}y_5=0$$

hervorgeht, dass

24) $$p^2=5q,\quad a^2=\tfrac{4}{5}p,\quad y_5=\frac{5r}{q}.$$

Die reducirte Gleichung wäre demnach allgemein

25) $$x^5\mp 5px^3+\tfrac{1}{5}p^2x-r=0,\quad 3125r^2>4p^5.$$

Hat dieselbe eine positive reelle Wurzel, und sind die übrigen complex, so kann dieselbe vermittelst der Kettenlinie in folgender Art aufgelöst werden, wobei wir aber nur die reelle Wurzel berücksichtigen.

Aus

$$y_5=\frac{e^{5x}+e^{-5x}}{2},\quad s_5=\frac{e^{5x}-e^{-5x}}{2}$$

erhält man

$$y_5+s_5=e^{5x},\quad y_5-s_5=e^{-5x},$$

woraus

$$e^x=\sqrt[5]{y_5+s_5},\quad e^{-x}=\sqrt[5]{y_5-s_5},$$

und da

$$s_5=\sqrt{y_5^2-1},$$

so ergibt die Addition

26) $$y=\frac{\sqrt[5]{y_5+\sqrt{y_5^2-1}}+\sqrt[5]{y_5-\sqrt{y_5^2-1}}}{2},$$

die Subtraction

27) $$s=\sqrt[5]{\sqrt{s_5^2+1}+s_5}-\sqrt[5]{\sqrt{s_5^2+1}-s_5},$$

so dass man für das obere Zeichen

28) $$x=\sqrt[5]{\tfrac{1}{2}r+\sqrt{\tfrac{1}{4}r^2-\frac{p^5}{3125}}}+\sqrt[5]{\tfrac{1}{2}r-\sqrt{\tfrac{1}{4}r^2-\frac{p^5}{3125}}},$$

für das untere Zeichen

29) $$x=\sqrt[5]{\tfrac{1}{2}r+\sqrt{\tfrac{1}{4}r^2+\frac{p^5}{3125}}}+\sqrt[5]{\tfrac{1}{2}r-\sqrt{\tfrac{1}{4}r^2+\frac{p^5}{3125}}}$$

als Wurzeln der Gleichung

30) $$x^5 \mp 5px^3 + \tfrac{1}{5}p^2x - r = 0$$
hat.

Man sieht, dass formell diese Lösung mit der für die kubische Gleichung in Uebereinstimmung steht, wie dies auch mit der goniometrischen Relation

31) $$\sqrt[5]{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}E_5} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}E$$

der Fall ist.

Die Auflösung der Gleichungen $2m+1$ Grades ist hiernach klar.

Im einfachern Fall hat man für $n = 2m+1$

32) $$\begin{aligned} y &= \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{y_n + \sqrt{y_n^2 - 1}} + \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{y_n - \sqrt{y_n^2 - 1}}, \\ s &= \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{s_n + \sqrt{s_n^2 + 1}} + \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{s_n - \sqrt{s_n^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Im allgemeinen sind $\frac{n-3}{2}$ Bedingungsgleichungen zu erfüllen.

Man wird schon bemerkt haben, dass die hier aufgestellte Classe von Gleichungen derjenigen entspricht, deren sämtliche Wurzeln bei ungeradem n reell sind, und welche in der Theorie der Gleichungen irreductibel genannt werden. Es sind dies die Gleichungen, welche die Beziehung zwischen dem Cosinus eines Winkels und seines n-fachen ausdrücken.

Hinsichtlich der in den oben entwickelten Gleichungen auftretenden Coefficienten erwähnen wir noch, dass dieselben mit den in der bekannten Gleichung

$$\sin nx = n \sin x - \frac{n(n^2-1)}{1.2.3} \sin x^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-3^2)}{1.2.3.4.5} \sin x^5 - \dots$$

in gewisser Beziehung stehen.

XIX.

Wir teilen zum Schluss noch einige bemerkenswerte Eigenschaften der Kettenlinie mit, die sich den vorhin entwickelten anschliessen und durch Einfachheit empfehlen.

Wie man schon an den in 11) und 31) durchgeführten Beispielen für den 3. und 5. Grad bemerkt haben wird, sind trigonometrische

Beziehungen zwisshen den durch die n Tangenten mit den Achsen gebildeten Winkeln vorhanden, die wir folgendermassen bezeichnen.

$$33)\qquad \begin{aligned} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon_1 &= \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon, \\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon_2 &= \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon^2, \\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon_3 &= \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon^3, \\ &\cdots\cdots \\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon_n &= \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon^n. \end{aligned}$$

Der Nachweis dieser Relationen ist aus den Eigenschaften der Kettenlinie leicht zu geben. ε bezeichnet, wie bekannt, den Winkel der zum Curvenpunkt xy gehörenden Tangente mit der Y-Achse. Die übrigen lassen sich demnach durch die erste sämtlich berechnen. Addirt man beide Verticalreihen, so entsteht eine für $n = \infty$ leicht anzugebende Relation, und zwar

$$34)\qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon_1 + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon_2 + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon_3 \ldots = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon}.$$

Bei anderer Anordnung hat man ferner

$$35)\qquad \begin{aligned} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon_1 + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon_3 + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon_5 \ldots &= \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\varepsilon, \\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon_1 + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon_4 + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon_7 \ldots &= \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon^3}. \end{aligned}$$

Weil der Bogen $s = \cot\varepsilon$ d. i.

$$s = \tfrac{1}{2}(\cot\tfrac{1}{2}\varepsilon - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon),$$

so lassen sich für Σs in endlichen Reihen ebenfalls analoge Relationen aufstellen. Ferner folgt aus

$$35)\qquad y_m = \frac{e^{mx}+e^{-mx}}{2}, \quad s_n = \frac{e^{nx}-e^{nx}}{2},$$

durch Multiplication

$$37)\qquad 2y_m s_n = s_{m+n} - s_{m-n}.$$

Ebenso folgt aus

$$38)\qquad y_n = \frac{e^{nx}+e^{-nx}}{2}, \quad s_m = \frac{e^{mx}-e^{-mx}}{2},$$

$$89)\qquad 2y_n s_m = s_{m+n} + s_{m-n},$$

aus beiden ergibt sich demnach

$$40)\quad \begin{aligned} y_n s_m + y_m s_n &= s_{m+n} \\ y_n s_m - y_m s_n &= s_{m-n} \end{aligned}$$

sowie aus diesen

$$41)\quad \begin{aligned} \frac{s_{m+n} - s_{m-n}}{s_{m+n} + s_{m-n}} &= \frac{\sin \delta_n}{\sin \delta_m} \\ \frac{\operatorname{tg}(\delta_m - \delta_n)}{\operatorname{tg}(\delta_m + \delta_n)} &= \frac{s_{m-n}}{s_{m+n}}. \end{aligned}$$

Aus den hieraus abgeleiteten ergibt sich ferner

$$42)\quad \begin{aligned} s_m \sqrt{s_n^2 + 1} + s_n \sqrt{s_m^2 + 1} &= s_{m+n} \\ s_m \sqrt{s_n^2 + 1} - s_n \sqrt{s_m^2 + 1} &= s_{m-n} \end{aligned}$$

und durch die Multiplication beider resultirt

$$43)\quad s_m^2 - s_n^2 = s_{m+n} \,.\, s_{m+n} \,.\, s_{m-n}.$$

Es sei $m = n + \alpha$, dann ist

$$\begin{aligned} s^2_{n+a} - s_n^2 &= s_{2n+a} \,.\, s_a, \\ s^2_{n+2a} - s^2_{n+a} &= s_{2n+3a} \,.\, s_a, \\ s^2_{n+3a} - s^2_{n+2a} &= s_{2n+5a} \,.\, s_a, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ s^2_{n+ka} - s^2_{n+(k-1)a} &= s_{2n+a(2k-1)} \,.\, s_a. \end{aligned}$$

Werden diese Gleichungen addirt, so verschwinden linker Ha alle Glieder bis auf 2, und man hat

$$44)\quad \begin{aligned} s^2_{n+ka} - s_n^2 &= s_a(s_{2n+a} + s_{2n+3a} + s_{2n+5a} \dots s_{2n+(2k-1)a} \\ &= s_{2n+ka} \,.\, s_{ka}. \end{aligned}$$

Aus der Reihe

$$45)\quad \frac{s_{2n+ka} \,.\, s_{ka}}{s_a} = s_{2n+a} + s_{2n+3a} \dots s_{2n+(2k-1)a}$$

folgt für $a = 1$ und für $2n$ geschrieben n

$$46)\quad \frac{s_{n+k} \,.\, s_k}{s} = s_{n+1} + s_{n+3} + s_{n+5} \dots + s_{n+2k-1}.$$

Für $n = 1$ ist

$$47)\quad \frac{s_{k+1} \,.\, s_k}{s} = s_2 + s_4 + s_6 \dots + s_{2k}.$$

Aehnlich ist

48) $$\frac{s_{k+2} \cdot s_k}{s} = s_3 + s_5 + s_7 \ldots + s_{2k+1}.$$

Aus der allgemeinen Reihe

49) $$\frac{s_{n+ka} \cdot s_{ka}}{s_a} = s_{n+a} + s_{n+3a} + s_{n+5a} \ldots s_{n+(2k-1)a}$$

oder auch aus den vorhergehenden kann man noch die folgenden

50) $$\frac{s_2 s_4}{s} = s_3 + s_5, \quad \frac{s_3 s_5}{s} = s_3 + s_5 + s_7$$

und andere ohne Mühe ableiten.

Die aus 26) 27) folgenden Formeln

$$y + s = \sqrt[n]{y_n + \sqrt{y_n^2 - 1}}, \quad y - s = \sqrt[n]{y_n - \sqrt{y_n^2 - 1}},$$

bieten ein ausgezeichnetes Mittel dar, Ausdrücke wie $\sqrt[n]{A}$, worin A eine positive, n eine ganze oder gebrochene Zahl bedeutet, mittelst der Kettenlinie auf das einfachste geometrisch zu construiren (Fig. 4).

Indem wir also daran erinnern, dass

$$y + s = \cot \tfrac{1}{2}\varepsilon, \quad y - s = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

ergibt sich aus der Formel

51) $$\cot \tfrac{1}{2}\varepsilon = \sqrt[n]{y_n + \sqrt{y_n^2 - 1}} = \sqrt[n]{A}$$

die Bestimmung

52) $$y_n = \frac{A^2 + 1}{2A}, \quad \cot \tfrac{1}{2}\varepsilon = \sqrt[n]{\cot \tfrac{1}{2}\varepsilon_n}$$

welche in Folge von

$$A = \cot \frac{\varepsilon_n}{2}$$

in die bekannte

$$y_n = \frac{1}{\sin \varepsilon_n}$$

übergeht.

Um dies nun geometrisch zu benutzen, beschreiben wir um den Coordinatenanfangspunkt mit der Constanten der Kettenlinie, also hier mit einer Länge $= 1$ einen Kreis, errichten im Schnittpunkt desselben mit der X-Achse eine Normale zu letzterer, tragen die Grösse A nach Einheiten der Constanten darauf ab und verbinden den Endpunkt mit dem Anfangspunkt durch eine Gerade. Diese schliesst,

wie man sofort sieht, mit der Y-Achse den Winkel $\frac{1}{2}\varepsilon_n$ ein. Der Der eine Schenkel des doppelten Winkels trifft nun die Normale in einem Punkte, welcher vom Anfangspunkt um die Ordinate y_n entfernt ist Mit y_n ist aber x_n, mithin auch durch Teilung letzterer in n Teile x, demnach y und s bekannt, und die Wurzel folgt aus der Summe

$$\cot\tfrac{1}{2}\varepsilon = \sqrt[n]{\cot\tfrac{1}{2}\varepsilon_n} = y+s.$$

Ist A grösser als die Einheit, so geht bei wachsendem A die Construction durch die eine Hälfte der Curve, für $A<1$ durch die andere Hälfte fort bis zum Unendlichen und umfasst demnach alle Fälle. Zugleich bemerkt man, dass die Wurzelgrösse für $A \gtrless 1$ durch $y \pm s$ bezeichnet ist.

In derselben Art, wie wir aus $\cot\frac{1}{2}\varepsilon_n$ die $n$te Wurzel ziehen, kann auch die $m$te Potenz letzterer, also $\cot\frac{1}{2}\varepsilon^m$ constructiv bestimmt werden, so dass also überhaupt die Kettenlinie für gebrochene Werte von n die Construction von Ausdrücken wie

$$\sqrt[n]{A^m}$$

auf das einfachste und allgemeinste vermittelt.

Wie aus den bisher gegebenen Entwickelungen und Resultaten wol zur Genüge hervorgegangen ist, besitzt die Kettenlinie ausgezeichnete Eigenschaften, welche sie einer weitern Untersuchung wol wert erscheinen lässt und zwar um so mehr, als die Theorie der elliptischen Functionen in ihren Reihenentwickelungen durch diese Eigenschaften in geometrisch klarem Lichte erscheint Auch die auf die Gleichungen sich beziehenden Untersuchungen scheinen anziehend genug zu sein, um zu weitern Entwickelungen Anlass zu geben und die Aufmerksamkeit auf eine Curve zu richten, deren Eigenschaften im Vorstehenden nur angedeutet, keineswegs aber vollständig erschöpft sind.

Zusatz.

In den bisherigen Entwickelungen haben wir auf die Transformationen der elliptischen Functionen dritter Art keine Rücksicht genommen. Indem wir hier das Versäumte nachholen, erinnern wir zunächst an die bekannten Relationen derselben: S. Schlömilch, Compendium, S. 336, 459.

$$\Pi_{0(hk\varphi)} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1-h\sin\varphi^2)\Delta\varphi},$$

$$\Pi_{0(hk\varphi_1)} \pm \Pi_{0(hk\varphi_2)} = \Pi_{0(hk\varphi)} \pm \tfrac{1}{2} \frac{h}{\sqrt{h(1-h)(k^2-h)}} \times$$

$$\log \frac{1-h+h\cos\varphi\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sqrt{h(1-h)(k^2-h)}\sin\varphi\sin\varphi_1\sin\varphi_2}{1-h+h\cos\varphi\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sqrt{h(1-h)(k^2-h)}\sin\varphi\sin\varphi_1\sin\varphi_2}$$

$$\Pi_{0(\varphi)} = u + \frac{\operatorname{tg}\operatorname{am} a}{\varDelta \operatorname{am} a} \Pi_{(ua)},$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{h}}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$\Pi_{(ua)} = uZ_{(a)} - \frac{2q}{1-q^2} \sin\frac{\pi a}{K} \sin\frac{\pi u}{K} - \tfrac{1}{2} \frac{2q^2}{1-q^4} \sin\frac{2\pi a}{K} \sin\frac{2\pi u}{K} \ldots$$

$$Z(u) = \frac{2\pi}{K} \left(\frac{q}{1-q^2} \sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^2}{1-q^4} \sin\frac{2\pi u}{K} + \frac{q^3}{1-q^6} \sin\frac{3\pi u}{K} + \ldots \right)$$

Die zweite Formel transformiren wir vermittelst der dritten, beachten, dass $u_1 + u_2 = K$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist, führen noch ein $h = k^2 \sin\psi^2$, so dass $a = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin\psi^2}}$ ist, und erhalten nach gehöriger Reduction für das obere Zeichen

$$\tfrac{1}{8} \log \frac{1 + \frac{k\sin\psi\cos\psi}{\varDelta\psi} \sqrt{\frac{\varDelta\varphi - k'}{\varDelta\varphi + k'}}}{1 - \frac{k\sin\psi\cos\psi}{\varDelta\psi} \sqrt{\frac{\varDelta\varphi - k'}{\varDelta\varphi + k'}}} =$$

$$\frac{q}{1-q^2} \sin\frac{\pi a}{K} \cos\frac{\pi u}{2K} - \tfrac{1}{3} \frac{q^3}{1-q^6} \sin\frac{3\pi a}{K} \cos\frac{3\pi u}{2K} \ldots$$

und also auch durch Transformation eine zweite Reihe

$$\tfrac{1}{8} \log \frac{1 + \frac{k\sin\psi\cos\psi}{\varDelta\psi} \sqrt{\frac{1-\varDelta\varphi}{1+\varDelta\varphi}}}{1 - \frac{k\sin\psi\cos\psi}{\varDelta\psi} \sqrt{\frac{1-\varDelta\varphi}{1+\varDelta\varphi}}} =$$

$$\frac{q}{1-q^2} \sin\frac{\pi a}{K} \sin\frac{\pi u}{2K} + \tfrac{1}{3} \frac{q^3}{1-q^6} \sin\frac{3\pi a}{K} \sin\frac{3\pi u}{2K} \ldots$$

Man kann über $\psi = \operatorname{am} a$ nach Belieben verfügen, und beispiels-

weise $a=\frac{K}{2}$, demnach $\sin\psi=\frac{1}{\sqrt{1+k'}}$, $\cos\psi=\sqrt{\frac{k'}{1+k'}}$, $\varDelta\psi=\sqrt{k'}$ setzen, dann folgt aus der letzten Formel

$$\tfrac{1}{8}\log\frac{1+\sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}\,\frac{1-\varDelta}{1+\varDelta}}}{1-\sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}\,\frac{1-\varDelta}{1+\varDelta}}}=$$

$$\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K}-\frac{\frac{1}{3}q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K}+\frac{\frac{1}{5}q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{2K},$$

welche man mit den Formeln 1) bis 4) in Teil II. vergleichen möge. Setzt man noch $K=u$, also $\varDelta=k'$, so resultirt

$$\log\frac{1}{k'}=8\left(\frac{q}{1-q^2}+\frac{\frac{1}{3}q^3}{1-q^6}+\frac{\frac{1}{5}q^5}{1-q^{10}}+\ldots\right),$$

Wird in der 2. Reihe $u=K$, also $\varDelta\varphi=k'$ gesetzt, so folgt

$$\tfrac{1}{8}\log\frac{1+(1-k')\frac{\sin\psi\cos\psi}{\varDelta\psi}}{1-(1-k')\frac{\sin\psi\cos\psi}{\varDelta\psi}}=\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi a}{K}-\frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi a}{K}+\ldots$$

welche transformirt in

$$\tfrac{1}{8}\log\frac{1+k\sin\psi}{1-k\sin\psi}=\frac{\sqrt{q}}{1-q}\sin\frac{\pi a}{2K}-\frac{1}{3}\frac{\sqrt{q^3}}{1-q^3}\sin\frac{3\pi a}{2K}+\ldots\quad\text{übergeht.}$$

Die Differentiirung dieser Reihe würde auf bekannte Formeln führen. Man kann in den obigen Gleichungen übrigens auch $\psi=\varphi$ und $a=u$ setzen.]

Indem wir jetzt wieder zu den Hauptformeln zurückkehren, führen wir die Transformationen für das untere Zeichen durch, wonach $u_1-u_2=u$ ist. Die Werte für $\sin\varphi_1\sin\varphi_2$, $\cos\varphi_1\cos\varphi_2$ sind aus der Einleitung bekannt, und es bedarf nur noch der vollständigen Reduction auf die Variabelen, um schliesslich das folgende Resultat zu haben:

$$\tfrac{1}{4}\ln\frac{1+k'\varDelta\varphi\operatorname{tg}\psi^2+(\varDelta\varphi-k')\varDelta\psi\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi}{1+k'\varDelta\varphi\operatorname{tg}\psi^2-(\varDelta\varphi-k')\varDelta\psi\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi}=$$

$$\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi a}{K}\sin\frac{\pi u}{K}+\frac{\frac{1}{2}q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi a}{K}\sin\frac{2\pi u}{K}$$

$$+\frac{\frac{1}{3}q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi a}{K}\sin\frac{3\pi u}{K}+\ldots$$

$$+\frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi a}{K}\sin\frac{\pi u}{K}-\frac{\frac{1}{2}q^4}{1-q^8}\sin\frac{4\pi a}{K}\sin\frac{2\pi u}{K}$$
$$+\frac{\frac{1}{3}q^6}{1-q^{12}}\sin\frac{6\pi a}{K}\sin\frac{3\pi u}{K}-\dots$$

$$u=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}},\quad a=\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin\psi^2}}$$

Unter andern kann man dieser Formel auch diese Gestalt geben:

$$\tfrac{1}{4}\log\frac{1+k'\Delta\varphi\operatorname{tg}\psi^2+(\Delta\varphi-k')\Delta\psi\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi}{1+k'\Delta\varphi\operatorname{tg}\psi^2-(\Delta\varphi-k')\Delta\psi\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi}=$$
$$\frac{q}{1-q^4}\left(1+2q\cos\frac{\pi a}{K}+q^2\right)\sin\frac{\pi u}{K}$$
$$+\frac{\frac{1}{2}q^2}{1-q^8}\left(1-2q^2\cos\frac{2\pi a}{K}+q^4\right)\sin\frac{2\pi a}{K}\sin\frac{2\pi u}{K}+\dots$$

Im Falle $\varphi=\psi$ hat man noch

$$\tfrac{1}{4}\log\frac{1-k^2\sin\varphi^4}{1-2(1-k'\Delta)\sin\varphi^2+k^2\sin\varphi^4}=$$
$$\frac{q}{1-q^4}\left(1+2q\cos\frac{\pi u}{K}+q^2\right)\sin\frac{\pi u^2}{K}$$
$$+\frac{\frac{1}{2}q^2}{1-q^8}\left(1-2q^2\cos\frac{2\pi u}{K}+q^4\right)\sin\frac{2\pi u^2}{K}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

welche für $u=\frac{K}{2}$ wieder in die schon oben abgeleitete Reihe $\ln\frac{1}{k'}$ übergeht.

Die hier entwickelten Resultate zeigen, dass auch die elliptischen Functionen der dritten Art einer erfolgreichen Transformation fähig sind, wodurch sie sich denen der 1. und 2. Art ergänzend anschliessen. Bei aufmerksamer Betrachtung der bisher dargestellten Functionen und Reihen wird man erkennen, dass dieselben noch weiter transformirt werden können, wenn man die in der Einleitung gegebenen Formeln benutzt. So würde man für die Reihe

$$\sin\operatorname{am}u=\frac{2\pi}{kK}\left(\frac{\sqrt{q}}{1-q}\sin\frac{\pi u}{2K}+\frac{\sqrt{q^3}}{1-q^3}\sin\frac{3\pi u}{2K}+\frac{\sqrt{q^5}}{1-q^5}\sin\frac{5\pi u}{2K}+\dots\right)$$

die Formeln 19) des I. Teils zu benutzen haben. Nach Durchführung der Rechnungen folgt

$$\sqrt{\frac{\Delta+\cos\varphi}{\Delta+k'}} = \frac{2\pi}{kK}\left(\frac{\sqrt{q}}{1-q}\cos\frac{\pi u}{4K}+\frac{\sqrt{q^3}}{1-q^3}\cos\frac{3\pi u}{4K}\right.$$
$$\left.-\frac{\sqrt{q^5}}{1-q^5}\cos\frac{5\pi u}{4K}-\frac{\sqrt{q^7}}{1-q^7}\cos\frac{7\pi u}{4K}+\ldots\right)$$

$$\sqrt{\frac{\Delta-\cos\varphi}{\Delta+k'}} = \frac{2\pi}{kK}\left(\frac{\sqrt{q}}{1-q}\sin\frac{\pi u}{4K}-\frac{\sqrt{q^3}}{1-q^3}\sin\frac{3\pi u}{4K}\right.$$
$$\left.-\frac{\sqrt{q^5}}{1-q^5}\sin\frac{5\pi u}{4K}+\frac{\sqrt{q^7}}{1-q^7}\sin\frac{7\pi u}{4K}+\ldots\right)$$

Beide Reihen dividiren wir durch einander und transformiren den Quotienten vermittelst der Methoden, welche im Compendium von Schlömilch S. 417. angegeben sind. Es resultirt die neue Formel

$$\operatorname{tgam} u = \frac{1}{\sqrt{k'}}\,\frac{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K}-\frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K}-\frac{q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{2K}+\ldots}{\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K}+\frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}-\frac{q^5}{1-q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{2K}-\ldots}$$

und mit ihr stehen, wenn man in entsprechender Weise verfährt, noch zahlreiche andere in Verbindung. Da diese Transformationen interessant und anregend sind, so empfehlen wir die Durcharbeitung derselben dem Leser auf das wärmste.

Die Quellen, welche ich bei der Ausarbeitung dieser Abhandlung benutzt habe und denen ich zu grossem Dank verpflichtet bin, sind: Schlömilch, Compendium der höheren Analysis. Durège, Theorie der elliptischen Functionen.

Emmerich, im Juli 1884.

IX.

Elliptische Integralfunctionen und ihre geometrische, analytische und dynamische Bedeutung.

Von

Emil Oekinghaus.

Fortsetzung von T. I. Nr. XIX.

Dritter Teil.

§ 32.

Transformation der 3. Integralfunction.

Die geometrische Interpretation der im 2. Teil entwickelten dritten Integralfunction führt, wie wir im Folgenden zeigen werden, zur geometrischen Darstellung des Additionstheorems der elliptischen Integrale 1. Art mit drei Variabelen, und zwar vermittelst der Kegelschnitte. Die Leichtigkeit, mit welcher die Eigenschaften dieser Curven sich mit denen ihrer Integralfunctionen verschmelzen, erlaubt es, diese Aufgabe in mehrfacher Art zu lösen und ausserdem einen analytischen Ausdruck zu gewinnen, der auf einfachste Weise die Abhängigkeit der Amplituden dieser vier Integrale darstellt und von geometrischen Rücksichten frei ist. Vorauf geht die Ableitung einer neuen 4. Integralfunction, die den Vorzug besitzt, dass ihr Modulus rational ist, und zum Schluss haben wir noch die schon früher erwähnten hyperelliptischen Integralfunctionen in den Kreis der Betrachtung gezogen, um zu untersuchen, in wie weit die aus der Theorie der Kegelschnitte gewonnenen Resultate einer Verallgemeinerung fähig sind.

Die § 29. entwickelte Integralfunction

$$1)\quad \int\frac{d\tau_1}{\sqrt{1-\frac{R^2}{s^2}\sin\tau_1^2}}+\int\frac{d\tau_2}{\sqrt{1-\frac{R^2}{s^2}\sin\tau_2^2}}+\int\frac{d\tau_3}{\sqrt{1-\frac{R^2}{s^2}\sin\tau_3^2}}+\int\frac{d\tau_4}{\sqrt{1-\frac{R^2}{s^2}\sin\tau_4^2}}=0$$

$$\sin(\vartheta-\tau)=\frac{R}{s}\sin\tau$$

werden wir im Folgenden transformiren. Wie daselbst ausgeführt, ist sie ein analytisch geometrischer Ausdruck der Abhängigkeit zwischen Kreis und Kegelschnitt und dadurch ausgezeichnet, dass der Modulus der Function keinen Parameter des Kegelschnitts enthält. R bezeichnet (Fig. 15.) die Entfernung des Kreiscentrums von einem Brennpunkt, s den Radius des Kreises und τ die Winkel, welche R mit den nach den 4 Schnittpunkten beider Curven gezogenen Brennstrahlen einschliessen. Dieselben sind Wurzeln der folgenden Gleichung

$$a+b\sin\tau+c\cos\tau+d\sin 2\tau+e\cos 2\tau=0,$$

worin

$$2)\quad\begin{aligned}
\frac{a}{s^2}&=1-\frac{R^2}{s^2}+\tfrac{1}{2}\varepsilon^2\left(1-\frac{R^2}{s^2}\right)-\frac{p^2}{s^2}-\frac{p\varepsilon}{s}\,\frac{R}{s}\cos\alpha,\\
\frac{b}{s^2}&=-2\varepsilon\left(1-\frac{R^2}{s^2}\right)\sin\alpha,\\
\frac{c}{s^2}&=-2\varepsilon\left(1-\frac{R^2}{s^2}\right)\cos\alpha+2\frac{p}{s}\,\frac{R}{s},\\
\frac{d}{s^2}&=\tfrac{1}{2}\varepsilon^2\left(1-\frac{R^2}{s^2}\right)\sin 2\alpha-\varepsilon\frac{p}{s}\,\frac{R}{s}\sin\alpha,\\
\frac{e}{s^2}&=\tfrac{1}{2}\varepsilon^2\left(1-\frac{R^2}{s^2}\right)\cos 2\alpha-\varepsilon\,\frac{p}{s}\,\frac{R}{s}\cos\alpha.
\end{aligned}$$

Die Polargleichung ist

$$r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}.$$

Für das Folgende ist nun die Bemerkung sehr wesentlich, dass die Vorzeichen der Integrale mit den entsprechenden Wurzelvorzeichen der Gleichung übereinstimmen.

Wir erinnern nun an die bekannte Relation der elliptischen Integrale

3) $E\left(\frac{R}{s}\tau\right)+\frac{R}{s}\sin\tau=\left(1+\frac{R}{s}\right)E(q\tfrac{1}{2}\vartheta)+\left(1-\frac{R}{s}\right)F(q\tfrac{1}{2}\vartheta)$,

worin

$$q^2=\frac{4Rs}{(R+s)^2}\quad\text{ist.}$$

Wir haben aber aber a. a. O. nachgewiesen, dass die Relation

4)
$$\Sigma\int\frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{1-q^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2}}=0,$$
und
$$\Sigma\int\sqrt{1-q^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta=\frac{4R}{\varepsilon(R+s)}\sin\alpha$$

besteht. Die Formel 3) gibt daher auf alle Werte ausgedehnt

5) $$\Sigma\int\sqrt{1-\frac{R^2}{s^2}\sin\tau^2}\,d\tau+\frac{R}{s}\Sigma\sin\tau$$
$$=\left(1+\frac{R}{s}\right)\frac{4R}{\varepsilon(R+s)}\sin\alpha,$$

und muss noch mehrfachen Transformationen unterworfen werden.

Zunächst muss der Modulus der Function durch die Constanten der Gleichung, die bekanntlich auch durch eine Gleichung 4. Grades ausgedrückt werden kann, dargestellt werden.

Wir bilden aus den Beziehungen 2) den Quotienten

6) $$\frac{d}{c}=-\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin\alpha.$$

Die letzte Function geht daher in

7) $$\Sigma E\left(\frac{R}{s}\tau\right)+\frac{R}{s}\Sigma\sin\tau=2\frac{R}{s}\cdot\frac{c}{d}\sin\alpha^2$$

über. Es wäre demnach $\sin\alpha^2$ durch die Constanten a, b und $\Sigma\sin\tau$ vermittelst einer Gleichung für $\sin\tau$ zu entwickeln.

Wir multipliciren in den Relationen 2) d mit $\cos\alpha$, und e mit $\sin\alpha$ und bilden die Differenz

$$d\cos\alpha-e\sin\alpha=\tfrac{1}{2}\varepsilon^2\left(1-\frac{R^2}{s^2}\right)s^2.\sin\alpha.$$

Entwickelt man ferner

$$\frac{bd}{c}=\tfrac{1}{2}\varepsilon^2\left(1-\frac{R^2}{s^2}\right)\sin\alpha^2,$$

so folgt aus beiden Formeln

$$d\cot\alpha - e = \frac{bd}{2c}(1+\cot\alpha^2),$$

also

$$b\cot\alpha - c = \pm\sqrt{c^2 - b^2 - \frac{2bce}{d}}$$

8)
$$\sin\alpha^2 = \frac{b^2}{b^2+\left(c+\sqrt{c^2-b^2-\frac{2bce}{d}}\right)^2}$$

oder

9)
$$\sin\alpha^2 = \frac{d}{2c}\cdot\frac{cd - be - \sqrt{c^2 - b^2 - \frac{2bce}{d}}}{d^2+e^2}$$

Wir bilden jetzt die Differenz von $a - e$ und finden

$$\frac{a-e}{s^2} = 1 - \frac{R^2}{s^2} + \varepsilon^2\left(1-\frac{R^2}{s^2}\right)\sin\alpha^2 - \frac{p^2}{s^2},$$

ersetzen hierin $\sin\alpha^2$ durch den vorhin gegebenen Wert und erhalten

$$4(a-e)cd = bc^2 + 4bd^2 - 4d^2\left(1-\frac{R^2}{s^2}\right)\frac{(b\cot\alpha - c)^2}{b\frac{R^2}{s^2}}$$

Da aber $b\cot\alpha - c$ nach 8) bekannt ist, so erhalten wir aus der letzten Relation den gesuchten Modulus $\frac{R}{s}$, welchen wir kurz durch p bezeichnen wollen und damit die Lösung des folgenden Theorems.

§ 33.

Die 1. Integralfunction der Gleichung

$$a + b\sin\tau + c\cos\tau + d\sin 2\tau + e\cos 2\tau = 0$$

wird dargestellt durch

$$\int\frac{d\tau}{\sqrt{1-p^2\sin\tau_1^2}} + \int\frac{d\tau_2}{\sqrt{1-p^2\sin\tau_2^2}} + \int\frac{d\tau_3}{\sqrt{1-p^2\sin\tau_3^2}} + \int\frac{d\tau_4}{\sqrt{1-p^2\sin\tau_4^2}} = 0,$$

ihr Modulus ist

10)
$$p^2 = \frac{4d}{c}\,\frac{b^2d - c^2d + 2bce}{4abd - 4cd^2 + 4bde - b^2c}$$
oder
$$p'^2 = \frac{b}{c}\,\frac{acd - bd^2 - cde - \frac{1}{4}bc^2}{abd - cd^2 + bde - \frac{1}{4}b^2c}$$

und ihre Amplituden sind Wurzeln der Gleichung.

Um die 2. Integralfunction herzustellen, ist zunächst die Summe $\sin\tau_1 + \sin\tau_2 + \sin\tau_3 + \sin\tau_4$ aus den Constanten zu ermitteln. Diese leitet sich ohne Mühe aus der typischen Gleichung ab, und sie ist

$$\Sigma \sin\tau = \frac{be - cd}{d^2 + e^2}.$$

Demnach geht die Relation 7) nach Festsetzung der Vorzeichen über in

11) $$\Sigma(Ep\tau) + p.\frac{be - cd}{d^2 + e^2} = p.\frac{be - cd + d\sqrt{c^2 - b^2 - \frac{2bce}{d}}}{d^2 + e^2}$$

und das Endresultat ist:

Die zweite Integralfunction der Gleichung

$$a + b\sin\tau + c\cos\tau + d\sin 2\tau + e\cos 2\tau = 0$$

wird durch

12) $$\int\sqrt{1 - p^2\sin\tau_1{}^2}\,d\tau_1 + \int\sqrt{1 - p^2\sin\tau_2{}^2}\,d\tau^2 + \int\sqrt{1 - p^2\sin\tau_3{}^2}\,d\tau_3 + \int\sqrt{1 - p^2\sin\tau_4{}^2}\,d\tau_4 = pd\,\frac{\sqrt{c^2 - b^2 - \frac{2bce}{d}}}{d^2 + e^2}$$

dargestellt, deren Modulus

$$p^2 = \frac{4d}{c}\,\frac{b^2d - c^2d + 2bce}{4abd - 4cd^2 + 4bde - b^2c}$$

ist und deren Amplituden τ aus den Wurzeln der Gleichung hervorgehen.

Zieht man indessen vor, den Modulus der Integralfunction aus den Constanten der biquadratischen Gleichung

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\tau^4 - A\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\tau^3 + B\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\tau^2 - C\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\tau + D = 0$$

zu berechnen, so ist derselbe

$$13)\quad p'^2 = \tfrac{1}{4}\frac{(A^2-C^2)(1+B+D)+(A+C)^2(D-1)+\frac{1}{4}(A^2-C^2)^2:(D-1)}{A^2D-C^2}$$

und die Functionen sind

$$\int\frac{d\tau_1}{\sqrt{1-p^2\sin\tau_1{}^2}}+\int\frac{d\tau_2}{\sqrt{1-p^2\sin\tau_2{}^2}}+\int\frac{d\tau_3}{\sqrt{1-p^2\sin\tau_3{}^2}}$$
$$+\int\frac{d\tau_4}{\sqrt{1-p^2\sin\tau_4{}^2}}=0,$$

14)

$$\int\sqrt{1-p^2\sin\tau_1{}^2}\,d\tau_1+\int\sqrt{1-p^2\sin\tau_2{}^2}\,d\tau_2$$
$$14)\ +\int\sqrt{1-p^2\sin\tau_3{}^2}\,d\tau_3+\int\sqrt{1-p^2\sin\tau_4{}^2}\,d\tau_4$$
$$=\frac{2p\sqrt{4(A-C)^2(D-1)^2+4(A^2-C^2)(1-B+D)(D-1)-(A^2-C^2)^2}}{(A-C)^2+(1-B+D)^2}$$

Der Modulus dieser Functionen ist stets rational. Für $A=C$ wird derselbe null, wie es sein muss, weil alsdann

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\tau_1+\tau_2+\tau_3+\tau_4)=\frac{A-C}{1-B+D}\ \text{zu Null wird.}$$

Als Beispiel wählen wir die Normalen der Ellipse.

Der Schnittpunkt der 4 Normalen habe die Polarcoordinaten $R(\alpha)$. Als Variabeln nehmen wir die bekannten excentrischen Winkel:

$$\sin\varphi=\frac{x}{a},\qquad\cos\varphi=\frac{y}{b}.$$

Die Normalengleichung ist

$$a+b\sin\varphi+c\cos\varphi+d\sin2\varphi+e\cos2\varphi=0,$$

worin

$$a=0,\quad b=a\cos\alpha,\quad c=b\sin\alpha,\quad d=\frac{c^2}{2R},\quad e=0.$$

Wir setzen bei Berechnung des Modulus

$$p=\frac{c}{a}\quad\text{also}\quad p'=\frac{b}{a}$$

voraus. Man erhält die Curve

$$\frac{a^2b^2}{c^2}R^2=\frac{b^4}{\cos\alpha^2}-\frac{a^4}{\sin\alpha^2}.$$

oder auch

$$\frac{a^2 b^2}{c^2} x^2 y^2 = b^4 y^2 - a^4 x^2.$$

Die 2. Integralfunction wird dann, wenn wir den Bogen der Ellipse

$$a \int \sqrt{1 - p^2 \sin \varphi^2}\, d\varphi$$

durch S bezeichnen, zu

15) $$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = + \frac{2R}{c} \sqrt{b^2 \sin \alpha^2 - a^2 \cos \alpha^2}$$

Die Normalen, welche von der oben angegebenen Curve an die Ellipse gezogen werden können, begrenzen demnach Bogen, deren Summe einen einfachen algebraischen Ausdruck hat.

Wir haben schon früher die geometrischen Verhältnisse, besprochen, welche aus der Verbindung von Kreis und Kegelschnitt hervorgehen. Man kann indessen weiter gehen, und diejenigen Verhältnisse, welche die Rectificationen derselben berühren, aus der Verbindung zweier Kegelschnitte entwickeln. Wir wählen als erste Ellipse diejenige, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

als zweite, welche die erste in 4 Punkten schneidet,

$$\frac{x_1^2}{a'^2} + \frac{y_1^2}{b'^2} = 1.$$

Die Centrale beider, also R, schliesse mit der a-Achse den Winkel α, mit der a'-Achse den Winkel ε ein, endlich sei β der Winkel zwischen beiden Achsen, also

$$\beta = \alpha + \varepsilon.$$

Als Variabele wählen wir wieder die bekannten excentrischen Winkel, durch welchen das elliptische Integral der 2. Art

$$a \int \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} \sin \varphi^2}\, d\varphi = S$$

sich darstellt und wollen die von beiden Kegelschnitten begrenzten Bogen mit Hülfe der 2. Integralfunction durch eine Relation mit einander verknüpfen.

Die φ erhält man wieder aus der bequemen Gleichung

$$a + b\sin\varphi + c\cos\varphi + d\sin 2\varphi + e\cos 2\varphi = 0$$

worin

$$a = \frac{a'^2}{2}(a^2\sin\beta^2 + b^2\cos\beta^2 + 2R^2\sin\varepsilon^2)$$
$$+ \frac{b'^2}{2}(a^2\cos\beta^2 + b^2\sin\beta^2 + 2R^2\cos\varepsilon^2) - a'^2b'^2$$

$$b = -2Ra(a'^2\sin\beta\sin\varepsilon + b'^2\cos\beta\cos\varepsilon)$$

16) $$c = 2Rb(a'^2\cos\beta\sin\varepsilon - b'^2\sin\beta\cos\varepsilon)$$

$$d = -abc'^2\sin\beta\cos\beta$$

$$e = -\frac{a'^2}{2}(a^2\sin\beta^2 - b^2\cos\beta^2) - \frac{b'^2}{2}(a^2\cos\beta^2 - b^2\sin\beta^2,$$

woraus vermöge der Formel

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) = \frac{d}{e}$$

die Relation

17) $$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) = \frac{2\frac{ab}{c^2}\sin 2\beta}{1 - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\,\frac{a'^2+b'^2}{a'^2-b'^2}\cos 2\beta}$$

folgt. Die $\Sigma\varphi$ bleibt bei constantem β oder bei unveränderter Achsenrichtung constant. Für die 2. Ellipse besteht aber ein analoger Ausdruck zwischen den excentrischen Winkeln ψ nämlich

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4) = \frac{2\frac{a'b'}{c'^2}\sin 2\beta}{1 - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\,\frac{a'^2+b'^2}{a'^2-b'^2}\cos 2\beta}$$

und deshalb ist

$$\frac{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4)}{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4)} = \frac{a}{a'}\,\frac{b}{b'}\,\frac{c'^2}{c^2}.$$

Sind daher beide Ellipsen ähnlich oder gleich, so erhält man die Identität

18) $$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4,$$

wonach die Summe der excentrischen Winkel in beiden ähnlichen Ellipsen dieselbe ist.

Die Constanten der obigen Gleichung werden sehr einfach, wenn der 2. Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel ist. Sie sind für $a'^2 = -b'^2$

$$a = R^2 \cos 2\varepsilon - a'^2 + \frac{c^2}{2} \cos 2\beta$$
$$b = -2aR \cos(\beta + \varepsilon)$$
19) $$c = -2bR \sin(\beta + \varepsilon)$$
$$d = \quad ab \sin 2\beta$$
$$e = -\tfrac{1}{2} c^2 \cos 2\beta$$

Man nimmt nun noch an, das $\beta = 45^0$ und $R^2 \cos 2\varepsilon = a^2$ ist, so wird a und e gleich null und der Modulus der Integralfunction wird dadurch sehr vereinfacht. Die erste Bedingung verlangt die Parallelität der Asymptoten und der Achsen der Ellipse, die zweite zeigt, dass die Hyperbel durch das Ellipsencentrum geht. Zugleich ist $\beta + \varepsilon = 90^0 - \alpha$.

Der Modulus wird bestimmt durch

$$p'^2 = \frac{b^2}{c^2} \frac{d^2 + \frac{1}{4}c^2}{d^2 + \frac{1}{4}b^2},$$

und da $p' = \frac{b}{a}$ sein muss, wenn die Integralfunction durch Ellipsenbogen dargestellt werden soll, so erhält man

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{y^2}{x^2} \frac{a^2 + x^2}{b^2 + y^2}$$

und aus dieser Bedingungsgleichung die Curve

20) $$c^2 x^2 y^2 = b^4 x^2 - a^4 y^2$$

als geometrischen Ort der Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln von oben vorgeschriebener Lage, welche in der Ellipse Bogen begrenzen, welche durch folgende Relation mit einander verknüpft sind:

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 2S + 2c \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Andere Ableitungen gewinnt man noch, wenn man die Gleichung der Hyperbel in die der Asymptoten übergehen lässt. Es entwickeln sich dann Formeln, welche noch ziemlich einfacher Natur sind.

Wir wollen indessen diese Beziehungen zweier einander schneidenden Geraden für die Ellipse hier nicht weiter erörtern.

§ 34.

Das Additionstheorem für 3 elliptische Integrale.

Wir haben schon in § 23. einen analytischen Ausdruck für das Theorem gegeben, welcher sich als eine Gleichung 4. Grades darstellte. Auch die vorhin abgeleiteten Relationen würden wiederum eine analoge Gleichung hervorgehen lassen, wenn man im Modulus

$$p'^2 = \frac{1}{4}\,\frac{(A^2-C^2)(1+B+D)+(A+C)^2(D-1)+\frac{1}{4}(A^2-C^2)^2:(D-1)}{A^2D-C^2}$$

der Integralfunction

$$\Sigma\int\frac{d\tau}{\sqrt{1-p^2\sin\tau^2}}=0,$$

die Constanten durch

$$A=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\tau_1+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\tau_2+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\tau_3+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\tau_4$$
$$B=\Sigma\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\tau_1\operatorname{tg}\tau_2,\quad C=\Sigma\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\tau_1\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\tau_2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\tau_3 \text{ etc.}$$

oder auch durch

$$\begin{aligned}A&=a+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\tau_4,\\ B&=b+a\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\tau_4,\\ C&=c+b\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\tau_4,\\ D&=\phantom{b+{}}c\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\tau_4\end{aligned}$$

darstellt. Die daraus hervorgehende Gleichung bestimmt 4 Wurzeln für $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\tau_4$, die demnach das Problem in voller Allgemeinheit lösen. Wir werden indessen diesen Weg nicht verfolgen, sondern vielmehr untersuchen, ob das fragliche Additionstheorem für 3 Variabeln sich aus den Eigenschaften der Kegelschnitte ableiten lässt. Es lässt sich nun in der Tat der Beweis führen, dass dies Theorem sowol auf verschiedene Art lösbar, als auch einer sehr ansprechenden Darstellung fähig ist. Die Frage ist also nun die, mit Umgehung einer Gleichung höheren Grades eine einfache geometrisch discutirbare Beziehung zwischen den Amplituden der Integralfunction

21) $$\pm F(\varphi_1)\pm F(\varphi_2)\pm F(\varphi_3)=F(\varphi_4)$$

zu finden, also φ_4 zu bestimmen, wenn die Amplituden $\varphi_1\varphi_2\varphi_3$ nebst dem Modulus k bekannt sind.

Die in § 29. entwickelte Function

22) $$\int \frac{d\frac{1}{2}\vartheta_4}{\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s)^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta_4^2}}$$

$$= \int \frac{d\frac{1}{2}\vartheta_1}{\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s)^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta_1^2}} + \int \frac{d\frac{1}{2}\vartheta_2}{\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s)^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta_2^2}}$$

$$+ \int \frac{d\frac{1}{2}\vartheta_3}{\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s)^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta_3^2}}$$

bildet die Basis der nachfolgenden Untersuchungen.

Zunächst bemerkt man, dass der Modulus

$$k^2 = \frac{4Rs}{(R+s)^2}$$

nur vom Verhältniss $\frac{R}{s}$ abhängt. Da aber k gegeben ist, so ist auch $\frac{R}{s}$ bekannt. Jedem willkürlichen R entspricht demnach ein bestimmtes s als Radius eines Kreises. Da aber auch $\vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3$ gegeben und demnach 3 Durchschnittspunkte des Kreises und Kegelschnitts bekannt sind, so bemerkt man sofort, dass das vorliegende Theorem hinsichtlich seiner Lösung auf das Problem zurückgeführt ist, aus 3 Punkten eines Kegelschnitts bei gegebenem Brennpunkt die Curve zu construiren.

Die analytische Geometrie der Ebene zeigt aber, dass es möglich ist, durch 3 Punkte einen Kegelschnitt zu legen, wenn einer seiner Brennpunkte bekannt ist.

Wir bezeichnen die Radienvectoren des Brennpunktes mit r, die Excentricität durch e und bezeichnen den unbekannten Winkel zwischen R und der grossen Achse mit α und, wie bekannt, mit τ die Winkel zwischen R und den Radienvectoren r.

Die Polargleichung ist demnach

$$r = \frac{p}{1-e\cos(\alpha-\tau)},$$

woraus

$$r = p + er\cos(\alpha-\tau)$$

und

$$r = p + er(\cos\alpha\cos\tau + \sin\alpha\sin\tau)$$

folgt.

Wir führen ein

$$r\cos\tau = x, \qquad r\sin\tau = y,$$
$$e\cos\alpha = \beta, \qquad e\sin\alpha = \gamma$$

und erhalten folgendes Gleichungssystem

23) $$\begin{aligned} p+\beta x_1+\gamma y_1 &= r_1 \\ p+\beta x_2+\gamma y_2 &= r_2 \\ p+\beta x_3+\gamma y_3 &= r_3. \end{aligned}$$

In demselben sind xyr bekannt. Man findet

$$p = \frac{r_1(x_2y_3-x_3y_2)+r_2(x_3y_1-x_1y_3)+r_3(x_1y_2-x_2y_1)}{x_2y_3-x_3y_2+x_3y_1-x_1y_3+x_1y_2-x_2y_1}$$

oder, wenn wir die Dreiecksbezeichnung Δ einführen

$$p = \frac{r_1\Delta_1-r_2\Delta_2+r_3\Delta_3}{\Delta_1-\Delta_2+\Delta_3}$$

d. i.

24) $$p = \frac{r_1\Delta_1-r_2\Delta_2+r_3\Delta_3}{\Delta}$$

worin die Determinante Δ den doppelten Inhalt des Dreiecks zwischen den 3 Kegelschnittspunkten bezeichnet.

Ebenso findet man

25) $$\gamma = e\sin\alpha = \frac{r_1(x_3-x_2)+r_2(x_1-x_3)+r_3(x_2-x_1)}{\Delta}$$
$$\beta = e\cos\alpha = \frac{r_1(y_2-y_3)+r_2(y_3-y_1)+r_3(y_1-y_2)}{\Delta},$$

woraus durch Division

26) $$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{r_1(x_2-x_3)+r_2(x_3-x_1)+r_3(x_1-x_2)}{r_1(y_2-y_3)+r_2(y_3-y_1)+r_3(y_1-y_2)}.$$

Diese Formen haben wir noch einer Transformation zu unterwerfen, welche sich auf die Darstellung der r, x, y durch k, ϑ bezieht.

Wie aus der Fig. 15) hervorgeht, ist

$$r^2 = R^2+s^2+2Rs\cos\vartheta$$

oder

$$r^2 = (R+s)^2-4Rs\sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2$$

also auch

27) $$\frac{r}{s} = \frac{2\sqrt{1-k^2\sin\frac{1}{2}\vartheta^2}}{1-k'} = \frac{2\Delta(\frac{1}{2}\vartheta)}{1-k'}.$$

Die Radienvectoren r sind demnach durch $k\vartheta$ dargestellt.

Wir transformiren jetzt

$$x_2 y_3 - x_3 y_2,$$

indem wir

$$x = R + s\cos\vartheta$$
$$y = \quad s\sin\vartheta$$

einführen. Daher ist

$$x_2 y_3 - x_3 y_2 = Rs(\sin\vartheta_3 - \sin\vartheta_2) + s^2\sin(\vartheta_3 - \vartheta_2).$$

Bilden wir nun $\Sigma x_2 y_3 - x_3 y_2$, so verschwinden die Glieder von Rs und es bleibt

$$\Sigma x_2 y_3 - x_3 y_2 = 4s^2 \sin\tfrac{1}{2}(\vartheta_1 - \vartheta_2)\sin\tfrac{1}{2}(\vartheta_2 - \vartheta_3)\sin\tfrac{1}{2}(\vartheta_3 - \vartheta_1).$$

Man bemerke noch

$$\frac{R}{s} = \frac{1+k'}{1-k'} \quad \text{oder} \quad = \frac{1-k'}{1+k'},$$

je nachdem $R \gtrless s$ ist.

Die Umgestaltung von $r_1(x_2 y_3 - x_3 y_2)$ führt auf

$$r_1 s^2\left(\frac{R}{s}(\sin\vartheta_3 - \sin\vartheta_2) + \sin(\vartheta_3 - \vartheta_2)\right)$$
$$= \frac{4r's^2}{1-k'}\sin\tfrac{1}{2}(\vartheta_2 - \vartheta_3)(\cos\tfrac{1}{2}\vartheta_2\cos\tfrac{1}{2}\vartheta_3 - k'\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3),$$

und demnach ist, wenn kurz $\Delta(k\tfrac{1}{2}\vartheta)$ durch Δ bezeichnet wird,

$$28)\quad \frac{p}{s} = -\frac{2}{(1-k')^2}\,\frac{\Sigma\Delta_1\sin\frac{1}{2}(\vartheta_2-\vartheta_3)(\cos\frac{1}{2}\vartheta_2\cos\frac{1}{2}\vartheta_3 - k'\sin\frac{1}{2}\vartheta_2\sin\frac{1}{2}\vartheta_3)}{\sin\frac{1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)\sin\frac{1}{2}(\vartheta_2-\vartheta_3)\sin\frac{1}{2}(\vartheta_3-\vartheta_1)}$$

29)

$$e\sin\alpha = -\frac{1}{2(1-k')}\,\frac{\Delta_1(\cos^2\vartheta_2 - \cos\vartheta_3) + \Delta_2(\cos\vartheta_3 - \cos\vartheta_1) + \Delta_3(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2)}{\sin\frac{1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)\sin\frac{1}{2}(\vartheta_2-\vartheta_3)\sin\frac{1}{2}(\vartheta_3-\vartheta_1)}$$

$$e\cos\alpha = \frac{1}{2(1-k')}\,\frac{\Delta_1(\sin\vartheta_2 - \sin\vartheta_3) + \Delta_2(\sin\vartheta_3 - \sin\vartheta_1) + \Delta_3(\sin\vartheta_1 - \sin\vartheta_2)}{\sin\frac{1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)\sin\frac{1}{2}(\vartheta_2-\vartheta_3)\sin\frac{1}{2}(\vartheta_3-\vartheta_1)}$$

Diese Relationen geben die Lösung des Problems, da die Elemente des Kegelschnitts e und p als Functionen der Amplituden und des Modulus aus denselben hervorgehen.

Wie schon oben bemerkt, ist bei gegebenem s auch R bestimmt und umgekehrt, die Lage des Kreises gegen den Kegelschnitt ergibt sich aus

$$30)\quad \mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{\Delta_1(\cos\vartheta_2 - \cos\vartheta_3) + \Delta_2(\cos\vartheta_3 - \cos\vartheta_1) + \Delta_2(\cos\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\Delta_1(\sin\vartheta_2 - \sin\vartheta_3) + \Delta_2(\sin\vartheta_3 - \sin\vartheta_1) + \Delta_3(\sin\vartheta_1 - \sin\vartheta_2)}.$$

Die Schnittpunkte beider Curven geben dann zugleich mit den 3 gegebenen Amplituden $\vartheta_1\,\vartheta_2\,\vartheta_3$ auch die gesuchte vierte ϑ_4.

Ist eins der Integrale negativ, so wird auch, wie aus der Figur hervorgeht, die entsprechende Amplitude negativ. Wir müssen hier erwähnen, dass die Ableitung nur für 3 von einander verschiedene Werte von ϑ gültig ist. Den Ausnahmefall discutiren wir nachher.

Noch bemerkenswerter, als die eben entwickelte Ableitung ist die nachfolgende, für welche die Construction eines Kegelschnitts nicht erforderlich ist. Um dieselbe zu umgehen, machen wir von einer Relation Gebrauch, die, wie wir früher gezeigt, mit der Gleichung

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^4 - A\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^3 + B\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^2 - C\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta + D = 0$$

verknüpft ist, nämlich

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3+\vartheta_4) = \frac{A-C}{1-B+D}.$$

Indem wir dieselbe auf die Amplitudengleichung anwenden, resultirt mit Rücksicht auf die entsprechende Fig. 15), in welcher wir $\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3$ und ϑ_4 als 2 rechte Winkel nicht überschreitend annehmen und ϑ_4 negativ setzen wollen

$$\tfrac{1}{2}\vartheta_1 + \tfrac{1}{2}\vartheta_2 + \tfrac{1}{2}\vartheta_3 - \tfrac{1}{2}\vartheta_4 = 2\alpha$$

Das hieraus sich ergebende α substituiren wir in 30) und erhalten die schöne Formel

$$31)\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3-\vartheta_4) = -\frac{\Delta_1(\cos\vartheta_2-\cos\vartheta_3)+\Delta_2(\cos\vartheta_3-\cos\vartheta_1)+\Delta_3(\cos\vartheta_1-\cos\vartheta_2)}{\Delta_1(\sin\vartheta_2-\sin\vartheta_3)+\Delta_2(\sin\vartheta_3-\sin\vartheta_1)+\Delta_3(\sin\vartheta_1-\sin\vartheta_2)}$$

welche demnach von geometrischen Rücksichten frei einen rein analytischen Ausdruck darstellt und das Additionstheorem in einfachster Art löst.

Diese Fundamentalformel kann auch in folgender Form geschrieben werden:

$$32)\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3-\vartheta_4) = \frac{\cos\vartheta_1(\Delta_2-\Delta_3)+\cos\vartheta_2(\Delta_3-\Delta_1)+\cos\vartheta_3(\Delta_1-\Delta_2)}{\sin\vartheta_1(\Delta_2-\Delta_3)+\sin\vartheta_2(\Delta_3-\Delta_1)+\sin\vartheta_3(\Delta_1-\Delta_2)}$$

welche auch einer geometrischen Construction zugänglich ist.

Man kann auch speciell $\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta_4$ berechnen, und indem wir $\tfrac{1}{2}\vartheta = \varphi$ einführen, haben wir das Theorem:

Das Additionstheorem der elliptischen Integrale der 1. Art mit 3 Variabelen, dargestellt durch

$$F(\varphi_1)+F(\varphi_2)+F(\varphi_3)=F(\varphi_4)$$

findet hinsichtlich der gesuchten 4. Amplitude φ_4 seine Lösung durch die Formel

$$\begin{aligned}&\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3-\varphi_4)\\&=\frac{\cos 2\varphi_1(\Delta_2-\Delta_3)+\cos 2\varphi_2(\Delta_3-\Delta_1)+\cos 2\varphi_3(\Delta_1-\Delta_2)}{\sin 2\varphi_1(\Delta_2-\Delta_3)+\sin 2\,\varphi^2(\Delta_3-\Delta_1)+\sin 2\varphi_3(\Delta_1-\Delta_2)}\end{aligned}$$

oder auch durch

34) $$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi_4=\frac{\Delta_1\sin(\varphi_2-\varphi_3)\sin\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3)+\Delta_2\sin(\varphi_3-\varphi_1)\sin\frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_3-\varphi_1)+\Delta_3\sin(\varphi_1-\varphi_2)\sin\frac{1}{2}(\varphi_3-\varphi_1-\varphi_2)}{\Delta_1\sin(\varphi_2-\varphi_3)\cos\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3)+\Delta_2\sin(\varphi_3-\varphi_1)\cos\frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_3-\varphi_1)+\Delta_3\sin(\varphi_1-\varphi_2)\cos\frac{1}{2}(\varphi_3-\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Das Additionstheorem für 2 Variabeln

$$F(\varphi_1)+F(\varphi_2)=F(\varphi_3)$$

würde demnach durch folgende Relation

35) $$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3)=\frac{\sin\varphi_1{}^2(1-\Delta_2)-\sin\varphi_2{}^2(1-\Delta_1)}{\sin\varphi_1\cos\varphi_1(1-\Delta_2)-\sin\varphi_2\cos\varphi_2(1-\Delta_1)}$$

die sich aus den obigen Formeln ohne Mühe ableiten lässt, seine Lösung erhalten.

§ 35.

Die oben mitgeteilten Relationen setzen voraus, dass die Amplituden von einander verschieden sind. Ist dies nicht der Fall, sind also 2 derselben einander gleich, so müssen die Formeln einer Transformation unterworfen werden, die auf weitere Eigenschaften der Kegelschnitte gegründet ist. Sind nämlich 2 Amplituden gleich, so bedeutet dies geometrisch das Zusammenfallen zweier Schnittpunkte des Kreises und Kegelschnitts in einen Berührungpunkt beider. Der Kreis wird zum Berührungskeis und die vorhin gegebenen Ableitungen werden aus dem Grunde unbestimmt, weil bei bekanntem Brennpunkt zwei Punkte des Kegelschnitts zur Construction desselben nicht hinreichen. Dennoch ist die Aufgabe, das Additionstheorem in der Form

36) $$F(\varphi_1)+2F(\varphi_2)=F(\varphi_4)$$

geometrisch darzustellen, lösbar, wenn wir beachten, dass der Kreisradius im Berührungspunkt Normale des Kegelschnitts wird, und wir die geometrischen Verhältnisse betrachten, die daraus hervorgehen.

Bezeichnen wir den Winkel, den diese Normale mit der X-Achse einschliesst, durch Θ, und den Winkel, den sie mit dem zugehörigen Brennstrahl $r_2 = r_3$ bildet, durch γ_2, so ist leicht nachzuweisen, dass

$$\sin\gamma_2 = e\sin\Theta \text{ ist.}$$

Die jetzt zu Grunde liegenden Gleichungen sind demnach

$$\frac{p}{r_1} = 1 - e\cos(a - \tau_1),$$

$$\frac{p}{r_2} = 1 - e\cos(\alpha - \tau_2),$$

$$\sin\gamma_2 = e\sin(\vartheta_2 - \alpha)$$

Aus ihnen resultiren

$$\frac{r_1 - p}{r_1\sin\gamma_2} = \frac{\cos\tau_1 + \operatorname{tg}\alpha\sin\tau_1}{\sin\vartheta_2 - \cos\vartheta_2\operatorname{tg}\alpha}$$

$$\frac{r_2 - p}{r_2\sin\gamma_2} = \frac{\cos\tau_2 + \operatorname{tg}\alpha\sin\tau_2}{\sin\vartheta_2 - \cos\vartheta_2\operatorname{tg}\alpha}$$

Hieraus lässt sich $\operatorname{tg}\alpha$ auf doppelte Art ausdrücken

$$= \frac{\frac{r_1 - p}{r_1\sin\gamma_2}\sin\vartheta_2 - \cos\tau_1}{\frac{r_1 - p}{r_1\sin\gamma_2}\cos\vartheta_2 + \sin\tau_1} = \frac{\frac{r_2 - p}{r_2\sin\gamma_2}\sin\vartheta_2 - \cos\tau_2}{\frac{r_2 - p}{r_2\sin\gamma_2}\cos\vartheta_2 + \sin\tau_2}$$

weshalb auch

$$p = \frac{\sin\gamma_2\sin(\tau_1 - \tau_2) + \cos(\vartheta_2 - \tau_2) - \cos(\vartheta_2 - \tau_1)}{\cos\frac{(\vartheta_2 - \tau_2)}{r_1} - \cos\frac{(\vartheta_2 - \tau_1)}{r_2}}$$

bekannt ist.

Wir führen ein

$$\gamma_2 = \vartheta_2 - \tau_2$$

$$\gamma_1 = \vartheta_2 - \tau_1$$

dann ist

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(r_1 - p)\sin\vartheta_2 - r_1\sin\gamma_2\cos\tau_1}{(r_1 - p)\cos\vartheta_2 - r_1\sin\gamma_2\sin\tau_1}$$

und bei Einführung von p

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\vartheta_2\left(\frac{\cos\gamma_2}{\cos\gamma_1}\cos(\gamma_1-\gamma_2)-\frac{r_1}{r_2}\right)-\cos\tau_1\sin\gamma_2\left(\frac{\cos\gamma_2}{\cos\gamma_1}-\frac{r_1}{r_2}\right)}{\cos\vartheta_2\left(\frac{\cos\gamma_2}{\cos\gamma_1}\cos(\gamma_1-\gamma_2)-\frac{r_1}{r_2}\right)+\sin\tau_1\sin\gamma_2\left(\frac{\cos\gamma_2}{\cos\gamma_1}-\frac{r_1}{r_2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\vartheta_2\cos(\gamma_1-\gamma_2)-\cos\tau_1\sin\gamma_2-\frac{r_1\cos\gamma_1}{r_2\cos\gamma_2}(\sin\vartheta_2-\cos\tau_1\sin\gamma_2)}{\cos\vartheta_2\cos(\gamma_1-\gamma_2)+\sin\tau_1\sin\gamma_2-\frac{r_1\cos\gamma_1}{r_2\cos\gamma_2}(\cos\vartheta_2+\sin\tau_1\sin\gamma_2)}$$

d. i.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\tau_2(\cos\tau_2+\sin\tau_2\operatorname{tg}\vartheta_2)-\frac{\Delta_1}{\Delta_2}(\operatorname{tg}\vartheta_2(1-\cos\tau_1\cos\tau_2)+\cos\tau_1\sin\tau_2)}{\cos\tau_2(\cos\tau_2+\sin\tau_2\operatorname{tg}\vartheta_2)-\frac{\Delta_1}{\Delta_2}(\operatorname{tg}\vartheta_2\sin\tau_1\cos\tau_2+1-\sin\tau_1\sin\tau_2)}$$

Wir bemerken nun, dass die Formen

$$\sin\tau = \frac{\sin\vartheta}{2\Delta}(1-k'), \qquad \cos\tau = \frac{\cos\frac{1}{2}\vartheta_2+k'\sin\frac{1}{2}\vartheta_2}{\Delta}$$

noch einzuführen sind, daher folgt aus der letzten Formel

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos\frac{1}{2}\vartheta_1{}^2+\cos\frac{1}{2}\vartheta_2{}^2+k'^2(\sin\frac{1}{2}\vartheta_1{}^2+\sin\frac{1}{2}\vartheta_2{}^2)-2\Delta_1\Delta_2}{-\frac{1}{2}k^2\sin\vartheta_1+\frac{2\Delta_2}{\sin\vartheta_2}(\cos\frac{1}{2}\vartheta_2{}^4-k'^2\sin\frac{1}{2}\vartheta_2{}^4)-\frac{2\Delta_1\Delta_2}{\operatorname{tg}\vartheta_2}}$$

Der Zähler dieses Bruches lässt sich noch sehr vereinfachen, und indem wir auch hier die bekannte Relation

$$\tfrac{1}{2}\vartheta_1+\vartheta_3-\tfrac{1}{2}\vartheta_4 = 2\alpha$$

einführen, erhalten wir

37) $\operatorname{tg}\frac{1}{4}(\vartheta_1+2\vartheta_2-\vartheta_4) =$

$$\frac{2\sin\vartheta_2(\Delta_1-\Delta_2)^2}{4\Delta_2(\cos\frac{1}{2}\vartheta_2{}^2-\Delta_2{}^2\sin\frac{1}{2}\vartheta_2{}^2)-4\Delta_1\Delta_2\cos\vartheta_2-k^2\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2}$$

und diese Formel bestimmt die Amplitude ϑ_4 der Function

$$\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta_1}{\sqrt{1-k^2\sin\frac{1}{2}\vartheta_1{}^2}}+2\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta_2}{\sqrt{1-k^2\sin\frac{1}{2}\vartheta_2{}^2}}=\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta_4}{\sqrt{1-k^2\sin\frac{1}{2}\vartheta_4{}^2}}$$

Indem wir das Resultat in etwas anderer Form darstellen, gestaltet sich das Theorem wie folgt: Die Lösung der Additionsaufgabe der elliptischen Integrale

$$F(\varphi)+2F(\varphi_2) = F(\varphi_3)$$

beruht auf

38) $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi_1+2\varphi_2-\varphi_3)=$

$$\frac{\sin\varphi_2\cos\varphi_2(\Delta_1-\Delta_2)^2}{\Delta_2(\cos 2\varphi_2+k^2\sin\varphi_2^2)-\Delta_1\Delta_2\cos 2\varphi_2-k^2\sin\varphi_1\cos\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_2}$$

worin φ_1 und φ_2 von einander verschieden sein müssen.

Ist endlich noch $\varphi_1=0$ und demnach

$$2F(\varphi_2)=F(\varphi_3)$$

so ergibt sich die Amplitude φ_3 aus

39) $$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(2\varphi_2-\varphi_3)=\frac{1-\Delta_2}{1+\Delta_2}\cdot\frac{\cot\varphi_2}{\Delta_2}.$$

Aus diesen Entwickelungen geht hervor, dass die elliptischen Integralfunctionen in Verbindung mit der Theorie der Kegelschnitte erfolgreich auf die Additionstheoreme angewandt werden können, und dass, wenn analytische Entwickelungen ihren Weg durch geometrische Gebiete nehmen, ungleich mehr Ausbeute zu erwarten ist, als wenn jedes Gebiet gesondert für sich allein durchforscht wird.

§ 36.

Auch die Integralfunction

40) $$\int\frac{d\tau_1}{\sqrt{1-\frac{R^2}{s^2}\sin\tau_1^2}}+\int\frac{d\tau_2}{\sqrt{1-\frac{R^2}{s^2}\sin\tau_2^2}}+\int\frac{d\tau_3}{\sqrt{1-\frac{R^2}{s^2}\sin\tau_3^2}}=\int\frac{d\tau_4}{\sqrt{1-\frac{R^2}{s^2}\sin\tau_4^2}}$$

verdient einige Beachtung, da sie wie die vorhergehende zu analogen, wenn auch nicht so einfachen Resultaten führt.

Es ist zunächst

$$r=p+er\cos(\alpha-\tau),$$

also

$$p+\beta x_1+\gamma y_1=r_1$$
$$p+\beta x_2+\gamma y_2=r_2$$
$$p+\beta x_3+\gamma y_3=r_3.$$

$$\beta=e\cos\alpha,\quad \gamma=e\sin\alpha,$$
$$s^2=R^2+r^2-2Rr\cos\tau,$$

also

$$\frac{r}{s} = \frac{R}{s} \cos\tau + \sqrt{1 - \frac{R^2}{s^2} \sin\tau^2}.$$

Der Modulus werde durch $q = \frac{R}{s}$ bezeichnet.

Wie früher findet man aus den obigen Gleichungen die Unbekannten

$$\frac{p}{s} = -\frac{4 \sin\frac{1}{2}(\tau_1 - \tau_2) \sin\frac{1}{2}(\tau_2 - \tau_3) \sin\frac{1}{2}(\tau_3 - \tau_1)}{\frac{\sin(\tau_2 - \tau_3)}{q\cos\tau_1 + \varDelta_1} + \frac{\sin(\tau_3 - \tau_1)}{q_2\cos\tau_2 + \varDelta_2} + \frac{\sin(\tau_1 - \tau_2)}{q_2\cos\tau_3 + \varDelta_3}}$$

41) $$e \sin\alpha = \frac{1}{2} \frac{\Sigma\left(\frac{\cos\tau_2}{q_2\cos\tau_3 - \varDelta_3} - \frac{\cos\tau_3}{p\cos\tau_2 + \varDelta_2}\right)}{\Sigma \frac{\sin(\tau_2 - \tau_3)}{q\cos\tau_1 + \varDelta_1}}$$

$$e \cos\alpha = \frac{1}{2} \frac{\Sigma\left(\frac{\sin\tau_2}{p\cos\tau_3 + \varDelta_3} - \frac{\sin\tau_3}{q\cos\tau_2 + \varDelta_2}\right)}{\Sigma \frac{\sin(\tau_2 - \tau_3)}{q\cos\tau_1 + \varDelta_1}}$$

Hieraus kann e berechnet werden. Da hierdurch der Kegelschnitt in seinem Achsenverhältniss $\frac{b}{a}$ bekannt ist, so ist auch p als Brennpunktsordinate und demnach auch s und R bekannt. Der Winkel α, der die Lage des Kreises gegen die Achse bestimmt, folgt aus der Division der letzten Formeln.

Er kann aber auch auf anderm Wege dargestellt werden, wenn wir die bekannte Formel für die Winkel der Amplitudensumme einführen.

Das Endresultat würde sein:

42) $$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - \tau_4) = \frac{q'^2 \sin 2\alpha - 2\frac{p}{s}\,\frac{q}{c}\sin\alpha}{q'^2 \cos 2\alpha - 2\frac{p}{s}\,\frac{q}{c}\cos\alpha}$$

Da aber e, $\frac{p}{s}$, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ gegeben sind, so ergibt sich damit auch die gesuchte Amplitude τ_4 und das Additionstheorem

$$F(\tau_1) + F(\tau_2) + F(\tau_3) = F(\tau_4)$$

findet damit seine Lösung, welche wir wenigstens noch erwähnen wollten.

§ 37.

Die hyperelliptischen Integralfunctionen.

Wir haben in § 1. aus der Gleichung

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = \Delta$$

und ihrer Ableitung

$$\frac{d\Delta}{dx} = 4x^3 - 3ax^2 + 2bx - c$$

7 Functionen abgeleitet, deren erste

$$\frac{1}{\frac{d\Delta}{dx_1}} + \frac{1}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_2}} + \frac{1}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_3}} + \frac{1}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_4}} = 0$$

war. Damit sind diese Functionen noch nicht erschöpft; von denjenigen, die noch erwähnt zu werden verdienen, führen wir an

$$\frac{1}{(x_1^2+n)\frac{\partial\Delta}{\partial x_1}} + \frac{1}{(x_2^2+n)\frac{\partial\Delta}{\partial x_2}} + \frac{1}{(x_3^2+n)\frac{\partial\Delta}{\partial x_3}} + \frac{1}{(x_4^2+n)\frac{\partial\Delta}{\partial x_4}}$$
$$= \frac{an-c}{(x_1^2+n)(x_2^2+n)(x_3^2+n)(x_4^2+n)}$$

$$\frac{x_1}{(x_1^2+n)\frac{\partial\Delta}{\partial x_1}} + \frac{x_2}{(x_2^2+n)\frac{\partial\Delta}{\partial x_2}} + \frac{x_3}{(x_3^2+n)\frac{\partial\Delta}{\partial x_3}} + \frac{x_4}{(x_4^2+n)\frac{\partial\Delta}{\partial x_4}}$$
$$= \frac{n^2+bn-d}{(x_1^2+n)(x_2^2+n)(x_3^2+n)(x_4^2+n)}$$

$$\frac{1}{(x_1+n)\frac{\partial\Delta}{\partial x_1}} + \frac{1}{(x_2+n)\frac{\partial\Delta}{\partial x_2}} + \frac{1}{(x_3+n)\frac{\partial\Delta}{\partial x_3}} + \frac{1}{(x_4+n)\frac{\partial\Delta}{\partial x_4}}$$
$$= \frac{1}{(x_1+n)(x_2+n)(x_3+n)(x_4+n)}$$

u. a. m.

Aus der ersten erhalten wir noch

$$\frac{1}{\left(x_1^2+\frac{c}{a}\right)\frac{\partial\Delta}{\partial x_1}} + \frac{1}{\left(x_2^2+\frac{c}{a}\right)\frac{\partial\Delta}{\partial x_2}} + \frac{1}{\left(x_3^2+\frac{c}{a}\right)\frac{\partial\Delta}{\partial x_3}} + \frac{1}{\left(x_4^2+\frac{c}{a}\right)\frac{\partial\Delta}{\partial x_4}} = 0$$

Vermittelst der in § 1. ausgeführten Transformation ergeben

sich daraus neue Functionen, die als Ergänzung der frühern angesehen werden können, und welche auf hyperelliptische Integrale führen.

Bei der Aufstellung der Integralfunctionen der Kegelschnitte fanden wir das Differential

$$\Sigma \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)\left(x^2+\frac{a^2}{c^2}\left(b^2-(R+s)^2\right)\right)\left(y^2+\frac{a^2}{c^2}\left(b^2-(R-s)^2\right)\right)}} = C,$$

worin $x_1 x_2 x_3 x_4$ die Abscissen der Ellipse bezeichnen, welche den Schnittpunkten von Kreis und Ellipse zukommen. Der Radius des Kreises ist s, und die Entfernung seines Mittelpunktes vom Ellipsencentrum R. Die Function ist unabhängig von dem Winkel α, welchen R mit der X-Achse einschliesst.

Es ist nun vor allem notwendig, zuerst die Vorzeichen der Integrale zu bestimmen, und zweitens die Constante aus den Bedingungen der Aufgabe zu entwickeln. Denn eine Untersuchung zeigt, dass die Vorzeichen mehrerer Integralfunctionen nicht immer mit denjenigen ihrer durch eine Amplitudengleichung verknüpften Wurzeln übereinstimmen.

Die Vorzeichen lassen sich nun am bequemsten finden, wenn durch bestimmte Voraussetzungen über die Constanten R und s die Integrale auf wo möglich einfachste Formen gebracht werden. Wir setzen also voraus, dass

$$R = \frac{a-b}{2}. \qquad s = \frac{a+b}{2}$$

und die obige Function wird durch Einsetzen dieser Substitutionen integrabel

$$\Sigma \int \frac{dx}{x(a^2-x^2)} = C.$$

Nach genauerer Untersuchung des hieraus folgenden logarithmischen Integrals findet sich durch geometrischen Nachweis, dass das Integral in

$$\log \operatorname{tg}\varphi_1 + \log \operatorname{tg}\varphi_2 + \log \operatorname{tg}\varphi_3 - \log \operatorname{tg}\varphi_4 = \log \frac{b^2}{a^2+2ab}$$

oder auch in

$$\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 \operatorname{tg}\varphi_3 = \frac{b^2}{a^2+2ab} \operatorname{tg}\varphi_4$$

worin φ der excentrische Winkel ist. hervorgehend aus

$$x = a \sin\varphi.$$

Die Constante des Integrals ergab sich durch eine Grenzlage des Kreises, vermöge welcher 2 Wurzeln verschwinden. Die Indices bezeichnen zugleich die entsprechenden Quadranten, wobei wir annehmen, dass in jedem ein Schnittpunkt erhalten sei.

Multipliciren wir das letzte Integral mit der geraden Function a^2-x^2, so bleiben die Vorzeichen des neuen

$$\Sigma\int\frac{dx}{x}$$

wie früher, und man findet nach Feststellung der Constanten

$$x_1 x_2 x_3 = \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2} x_4$$

wobei wir bemerken wollen, dass $x_4 = a\cos\alpha$, also $\alpha+\varphi_4 = 90^0$ ist.

Multipliciren wir das Integral dagegen mit der ungeraden Function x^3, so verändern sich auch die Vorzeichen und man findet durch eine geometrische Untersuchung

$$-x_1+x_2+x_3+x_4 = \frac{2ab}{a+b}\cos\alpha.$$

Die Vorzeichen der hyperelliptischen Integrale sind damit festgesetzt, bei den verschiedenen Lagen des Kreises zur Curve muss nur bemerkt werden, wenn ein Schnittpunkt beider aus dem einen Quadrant in einen andern tritt. Bei dieser Aenderung wechseln auch die Vorzeichen.

Um die Integrale auf die Normalform zu bringen, führen wir den oben genannten excentrischen Winkel ein, und man findet

$$\int\frac{d\varphi_1}{\sqrt{\left(1-\frac{c^2}{(R+s)^2-b^2}\sin\varphi_1^{\,2}\right)\left(1+\frac{c^2}{b^2-(R-s)^2}\sin\varphi_1^{\,2}\right)}}$$
$$+\int\frac{d\varphi_2}{\sqrt{\left(1-\frac{c^2}{(R+s)^2-b^2}\sin\varphi_2^{\,2}\right)\left(1+\frac{c^2}{b^2-(R-s)^2}\sin\varphi_2^{\,2}\right)}}$$
$$+\int\frac{d\varphi_3}{\sqrt{\left(1-\frac{c^2}{(R+s)^2-b^2}\sin\varphi_3^{\,2}\right)\left(1+\frac{c^2}{b^2-(R-s)^2}\sin\varphi_3^{\,2}\right)}}$$
$$-\int\frac{d\varphi_4}{\sqrt{\left(1-\frac{c^2}{(R+s)^2-b^2}\sin\varphi_4^{\,2}\right)\left(1+\frac{c^2}{b^2-(R-s)^2}\sin\varphi_4^{\,2}\right)}} = C$$

Die Amplituden sind durch die Relation

$$\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4 = 0$$

mit einander verknüpft. Eine zweite folgt aus § 16., f. 194.

Soll der Winkel φ nicht von der b-Achse an, sondern von der grossen Achse an gezählt werden, führen wir also ein $\psi = 90^0 - \varphi$. so würden sich die Formeln in folgende verwandeln, wenn wir noch die folgenden Bezeichnungen der Moduli

$$k^2 = \frac{c^2}{a^2 - (R-s)^2}, \quad l^2 = \frac{c^2}{(R+s)^2 - a^2}$$

einführen:

$$\int \frac{d\psi_1}{\sqrt{(1 - k^2 \sin \psi_1{}^2)(1 + l^2 \sin \psi_1{}^2)}} + \int \frac{d\psi_2}{\sqrt{(1 - k^2 \sin \psi^2)(1 + l^2 \sin \psi_2{}^2)}}$$
$$+ \int \frac{d\psi_3}{\sqrt{(1 - k^2 \sin \psi_3{}^2)(1 + l^2 \sin \psi_3{}^2)}} - \int \frac{d\psi_4}{\sqrt{(1 - k^2 \sin \psi_4{}^2)(1 + l^2 \sin \varphi_4{}^2)}} = C$$

woraus noch für $k = l$ die hyperelliptische Integralfunction

$$\int \frac{d\psi_1}{\sqrt{1 - u^2 \sin \psi_1{}^4}} + \int \frac{d\psi_2}{\sqrt{1 - u^2 \sin \psi_2{}^4}} + \int \frac{d\psi_3}{\sqrt{1 - u^2 \sin \psi_3{}^4}}$$
$$- \int \frac{dx_4}{\sqrt{1 - u^2 \sin \psi_4{}^4}} = C$$

$$u = \frac{c^2}{2Rs}$$

hervorgeht. Als Bedingung gilt

$$R^2 + s^2 = a^2.$$

Ebenso gehen aus den Grundgleichungen hyperelliptische Integrale der 2. Art hervor, z. B.

$$\Sigma \int \sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{(R+s)^2 - l^2} \sin \varphi^2\right)\left(1 + \frac{c^2}{b^2 - (R-s)^2} \sin \varphi_2\right)} = C'$$

und analoge andere.

Die bisher betrachteten Integrale bezogen sich auf die Ellipse. Für die Hyperbel muss zunächst das im Integral vor dem Wurzelzeichen stehende b als b^2 in die Wurzel genommen und alsdann wie die übrigen mit negativen Zeichen versehen werden. Alsdann kann man

$$x = \frac{a}{\cos\varphi}$$

einführen, und man erhält das elliptische Integral

$$\Sigma\int\frac{d\sin\varphi}{\sqrt{\left(\frac{(R+s)^2-a^2}{(R+s)^2+b^2}-\sin\varphi^2\right)\left(\frac{a^2-(R-s)^2}{(R-s)^2+b^2}+\sin\varphi^2\right)}}=C$$

Substituiren wir hierin

$$\sin\varphi=\sqrt{\frac{(R+s)^2-a^2}{(R+s)^2+b^2}}\cdot\sin\Theta$$

$$k^2=\frac{((R+s)^2-a^2).((R-s)^2+b^2)}{4c^2Rs}$$

so folgt

$$\Sigma\int\frac{d\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin\Theta^2}}=C$$

Dagegen führt die Multiplication beider Ietegrale mit x auf ein hyperelliptisches

$$\int\frac{d\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin\Theta^2)(1-l^2\sin\Theta^2)}}=C,\quad l^2=\frac{(R+s)^2-a^2}{(R+s)^2+b^2}$$

Die Constanten dieser allgemeinen Integrale sind auf dieselbe Art zu bestimmen, wie es vorhin bei den speciellen geschehen ist. Dabei kann das Kreiscentrum entweder in die X- oder in die Y-Achse verlegt werden, es verschwinden alsdann 2 Integrale für jede dieser Lagen, und die Constante setzt sich aus 2 gleichen Integralen zusammen, deren obere Grenze aus der auf eine quadratische Gleichung reducirten Amplitudengleichung bestimmt werden kann. Da die Ableitung derselben weiter keine Schwierigkeiten macht, wollen wir zu denjenigen Integralfunctionen übergehen, die wir früher schon eingehender discutirt haben, und welche von Determinationen frei sind.

Als Grundlage dient auch hier wieder die Function

$$\Sigma\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2+\frac{a^2}{c^2}(b^2-(R+s)^2))(x^2+\frac{a^2}{c^2}(b^2-(R-s)^2))}}=C$$

Vermittelst der Ellipsengleichung $\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ setzen wir anstatt x^2-a^2 den entsprchenden Wert $-\frac{a^2}{b^2}y^2$ ein und beachten

$$b^2x\,dx+a^2y\,dy=0.$$

Daher wird das Integral

$$\Sigma \int \frac{dx}{y\sqrt{\left(x^2+\frac{a^2}{c^2}(b^2-(R-s)^2)\right)\left(\frac{a^2}{c^2}(R+s)^2-b^2)-x^2\right)}}$$

Die weitere Transformation geschieht mit Hülfe der Winkel ϑ, welche die Kreisradien s nach den Schnittpunkten von Kreis und Ellipse mit der Centrale R einschliessen. (S. Fig. 8.).

Aus der Formel

$$x^2+y^2 = R^2+s^2-2Rs\cos\vartheta$$

folgt vermittelst der Ellipsengleichung

$$x^2 = \frac{a^2}{c^2}((R-s)^2-b^2+4Rs\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2{}^2)$$

$$y^2 = \frac{b^2}{c^2}(a^2-(R-s)^2-4Rs\sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2)$$

und

$$x\,dx = Rs\,\frac{a^2}{c^2}\sin\vartheta\,d\vartheta$$

Im letzten Integral multipliciren wir Zähler und Nenner mit x, führen alsdann die als Functionen von ϑ dargestellten Werte von x^2 und $x\,dx$ in dasselbe ein und erhalten die einfache Beziehung

$$\Sigma\int\frac{d\vartheta}{xy} = C$$

Werden hierin die Werte von x und y eingesetzt, so erhält man die gesuchte hyperelliptische Integralfunction

$$\Sigma\int\frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta^2}{\sqrt{\left(1-\frac{4Rs}{a^2-(R-s)^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2\right)\left(1+\frac{4Rs}{(R-s)^2-b^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2\right)}} = C.$$

Um die Vorzeichen der 4 Integrale zu bestimmen, setzen wir

$$a = s+R$$
$$b = s-R$$

wodurch das Integral

$$\Sigma\int\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} \quad \text{in}\ \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta_1\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta_3\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta_4 = \frac{b^2}{a^2}\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta_2$$

übergeht Aus der Formel für x folgt nämlich

$$x = a\sin\tfrac{1}{2}\vartheta.$$

Wir fanden aber oben

$$x_4 = a\cos\alpha = a\sin\varphi_4$$

woraus

$$\tfrac{1}{2}\vartheta = \varphi_4 = 90^0 - \alpha$$

oder

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta = \cot\alpha$$

folgt.

Die Amplitudengleichung

$$\begin{aligned}&((R+s)^2(a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2)-a^2b^2)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^4-2c^2s(R+s)\sin2\alpha\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^3\\&+(2(a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2)(R^2-s^2)+4s^2(a^2\cos\alpha^2+b^2\sin\alpha^2)-2a^2b^2)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^2\\&-2c^2s(R-s)\sin2\alpha\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta+(R-s)^2(a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2)-a^2b^2=0\end{aligned}$$

hat demnach für

$$R = \frac{a-b}{2}, \qquad s = \frac{a+b}{2}$$

die Wurzel $\cot\alpha$, was sich durch eine Probe bestätigt. Die Zeichen bleiben also wie früher, und indem wir im Anschluss an die Figur 3 positive Wurzeln $\vartheta_1\,\vartheta_2\,\vartheta_3$ und eine negative ϑ_4 annehmen, und noch die Integrale kurz durch H bezeichnen, erhalten wir

$$H_1 - H_2 + H_3 + H_4 = C.$$

Um die Constante zu finden, drehen wir den Kreis in die Lage, in welcher sein Centrum in die X-Achse fällt. 2 Integrale verschwinden, und C setzt sich aus zwei andern zusammen, deren obere Grenze aus der Amplitudengleichung für $\alpha = 0$ gefunden wird. Die Gleichung ist

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^4((R+s)^2-a^2)-2\left(a^2-R^2+s^2-2\frac{a^2}{c^2}s^2\right)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^2+(R-s)^2-a^2=0$$

und

$$C = 2H(\vartheta).$$

Man kann diesen Relationen noch eine interessante Seite abgewinnen, wenn wir die Art und Weise nochmals in Betracht ziehen, welche zur Berechnung des Modulus k^2 aus der Amplitudengleichung

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^4 - A\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^3 + B\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^2 - C\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta + D = 0$$

führte. § 21.

Derselbe wurde dort durch

$$k'^2 = \frac{A^2 + 2(1 - B + D \pm \sqrt{(A - C)^2 + (1 - B + D)^2})}{C^2 + 2D(1 - B + D \pm \sqrt{(A - C)^2 + (1 - B + D)^2})}$$

dargestellt. Die daraus hervorgehenden 2 Werte stehen nun mit den beiden Moduli der hyperelliptischen Function

$$\Sigma \int \frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{\left(1 - \frac{4Rs}{a^2 - (R - s)^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2\right)\left(1 + \frac{4Rs}{(R - s)^2 - b^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2\right)}} = C$$

in einfacher Beziehung. Bezeichnen wir sie durch

$$k'^2 = \frac{A^2 + 2(1 - B + D - \sqrt{(A - C)^2 + (1 - B + D)^2})}{C^2 + 2D(1 - B + D - \sqrt{(A - C)^2 + (1 - B + D)^2})}$$

$$l'^2 = \frac{A^2 + 2(1 - B + D + \sqrt{(A - C)^2 + (1 - B + D)^2})}{C^2 + 2D(1 - B + D + \sqrt{(A - C)^2 + (1 - B + D)^2})}$$

so findet man

$$k^2 = \frac{4Rs}{a^2 - (R - s)^2}$$

$$l^2 = \frac{(R + s)^2 - b^2}{(R - s)^2 - b^2}$$

$$l'^2 - 1 = \frac{4Rs}{(R - s)^2 - b^2} = -l^2$$

Daher geht die hyperelliptische Function über in

$$\Sigma \int \frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{(1 - k^2 \sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2)(1 - l^2 \sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2)}} = 2H(\tfrac{1}{2}\vartheta)$$

worin der Figur gemäss $-l^2$ positiv ist.

Es bedarf noch der Angabe der Amplitude $\frac{1}{2}\vartheta$ der Constanten $2H(\frac{1}{2}\vartheta)$. In der eben abgeleiteten Gleichung derselben müssen noch die sich auf die Ellipse beziehenden $a\,b\,R\,s$ durch die Constanten $A\,B\,C\,D$ der trigonometrischen Gleichung ausgedrückt werden, was mit Hülfe der Formeln in § 21. geschehen kann. Man findet nach einigen Rechnungen

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^4 + \frac{1}{k'^2}\left(1 + k'^2 - \frac{(A - C)^2 + (1 - B + D + \sqrt{(A - C)^2 + (1 - B + D)^2})^2}{C^2 + 2D(1 - B + D + \sqrt{(A - C)^2 + (1 - B + D)^2}}\right)^2.$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^2 + \frac{1}{k'^2} = 0$$

womit das Theorem seine definitive Lösung erhalten hat.

Setzt man für die Ellipse

$$(R-s)^2 = \tfrac{1}{2}(a^2+b^2),$$

so wird die Function zu

$$\Sigma \int \frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{1-\left(\frac{8Rs}{c^2}\right)^2 \sin\tfrac{1}{2}\vartheta^4}} = C.$$

Die Fundamentalformeln für die Hyperbel führen zu analogen Functionen.

Aus den Entwickelungen geht hervor, dass mit jeder biquadratischen Gleichung eine hyperelliptische Integralfunction verbunden ist, deren Wurzeln die Amplituden bestimmen, während die Moduli aus den Constanten der Gleichung hervorgehen. Die Constante der Function ist wieder ein Integral, dessen obere Grenze vermittelst der letzten quadratischen Gleichung bekannt ist, und es erübrigt nur noch, die aufgestellten allgemeinen Theoreme wie früher die speciellen auf bestimmte Beispiele anzuwenden.

Wir wollen noch zum Schluss den bisher entwickelten Functionen eine Bemerkung beifügen', welche sich auf eine Transformation des Integrals

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin\varphi^2)(1-l^2\sin\varphi^2)}}$$

bezieht. Die Einführung von $\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi = \frac{1}{k'}$ bewirkt, dass dasselbe in ein elliptisches Integral erster Art übergeht, nämlich in

$$\int \frac{d\psi}{\sqrt{k'^2-(l^2-k^2)\cos\psi^2}} = C \int \frac{d\psi}{\sqrt{1-\frac{k^2-l^2}{1-l^2}\sin\psi^2}}$$

Für die Integralfunctionen von Kegelschnitten und Kreisen, welche wir durch

$$\Sigma \int \frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{\left(1-\frac{4Rs}{a^2-(R-s)^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2\right)\left(1+\frac{4Rs}{(R-s)^2-b^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2\right)}}$$

dargestellt haben, ist demnach die Relation

$$\sqrt{\frac{a^2-(R+s)^2}{a^2-(R-s)^2}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta = \cot\psi$$

zu benutzen, da

$$k^2 = \frac{4Rs}{a^2 - (R-s)^2}, \qquad -l^2 = \frac{4Rs}{(R-s)^2 - b^2} \text{ ist.}$$

Das Endresultat der durchgeführten Rechnungen ist

$$\Sigma \int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{4Rs}{a^2 - (R-s)^2} \frac{c^2}{(R+s)^2 - b^2} \sin\varphi^2}}$$

welches noch einer Untersuchung wert erscheint. Wir werden davon in der Theorie der Lemniskaten Gebrauch machen.

X.

Ueber die Curven vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten.

Von

P. H. Schoute.

Dritter Abschnitt.

(Der Weyr'sche Satz und seine dualistische Umkehrung.)

32. „Der Büschel der Kegelschnitte durch die unendlich fernen Endpunkte A und B der Achsen eines gegebenen Mittelpunktskegelschnittes K (Fig. 32), den Mittelpunkt C dieser Curve und einen beliebig auf ihr gewählten festen Punkt P_1 enthält vier Kegelschnitte, welche K in irgend einem von P_1 verschiedenen Punkte Q berühren. Die Berührungspunkte Q von K mit diesen vier gleichseitigen Hyperbeln sind die Schnittpunkte von K mit einer gleichseitigen Hyperbel, welche, wenn der Punkt P_2 auf K dem Punkte P_1 diametral gegenüber liegt, als $H(P_2A,\ P_2B;\ C)$ zu bezeichnen ist. Jeden dieser vier berührenden Kegelschnitte schneidet K noch in einem vierten Punkte, den man findet als den zweiten Schnittpunkt von K mit den Tangenten im Berührungspunkte Q des betrachteten Kegelschnittes mit K an $H(P_2A_1 P_2B;\ C)$ angelegt.

Von den vier Berührungskegelschnitten ist immer ein Paar reell und ein Paar imaginär."

Dieser Satz wird der Hauptsache nach bewiesen sein, sobald nur gezeigt ist, dass jeder Schnittpunkt Q von K mit der gleichseitigen Hyperbel $H(P_2A,\ P_2B;\ C)$ der Berührungspunkt ist von K mit einer der gleichseitigen Hyperbeln des Büschels, und dass umgekehrt jeder Berührungspunkt von K mit einer der Curven d–– Büschels auf der gleichseitigen Hyperbel $H(P_2A,\ P_2B;\ C)$ liegt

Wir beweisen, dass die durch den bestimmten Schnittpunkt Q von K mit $H(P_2A, P_2B; C)$ geführte Curve des Büschels den Kegelschnitt K in Q berührt, und suchen dazu die Verbindungslinie der beiden noch unbekannten Schnittpunkte von K mit dieser Curve des Büschels, die durch H_q angedeutet werden mag. Wir tun dieses in der von Joachimsthal angegebenen Weise mittelst des Satzes der aussagt, dass drei Kegelschnitte, welche zwei Punkte gemein haben, einander zu je zweien noch in drei Punktepaaren schneiden, deren Verbindungslinien durch einen Punkt gehen.[1] Betrachten wir dann erst K, H_q und die aus den Geraden CP_1 und QT zusammengesetzte Curve zweiter Ordnung — wobei QT zu CA parallel ist — als die drei Kegelschnitte, welche zwei Punkte, die Punkte P_1 und Q, gemein haben, so finden wir, dass die gesuchte Verbindungslinie den Schnittpunkt V von TP_2 und CA enthalten muss. Und bestrachten wir nachher K, H_q und die Combination der Gerade CP_1 mit der zu BC parallelen Gerade QU als die ebenfalls durch P_1 und Q gehenden Kegelschnitte, so ergiebt sich der Schnittpunkt W von P_2U und CB als ein Punkt der gesuchten Verbindungslinie. Also ist VW die Verbindungslinie der beiden noch unbekannten Schnittpunkte von K und H_q. Aber nach Artikel 3 ist die Gerade VW, wie ihre Con-

---

1) „Ueber die Normalen der Ellipse und des Ellipsoids" (Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik, Band XXVI, Seite 172).

Der hier angewendete Satz wird leicht geometrisch bewiesen, wenn die zwei den drei Kegelschnitten gemeinsamen Punkte imaginär sind. Projicirt man nämlich in diesem Falle die Figur so auf eine andere Ebene, dass diese beiden Punkte in die imaginären Kreispunkte dieser Ebene hineinfallen, so projiciren die drei Kegelschnitte sich als Kreise, und man weiss, dass die drei Potenzlinien von drei zu je zweien genommenen Kreisen durch einen Punkt, den Potenzpunkt, gehen. Und nun steht der Fall, worin die zwei gemeinsamen Punkte reell sind, als a-Satz diesem b-Satz gegenüber (Artikel 24).

Einen anderen geometrischen Beweis des Satzes kann man der Theorie der quadratischen Punktinvolutionen auf den Kegelschnitten entnehmen. Setzt man nämlich als bekannt voraus, dass die Verbindungslinien der Paare einander entsprechender Punkte einer quadratischen Involution auf einem Kegelschnitte durch einen Punkt, das Involutionscentrum, gehen — und es kann dies geometrisch bewiesen werden (Reye, a. a. O., II. Abteilung, Seite 118) — so werden die Verbindungslinien der beweglichen Schnittpunktpaare vom Kegelschnitte K_1 mit den Curven des von K_2 und K_3 bestimmten Büschels durch einen Punkt gehen; d. h. wenn l, $l_{1,2}$, $l_{1,3}$, $l_{2,3}$ die Verbindungslinien der den drei Kegelschnitten gemeinsamen Punkte, der beweglichen Schnittpunkte von K_1 und K_2, von K_1 und K_3 und von K_2 und K_3 andeuten, so liegt der Schnittpunkt von $l_{1,2}$ und $l_{1,3}$ als Involutionscentrum auf dem von und $l_{2,3}$ gebildeten Kegelschnitte des Büschels und, da es im allgemeinen nicht

uf $l_{2,3}$.

struction zeigt, die Tangente in Q an $H(P_2A,\ P_2B;\ C, Q)$. Deshalb geht die Sehne VW durch Q, fällt einer der beiden noch unbekannten Schnittpunkte von K und H_q in Q, und berühren also die Curven K und H_q einander in Q. Und weil die Sehne VW weiter die Tangente von $H(P_2A,\ P_2B;\ C, Q)$ in Q ist, ist der zweite noch zu findende Schnittpunkt von K und H_q also der zweite Schnittpunkt von K mit der Tangente von $H(P_2A,\ P_2B;\ C,\ Q)$ in Q.

Setzen wir umgekehrt voraus, dass K von irgend einer Curve des Büschels in Q berührt wird, so wird ohne Mühe bewiesen, dass Q ein Punkt von $H(P_2A,\ P_2B;\ C)$ ist. Denn die Verbindungslinie VW der beiden Punkte, welche K und die berührende Curve ausser P_1 und Q noch gemein haben, geht dann der Voraussetzung nach durch Q, und hieraus folgt nach der Umkehrung des Satzes von Artikel 3 unmittelbar, dass der Punkt C ein Punkt von $H(P_2A,\ P_2B;\ Q)$, also Q ein Punkt von $H(P_2A,\ P_2B;\ C)$ ist.

Ist K eine Ellipse, so hat der durch C gehende Zweig von $H(P_2A,\ P_2B;\ C)$ immer zwei reelle Punkte, der andere Zweig niemals einen reellen Punkt mit K gemein. Ist K eine Hyperbel, so hat jeder der beiden Zweige von $H(P_2A,\ P_2B;\ C)$ einen reellen Punkt mit K gemein. Es sind von den Berührungskegelschnitten also allemal zwei reell und zwei imaginär.

33. „Der Büschel der Kreise durch den Mittelpunkt C einer gegebenen gleichseitigen Hyperbel H (Fig. 33) und einen beliebig auf ihr gewählten Punkt P_1 enthält vier Curven, welche H in einem von P_1 verschiedenen Punkte Q berühren. Die Berührungspunkte Q von H mit diesen vier Kreisen sind die Schnittpunkte von H mit einem Kreise, der den diametral gegenüber P_1 liegenden Punkt P_2 von H zum Centrum hat und durch C geht. Jeder dieser vier berührenden Kreise schneidet H noch in einem vierten Punkte R, den man findet als den zweiten Schnittpunkt von H mit der Tangente im Berührungspunkte des betrachteten Kreises mit H an den Kreis der vier Berührungspunkte angelegt.

Von den vier berührenden Kreisen ist immer ein Paar reell und ein Paar imaginär.“

Deuten wir zur Abkürzung den aus P_2 als Centrum durch C beschriebenen Kreis mittelst des Symboles $Kr(\bar{P}_2;\ C)$, den durch irgend einen Punkt Z gehenden Kreis des gegebenen Büschels mittelst des Symboles $Kr(Z)$ an, so wird der Satz der Hauptsache nach bewiesen sein, sobald nur gezeigt ist, dass jeder Schnittpunkt Q von H mit dem Kreise $Kr(\bar{P}_2;\ C)$ der Berührungspunkt ist von H mit einem

der Kreise des Büschels, und dass umgekehrt jeder Berührungspunkt von H mit einem Kreise des Büschels auf dem Kreise $Kr(\overline{P_2};\ C)$ liegt.

Ist nun Q ein bestimmter Schnittpunkt von H und $Kr(\overline{P_2};\ C)$ und QN die Tangente von H in Q, so wird nach Artikel 2 der Winkel CQN und nach Artikel 4 der Winkel P_1QP_2 von Parallelen zu den Asymptoten CX, CY von H gehälftet. Es sind also die Winkel P_1QN und CQP_2 einander gleich. Aber in dem gleichschenkeligen Dreiecke QP_2C ist der Winkel CQP_2 dem Winkel QCP_2 gleich, so dass auch die Winkel P_1QN und QCP_2 einander gleich sein müssen. Und nun zeigt die Gleichheit dieser beiden letzteren Winkel offenbar, dass der Kreis $Kr(Q)$ in Q von QN berührt wird, dass dieser Kreis in Q also H berührt.

Ist umgekehrt gegeben, dass H in Q von einem Kreise $Kr(Q)$ des Büschels berührt wird, so beweist man ebenso ohne Mühe, dass Q ein Punkt des Kreises $Kr(\overline{P_2};\ C)$ ist. Ist QN die gemeinschaftliche Tangente von H und $Kr(Q)$ in Q, so hat man einerseits nach den Artikeln 2 und 4 die Gleichheit der Winkel P_1QN und CQP_2, andererseits in $Kr(Q)$ die Gleichheit der Winkel P_1QN und QCP_2; also sind auch die Winkel CQP_2 und QCP_2 einander gleich und ist Q ein Punkt des Kreises $Kr(\overline{P_2};\ C)$.

Ist weiter R der zweite Schnittpunkt von der in Q an den Kreis $Kr(\overline{P_2};\ C)$ angelegten Tangente mit dem berührenden Kreise $Kr(Q)$, so kann man zeigen, dass die Geraden P_1R und P_2R antiparallel sind in Bezug auf die Asymptoten von H, d. h. dass R ein Punkt von H ist. Ist nämlich S der auf dem Kreise $Kr(Q)$ diametral gegenüber Q liegende Punkt, so sind P_1R und CS parallel; denn P_1R ist antiparallel zu QN in Bezug auf die Achsen von H (Artikel 6), QN antiparallel zu QC in Bezug auf die Asymptoten von H (Artikel 2), also P_1R senkrecht auf QC (Artikel 5) und deshalb P_1R parallel zu der Senkrechten CS auf CQ. Ferner ergiebt sich also

$$SR = P_1C = CP_2 = QP_2.$$

Und die gleichen Strecken SR und QP sind parallel, da sie beide antiparallel sind zu P_1P_2 in Bezug auf SC und CQ. Also ist das Viereck QP_2RS ein Parallelogramm und sind auch die Geraden RP_2 und SQ parallel. Also werden die Geraden RP_1 und RP_2 antiparallel sein in Bezug auf die Asymptoten von H, wenn die zu ihnen parallelen Geraden SC und SQ es sind. Und diese sind es, da sie senkrecht stehen auf den Geraden QC und QN, die es sind.

Der Kreis $Kr(\overline{P_2};\ C)$ schneidet den durch P_2 gehenden Zweig der H immer in zwei reellen Punkten, den anderen Zweig niemals in

einem reellen Punkte. Es sind also von den vier berührenden Kreisen allemal zwei reell und zwei imaginär.

34. „Die tangentielle quadratische Transformation, welche die Normalcurve $\bar{K}^4$ erster, resp. zweiter Gattung in ihren Rückkehrschnitt K, resp. H überführt, ist identisch mit jener der Sehnenpaare von K, resp. H, welche auf diesem Kegelschnitte vier Punkte bestimmen, deren Normalen von K, resp. Anti-Normalen von H in Bezug auf irgend eine Gerade CR durch einen Punkt gehen."

Der sich auf die Normalcurven $\bar{K}^4$ erster Gattung beziehende Teil des Satzes ergiebt sich unmittelbar aus einer Vergleichung der aus den zweimal citirten Untersuchungen folgenden Verwandtschaft der Sehnenpaare mit der von mir gefundenen Verwandtschaft der Geraden p und p' (Fig. 21 und Fig. 23).

Zum Beweise des sich auf die Normalcurven $\bar{K}^4$ zweiter Gattung beziehenden Teiles des Satzes liefert der vorhergehende Artikel ein Kettenglied. Aus der Betrachtung der Figur 26 folgt nämlich unmittelbar nur, dass die Schnittpunkte der einander entsprechenden Geraden p und p' mit H auf einem Kreise liegen — denn p und p' sind offenbar antiparallel in Bezug auf die Achsen von H — aber noch nicht, dass der diese Schnittpunkte enthaltende Kreis durch C geht. Und nur wenn auch dieses bewiesen ist, ist nach Artikel 9 den sich auf die Normalcurven $\bar{K}^4$ zweiter Gattung beziehenden Teil des jetzigen Satzes bewährt. Sind nun N_1 und N_2 die Schnittpunkte von p mit H, so beweisen wir umgekehrt, dass die Sehne p_1, welche die beiden übrigen Schnittpunkte von H mit dem durch C, N_1, N_2 gelegten Kreise verbindet und also antiparallel ist zu p in Bezug auf die Achsen von H, d. h. ebenso wie p' senkrecht steht auf CP, mit p' zusammenfällt, indem sie CP in dem Punkte P_0' schneidet, wofür nach Artikel 27 die Relation $CP = 2P_0'C$ besteht. Nennen wir dazu den Schnittpunkt von p_1 mit CP, der mit P_0' zusammenfallen soll, P^0, so bemerken wir, dass parallele Verschiebung von p, welche ebenfalls eine parallele Verschiebung von p_1 herbeiführt, die Punkte P_1 und P^0 eine quadratische Involution auf CP erzeugt, welche C zum Centralpunkt hat. Und nun zeigt der vorhergehende Artikel mittelst eines berührenden Kreises durch C (Fig. 33), dass die Potenz dieser Involution die negativ genommene Grösse $\frac{1}{2}CQ^2$ ist; denn wenn T der Schnittpunkt ist von P_1R mit CQ und U die Projection von P_2 auf CQ, so ist $TC = CU$, da $P_1C = CP_2$, u. s. w. Also ist (Fig. 26)

$$P_0C = \frac{CQ^2}{2CP_1} = \frac{1}{2}CP$$

was den Satz beweist.

35. „Wenn der Punkt P_1 (Fig. 32) den Kegelschnitt K beschreibt, so umhüllt die gleichseitige Hyperbel $H(P_2A, P_2B; C)$, welche in K die Berührungspunkte mit Curven des Büschels der durch A, B, C und P_1 gehenden gleichseitigen Hyperbel einschneidet, die Normalcurve $\bar{C}^4$ erster Gattung mit den Inflexionsknoten A, B, C und dem Wendeschnitte K".

Wenn P_1' ein unmittelbar an P_1 grenzender Punkt von K ist, und P_2' auf K diesem Punkte diametral gegenüberliegt, so ist die gesuchte Enveloppe der Ort des vierten Schnittpunktes der gleichseitigen Hyperbeln $H(P_2A, P_2B; C)$ und $H(P_2'A, P_2'B; C)$. Da die Asymptoten der einen dieser Curven zu jenen der anderen parallel sind, so wird dieser vierte Schnittpunkt π_1 mit dem den beiden Curven gemeinsamen Punkte C ein den beiden Curven gemeinsames Asymptotenrechteck $\pi_1 C$ liefern, dessen zweite Diagonale als die Verbindungslinie der Centra der beiden Hyperbeln die Tangente in P_2 an K ist. Der dem Punkte P_1 von K entsprechende Punkt π_1 der Enveloppe wird also gefunden, wenn man im diametral gegenüber P_1 liegenden Punkte P_2 von K die Tangente an K bestimmt und auf die von dieser Tangente in die Achsen von K bestimmten Segmente CR und CS ein Rechteck beschreibt; der vierte Eckpunkt dieses Rechtecks ist dann π_1. Also ist die Verwandtschaft der Punkte P_1 und π_1 mit jener der Punkte Q und Q' von Artikel 22 (Fig. 21 und 23) identisch, und der Ort der Punkte π_1 deshalb die oben angedeutete Normalcurve C^4 erster Gattung.

36. „Wenn der Punkt P_1 (Fig. 33) die gleichseitige Hyperbel H beschreibt, umhüllt der Kreis $Kr(\bar{P}_2; C)$, welcher in H die Berührungspunkte mit durch C und P_1 gehenden Kreisen einschneidet, die Normalcurve $\bar{C}^4$ zweiter Gattung, welche C zum reellen Inflexionsknoten und H zum Wendeschnitte hat."

Ist P_1' wieder ein an P_1 grenzender Punkt von H, und liegt P_2' auf H diesem Punkte diametral gegenüber, so ist die gesuchte Einhüllende der Ort des zweiten reellen Schnittpunktes der beiden Kreise $Kr(\bar{P}_2; C)$ und $Kr(\bar{P}_2'; C)$. Dieser zweite reelle Schnittpunkt π_1 ist aber offenbar der symmetrische Punkt von C in Bezug auf die Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Kreise, d. h. in Bezug auf die Tangente von H in P_2. Also findet man den dem Punkte P_1 von H entsprechenden Punkt π_1 der gesuchten Curve, wenn man aus C eine Senkrechte auf die Tangente in P_1 fällt und diese Senkrechte von C aus nach der entgegengesetzten Seite hin verd der Ort von π_1 die Lemniskate, welche in Ar-

tikel 22 als die Normalcurve C^4 zweiter Gattung mit dem Centrum C und dem Wendeschnitte H gefunden ist.

37. „Durch einen beliebig gewählten Punkt P eines Kegelschnittes K gehen vier einem bestimmten Poldreiecke ABC von K umschriebene Kegelschnitte, welche K in einem von P verschiedenen Punkte Q berühren. Die Berührungspunkte Q von K mit diesen vier Kegelschnitten sind die Schnittpunkte von K mit dem um ABC umschriebenen Kegelschnitte, welcher in Bezug auf das umschriebene Dreiseit abc der Tangenten in A, B, C den Punkt P zum Brianchon'schen Punkte hat. Jeder dieser vier berührenden Kegelschnitte schneidet K noch in einem vierten Punkte R, den zweiten Schnittpunkt von K mit der Tangente im Berührungspunkte Q des betrachteten Kegelschnittes mit K an den um ABC beschriebenen Kegelschnitt der vier Berührungspunkte angelegt. Von den vier Berührungskegelschnitten ist allemal ein Paar reell und ein Paar imaginär. Und wenn P den Kegelschnitt K beschreibt, so umhüllt der um ABC beschriebene Kegelschnitt der vier Berührungspunkte die $\bar{C}^4$, welche A, B, C zu Knotenpunkten und K zu Wendeschnitte hat."

Der Satz dieses Artikels, von welchem ich der Hauptsache nach an einer anderen Stelle [2]) einen analytischen Beweis gegeben habe, wird mittelst centraler Projection aus den vorhergehenden Sätzen abgelesen. Er umfasst die beiden Fälle eines ganz und eines nur teilweise reellen Poldreiecks und bedürfte nur noch einer Erläuterung in Bezug auf die Auffassung des Punktes P_1 als Brianchon'scher Punkt.

Der Brianchon'sche Punkt eines Kegelschnittes K (Fig. 34) in Bezug auf das umschriebene Dreiseit abc der Tangenten in A, B, C ist bekanntlich der Schnittpunkt S der drei Geraden AD, BE und CF, welche die Berührungspunkte A, B, C der Seiten a, b, c mit den gegenüberliegenden Eckpunkten verbinden. Auf irgend einer dieser drei Geraden AD trennen S und der Eckpunkt D die Polare BC von D in Bezug auf K harmonisch vom gegenüberliegenden Berührungspunkte A; denn die Diagonale DS des Vierecks $DCSB$ wird von den Ecken D, S und den beiden anderen Diagonalen BC und EF bekanntlich harmonisch geschnitten.

Erstens ist nun in Fig. 32 der Punkt P_1 der Brianchon'sche Punkt der gleichseitigen Hyperbel $H(P_2A, P_2B; C)$ in Bezug auf das umgeschriebene Dreiseit der Tangenten in A, B, C. Denn es ist die

2) „Notiz über die Lemniskate" (Sitzungsberichte u. s. w. Band LXXXIX. 2te Abteilung, Seite 1265.

Tangente in A die Asymptote P_2A, die Tangente in B die Asymptote P_2B, die Tangente in C die zweite Diagonale P_3P_4 des auf P_1P_2 in K eingeschriebenen Rechtecks; also ist $P_3P_4P_2$ das Dreiseit der Tangenten und sind P_3A, P_4B, P_2C die Verbindungslinien der Eckpunkte dieses Dreiseits mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten. Aber es gehen diese drei Geraden durch P_1.

Zweitens ist in Fig. 33 der Punkt P_1 der Brianchon'sche Punkt des Kreises $Kr(\overline{P}_2; C)$ in Bezug auf das umgeschriebene Dreiseit der Tangenten in den beiden imaginären Kreispunkten und in C. Es sind nämlich für diesen Fall die von P_2 nach den imaginären Kreispunkten geführten Geraden und die Senkrechte CM in C auf P_1P_2 die Seiten des umgeschriebenen Dreiseits; also ist es unmittelbar klar, dass der gesuchte Brianchon'sche Punkt liegen muss auf der Verbindungslinie CP_2 des Berührungspunkts C der Seite CM mit dem gegenüberliegenden Eckpunkte P_2. Und weiter ist der gesuchte Punkt auf dieser Verbindungslinie CP_2 durch C und die Polare von P_2 in Bezug auf $Kr(\overline{P}_2; C)$, welche in's Unendliche verschwunden ist, harmonisch von P_2 getrennt; also ist er der Punkt P_1, welcher so liegt, dass $P_1C = CP_2$ ist.

Endlich erkennt man leicht, dass die centrale Projection die Relation von S (Fig. 34) zum Kegelschnitte K und Dreiseite abc nicht aufhebt. Deshalb ist, wie es im Satze angegeben ist, auch im allgemeinen Falle P_1 der Brianchon'sche Punkt von K in Bezug auf das Dreiseit der Tangenten in A, B, C.

38. „Durch jeden Punkt P einer C^4 können vier die Curve in einem von P verschiedenen Punkte Q berührende Tangenten gelegt werden. Die vier Berührungspunkte Q dieser Tangenten liegen allemal in einer Geraden p, die Tangente des Wendeschnittes K von $\overline{C}^4$ im Punkte P', welcher bei der Transformation der Curve in ihren Wendeschnitt dem Punkte P entspricht. Jeder der vier Tangenten schneidet die $\overline{C}^4$ noch in einem vierten Punkte R, welcher mit dem Berührungspunkte Q einen durch die Inflexionsknoten von $\overline{C}^4$ gehenden Kegelschnitt bestimmt, der im Punkte Q von p berührt wird. Von den vier Tangenten sind allemal zwei reell und zwei imaginär. Und wenn P die Curve $\overline{C}^4$ durchläuft, so umhüllt p selbstverständlich den Wendeschnitt K."

Wendet man auf den Satz des vorhergehenden Artikels die Transformation an, welche die dort auftretende $\overline{C}^4$ in ihren Wendeschnitt überführt, so erhält man den obigen Satz. Da er für die Lemniskate

der Hauptsache nach schon 1873 von Prof. Dr. Emil Weyr[3]) aufgedeckt ist, bezeichne ich ihn als „Weyr'schen Satz".

Jetzt wende ich mich zu einigen Entwickelungen, die mit den behandelten Sätzen in Verbindung stehen.

39. „Wenn von den vier Basispunkten A, B, C, P (Fig. 35) eines Büschels von Kegelschnitten der Punkt P auf einem gegebenen Kegelschnitte K liegt, so wird K von jeder Curve dieses Büschels ausser P noch in drei Punkten Q_1, Q_2, Q_3 geschnitten. Diese von den verschiedenen Curven des Büschels auf K bestimmten Punktetripel bilden eine kubische Involution auf K. Die Involutionscurve dieser Involution, d. h. die Enveloppe der Verbindungslinien Q_2Q_3, Q_3Q_1, Q_1Q_2 ist ein Kegelschnitt J, welcher die Seiten des Dreiecks ABC berührt. Die Berührungspunkte D der gemeinschaftlichen Tangenten v von K und J mit K sind die Doppelpunkte, und die Schnittpunkte V von K mit J sind die mit einem Doppelpunkte eine Gruppe bildenden Verzweigungspunkte der Involution.[4])

Ist ABC ein Poldreieck von K (Fig. 36), so treffen auch die Tangenten d in den Punkten V an K den Involutionskegelschnitt J in den Berührungspunkten T der gemeinschaftlichen Tangenten v von K und J mit J. Für diesen Fall ist J zu bezeichnen als der in ABC beschriebene Kegelschnitt, für welchen die Tangente p in P an K die Pascal'sche Linie ist in Bezug auf das von den Berührungspunkten der Seiten des Dreiecks ABC mit J in J eingeschriebene Dreieck. Es sind dann von den vier merkwürdigen Dreiecken DTV allemal zwei ganz reell und zwei ganz imaginär."

Die Punktetripel $Q_1Q_2Q_3$ (Fig. 35) bilden eine kubische Involution auf K, da irgend ein Punkt von K ein einziges Tripel $Q_1Q_2Q_3$ bestimmt. Die Enveloppe der Verbindungslinien Q_2Q_3, Q_3Q_1, Q_1Q_2 ist ein Kegelschnitt, da sie aus jedem Punkte Q_1 von K zwei Tangenten zulässt, die Verbindungslinien dieses Punktes Q_1 mit jedem der beiden diesem Punkte zu einem Tripel der Involution ergänzenden Punkte Q_2, Q_3. Dieser Involutionskegelschnitt J berührt die Seiten des Dreiecks ABC, da jede Seite BC dieses Dreiecks mit der Geraden, welche von dem gegenüberliegenden Eckpunkt A nach P führt, gepaart einen Kegelschnitt des Büschels bildet und also als Verbindungs-

3) „Die Lemniskate in rationaler Behandlung" (Abhandlungen der kgl. böhm. Gesellschaft der Wissensch., VI. Folge. 6. Band, 1873).

4) Man vergleiche „Grundzüge einer Theorie der kubischen Involutionen" von Dr. Emil Weyr, ausserord. Mitgl. der k. böhm. Gesellsch. der Wissenschaft, Prag 1874.

linie zweier dem nämlichen Tripel angehörenden Punkte erscheint. Jede gemeinschaftliche Tangente v von K und J verbindet als Tangente von J zwei dem nämlichen Tripel angehörende Punkte von K, welche zusammenfallen in einen Doppelpunkt D der Involution, da diese Gerade v auch den Kegelschnitt K berührt; umgekehrt ist die Tangente an K in einem Doppelpunkte D der Involution offenbar Tangente von J als Verbindungslinie zweier Punkte eines nämlichen Tripels der Involution und deshalb gemeinschaftliche Tangente von K und J. Da die einem gegebenen Punkte von K zu einem Tripel ergänzenden Punkte die zweiten Schnittpunkte von K sind mit den aus dem gegebenen Punkte an J möglichen Tangenten, und diese Tangenten zusammenfallen, wenn der auf K gegebene Punkt ebenfalls auf J liegt, also ein Schnittpunkt V von K und J ist, fallen die einem Punkte V zu einem Tripel ergänzenden Punkte zusammen in einen Doppelpunkt D, und ist jeder Punkt V also ein Verzweigungspunkt; umgekehrt ist jeder Verzweigungspunkt der Involution ein gemeinschaftlicher Punkt V von K und J.

Ist nun weiter ABC ein Poldreieck von K und J also dem Poldreiecke ABC von K eingeschrieben, so ist J bekanntlich einer einfach unendlichen Anzahl von Poldreiecken von K eingeschrieben und umgekehrt K einer einfach unendlichen Anzahl von Poldreiecken von J umgeschrieben[5]). Also muss die Polare irgend eines Punktes Q von K diesen Kegelschnitt in zwei in Bezug auf J zu einander conjugirte Punkte schneiden, d. h. die Schnittpunktenpaare von diesen Polaren mit K und J trennen einander harmonisch. Fällt nun Q in einen Doppelpunkt D (Fig. 36) der Involution, so sind nach den gefundenen Resultaten V und T die Schnittpunkte der Polare d in Bezug auf J mit J. Und da einer der Schnittpunkte dieser Geraden mit K in V fällt, so muss der harmonischen Lage zufolge der andere Schnittpunkt auch in V liegen und TV also die Tangente sein von K in V.

Der vorgeführte Satz steht in inniger Verbindung mit dem des Artikels 38. Die dort auftretenden vier Berührungspunkte Q von K mit Kegelschnitten durch A, B, C, P sind nämlich die Doppelpunkte D der von diesen Kegelschnitten auf K bestimmten kubischen Involution. Und der um ABC beschriebene Kegelschnitt, welcher in Bezug auf das umgeschriebene Dreiseit abc der Tangenten in A, B, C den Punkt P zum Brianchon'schen Punkte hat, ist, da er durch die vier Punkte Q geht, offenbar die Polarfigur von J in Bezug auf K. Dieser Zusammenhang lehrt uns einerseits, dass die Tangenten von K in

---

5) Reye, a. a. O., II. Abteilung, Seite 122, 2te Note.

den Punkten R des Artikels 38 den dort gefundenen Kegelschnitt berühren und also die gemeinschaftlichen Tangenten von K und diesem Kegelschnitte sind. Und andererseits zeigt er für die Involutionscurve J an, dass sie die Tangente p in P an K in Bezug auf das von den Berührungspunkten der Seiten des Dreiecks ABC gebildete Dreieck zur Pascal'schen Linie hat, und von den vier merkwürdigen Dreiecken DTV allemal zwei ganz reell und zwei ganz imaginär sind.[6])

Ist ein Kegelschnitt K' einer einfach unendlichen Anzahl von Poldreiecken eines Kegelschnittes K eingeschrieben und K also einer einfach unendlichen Anzahl von Poldreiecken von K' umgeschrieben, so sagt man bekanntlich K' ist K harmonisch eingeschrieben und K ist K' harmonisch eingeschrieben.[7]) Ist ein Kegelschnitt K' bebeschrieben in einem Dreiecke dessen Eckpunkte auf einem Kegelschnitte K liegen und giebt es also eine einfach unendliche Anzahl von Dreiecken, welche zur gleichen Zeit um K' und in K beschrieben sind, so sage ich K' ist K dreieckig eingeschrieben und K ist K' dreiseitig umgeschrieben. Nach dieser Bezeichnungsweise kann man dann sagen, der Involutionskegelschnitt J dieses Artikels ist in dem ersten Falle eines ganz willkürlichen Dreiecks ABC dem gegebenen Kegelschnitte K nun dreieckig, in dem zweiten Falle wenn ABC ein Poldreieck von K ist diesem Kegelschnitte aber sowol harmonisch als dreieckig eingeschrieben. Und in diesem letzteren Falle ist die schon in Artikel 33 aufgetretene Polarfigur von J in Bezug auf K diesem Kegelschnitte zu gleicher Zeit dreieckig und harmonisch umgeschrieben.

40. Sind T, U, V (Fig. 37) die Eckpunkte t, u, v die gegenüberliegenden Seiten eines Dreiecks, berührt der Kegelschnitt K die Seiten u und v dieses Dreiecks in den Eckpunkten V und U und der Kegelschnitt K' die Seiten v und t in den Eckpunkten T und V, so sind die Kegelschnitte K und K' einander sowol harmonisch als dreieckig eingeschrieben, sowol harmonisch als dreiseitig umgeschrieben, d. h. K' ist K harmonisch und dreieckig eingeschrieben und harmonisch und dreiseitig umgeschrieben. Diese merkwürdige Lage von zwei Kegelschnitten K und K' tritt mit einer einzigen leicht zu kennzeichnenden Ausnahme ein, sobald irgend zwei der vier genannten Lageverhältnisse sich zu gleicher Zeit auftun".

---

6) Es bildet, wie ich meine, der Satz dieses Artikels den Weg, welcher am schnellsten zum Weyr'schen Satze führt.

7) Eine analytische Behandlung dieses Materiels giebt Picquet a. a. O., tome I, page 506, etc., eine synthetische Reye a. a. O., II. Abteilung, Seite 191—216.

Sind U_t und U_t' zwei in der Nähe von U (Fig. 37) auf t liegende und von u und v harmonisch getrennte Punkte, so ist das Dreieck TU_tU_t' ein Polardreieck von K. Nimmt man nun an, dass U_t und U_t' sich auf t bewegen, dass sie mit Beibehaltung der harmonischen Lage in Bezug auf U und V dem Punkte U immer näher treten, so ist dieses Poldreieck von K bei seiner Grenzlage des Zusammenfallens von U_t und U_t' mit U dem Kegelschnitte K' umgeschrieben; denn indem die Verbindungslinie der mit U zusammenfallenden Punkte U und U' offenbar die bestimmte Gerade t durch U bleibt, so bilden TU und TU' in der Grenzlage zwei einander im Punkte T von K' schneidende auffolgende Tangenten von K'. Also ist K' dem Kegelschnitte K harmonisch eingeschrieben. Und wenn man nun zeigen will, dass K umgekehrt dem Kegelschnitte K' harmonisch umgeschrieben ist — was mit dem vorhergehenden bekanntlich immer Hand an Hand geht —, so kann man auf das Dreieck UV_uV_u' die nämliche Betrachtung anwenden.

Für den Beweis, dass zwei Kegelschnitte K und K', welche in Bezug auf ein Dreieck TUV die angegebene Lage haben, auch die drei anderen Beziehungen zu einander zeigen, wird es nun genügen die darbei zu verwendenden Dreiecke anzuweisen. Es zeigt das in K' beschriebene Poldreieck TV_tV_t' von K, dass K' dem Kegelschnitte K harmonisch umgeschrieben, das um K beschriebene Poldreieck UT_uT_u' von K', dass K dem Kegelschnitte K' harmonisch eingeschrieben ist. Weiter lehrt das zugleicher Zeit in K und um K' beschriebene Dreieck VU_vU_v', dass K' dem K dreieckig eingeschrieben und K dem K' dreiseitig umgeschrieben ist. Und endlich folgt aus dem zu gleicher Zeit in K' und um K beschriebenen Dreiecke VT_vT_v', dass K' dem K dreiseitig umgeschrieben und K dem K' dreieckig eingeschrieben ist.

Zeigen zwei Kegelschnitte K und K' zwei von den vier Paaren einander bedingenden Lagenverhältnisse, welche wir betrachtet haben, so kommen mit einer einzigen Ausnahme neben diesen auch die beiden anderen Paare vor. Im allgemeinen veranlasst nämlich die Vereinigung von zwei der vier Voraussetzungen notwendig das Auftreten eines Dreiecks TUV. Für eine der sechs Combinationen muss aber eine Beschränkung angegeben werden. Weiss man nämlich, dass K dem K' dreieckig eingeschrieben und zu gleicher Zeit dreiseitig umgeschrieben ist, so kann es sich wie in Fig. 38 ereignen, dass die Tangenten u und t in v an K und K' die Kegelschnitte K' und K in Berührungspunkten von verschiedenen gemeinschaftlichen Tangenten v von K und K' schneiden. Und in diesem Falle treten neben den gegebenen Lageverhältnissen die beiden anderen Paare nicht auf.

Die von dem Dreiecke TUV herbeigeführte merkwürdige Lage von zwei Kegelschnitten wird nun selbstverständlich angetroffen beim Kegelschnitte K und seinem Involutionskegelschnitte J in dem zweiten Falle des Artikel 39, ebenso zwischen K und der Polarfigur von J, welche in Artikel 37 auftrat. So würde man z. B. auch hieraus folgern können, dass der Mittelpunkt dieser durch A, B, C und die vier Punkte Q gehenden Polarfigur K_1 in den besonderen Fällen der Artikel 32 und 33 auf K liegen muss, da dieser Punkt mit den unendlich fernen Punkten von K ein Polardreieck von K_1 bildet, welches wegen der merkwürdigen Lage von K und K_1 zu einander K eingeschrieben sein muss [8]).

Jetzt gehe ich zu den dualistisch entgegengesetzten Sätzen über. Diese mögen hier aber wieder ohne selbständigen Beweis und in abgekürzter Form erscheinen.

41. „Der Büschel der Parabeln, welche die Achsen a und b eines Mittelpunktskegelschnittes K (Fig. 39) und eine beliebig gewählte Tangente p_1 dieser Curve berühren, enthält vier Parabeln, zwei reelle und zwei imaginäre, welche K auf einer von p_1 verschiedenen Tangente q berühren. Die vier Tangenten q sind die gemeinschaftlichen Tangenten von K mit der Parabel, welche die Achsen von K berührt in ihren Schnittpunkten mit der Tangente p_2, die der Tangente p_1 diametral gegenüber liegt, d. h. mit der Parabel, welche die senkrechte Projection F von C auf p_2 zum Brennpunkt und die zu CF in Bezug auf die Achsen von K antiparallele Gerade d zur Directrix hat. Und diese Parabel umhüllt die Normalcurve $\overline{K}^4$ erster Gattung, welche K zum Rückkehrschnitte hat, wenn p sich K umhüllend bewegt".

„Der Büschel der Parabeln, welche das Centrum C einer gleichseitigen Hyperbel H (Fig. 40) zum Brennpunkte haben und eine beliebig gewählte Tangente p_1 dieser Curve berühren, enthält vier Parabeln, zwei reelle und zwei imaginäre, welche H auf einer von p_1 verschiedenen Tangente q berühren. Die vier Tangenten q sind die gemeinschaftlichen Tangenten von K mit der Parabel, welche C zum Brennpunkte und die der p_1 diametral gegenüber liegende Tangente p_2 von K zur Directrix hat. Und diese Parabel umhüllt die Normalcurve $\overline{K}^4$ zweiter Gattung, welche H zum Rückkehrschnitte hat, wenn p_1 sich H umhüllend bewegt".

---

8) Man vergleiche Piquet a. a. O. tome I, 518. problème 6.

„Der Büschel der einem Polardreiseite abc eines Kegelschnittes K eingeschriebenen Kegelschnitte, welche eine beliebig gewählte Tangente p_1 von K berühren, enthält vier Curven, zwei reelle und zwei imaginäre, welche K auf einer von p_1 verschiedenen Tangente q berühren. Die vier Tangenten q sind die gemeinschaftlichen Tangenten von K mit dem in abc beschriebenen Kegelschnitte, welche in Bezug auf das eingeschriebene Dreieck der Berührungspunkte von den Tangenten a, b, c die Gerade p_1 zur Pascal'sche Linie hat. Und wenn p_1 sich K umhüllend bewegt, so umhüllt dieser Kegelschnitt der vier Tangenten q die Curve $\overline{K}^4$, welche a, b, c zu Rückkehrdoppeltangenten und K zum Rückkehrschnitte hat".

42. „Jede Tangente p einer $\overline{K}^4$ schneidet die Curve noch in vier Punkten, zwei reellen und zwei imaginären, für welche die Tangenten q allemal durch einen Punkt P gehen, den Berührungspunkt der Tangente p' des Rückkehrschnittes K von $\overline{K}^4$, welche bei der Transformation der Curve $\overline{K}^4$ in ihrem Rückkehrschnitt K der Geraden p entspricht, u. s. w.".

Diese dualistische Umkehrung des Weyr'schen Satzes wird selbstverständlich mittelst der Gesetze der Dualität aus Artikel 38 abgelesen. Für die Fälle der Normalcurven gebe ich aber noch einen selbständigen Beweis des Satzes, welcher sich auf die bekannten Eigenschaften von Evolute und Anti-Evolute stützt.

Jede gleichseitige Hyperbel des von den Punkten A, B, C, P_1 (Fig. 32) als Basispunkte bestimmten Büschels, welchen wir in Artikel 32 betrachtet haben, schneidet K ausser P_1 noch in drei Punkten Q_2, Q_3, Q_4 und die Normalen n_2, n_3, n_4 von K in diesen drei Punkten schneiden einander nach Artikel 8 in einem Punkte N von der Normale n_1 von K in P_1. Nun ereignet es sich beim Büschel der gleichseitigen Hyperbeln wie wir fanden aber viermal, dass zwei von den drei beweglichen Schnittpunkten Q_2, Q_3, Q_4 von K mit einer der Curven des Büschels in einen Berührungspunkt Q zusammenfallen, dass also von den drei ausser n_1 aus einem Punkte N von n_1 an K möglichen Normalen zwei in eine Normale n zusammenfallen; deshalb enthält n_1 vier Schnittpunkte N von aufeinander folgenden Normalen von K, d. h. vier Schnittpunkte N mit der Evolute, welche, da n_1 ihr in einem anderen Punkte berührt, also von der sechsten Ordnung ist. Und nun liegen die vier Fusspunkte Q der vier Normalen auf einer durch A, B, C gehenden gleichseitigen Hyperbel; also gehen die vier Normalen n durch einen Punkt, d. h. die Tangenten n der Evolute in den vier Schnittpunkten N mit einer Tangenten n_1 begegnen sich in einem Punkte. Da nun die Normalcure $\overline{K}^4$ erster

Gattung die Evolute eines bestimmten Mittelpunktskegelschnittes K ist, so ist die Umkehrung des Weyr'schen Satzes für diesen Fall der Hauptsache nach bewiesen. Und nun kann die Uebertragung dieses Beweises auf den Fall der Normalcurve $\overline{K}^4$ zweiter Gattung, wobei die Artikel 9 und 31 eine Hauptrolle spielen, dem geneigten Leser überlassen werden.

43. „Jede Curve $\overline{C}^4$ wird von den Tangenten ihres Wendeschnittes nach unveränderlichem Doppelverhältnisse geschnitten. Jede Curve $\overline{K}^4$ wird von ihren eigenen Tangenten in vier Punkten von unveränderlichem Doppelverhältnisse geschnitten".

Indem ich die dualistische Umkehrung des Artikels 39 dem Leser überlasse, beendige ich diesen Abschnitt mit dem obigen Satze, welcher in seinen beiden Teilen sich selbst dual entspricht. Die Wahrheit des ersten Teiles leuchtet unmittelbar ein; denn das vorgeführte Doppelverhältniss ändert sich nicht, wenn man von irgend einer Tangente q_1' (Fig. 41) des Wendeschnittes zur nächstfolgenden Tangente q_2' übergeht, da die Verbindungslinien der an einander grenzenden Schnittpunkte von q_1' und q_2' mit $\overline{C}^4$ nach dem Weyr'schen Satze in einen Punkt Q von $\overline{C}^4$ zusammenkommen. Und der dem ersten Teile dualistisch entsprechende zweite Teil des Satzes wird auf ganz ähnliche Weise bewiesen [9].

---

9) Dieses Doppelverhältniss ist nach Weyr das aequianharmonische („Die Lemniskate in rationaler Behandlung", Art. 8).

XI.

Miscellen.

1.

Ein geometrischer Satz.

I.

Es sei uns gestattet im Folgenden einen geometrischen Satz zu veröffentlichen, auf welchen wir gelegentlich anderer Untersuchungen gestossen sind.

Es sei irgend eine Involution $AA_1 BB_1 CC_1 \ldots$ auf einer geraden Linie gegeben, und durch A und A_1 seien irgend zwei Linien gezogen und auf diesen Linien irgend zwei feste Strecken UU_1 und VV_1 angenommen. Ziehen wir nun BU, BU_1, B_1V und B_1V_1, so bilden diese vier Linien ein Vierseit, dessen 2 von BB_1 verschiedene Diagonalen sich in G schneiden mögen. Sei ferner S der Schnittpunkt von UU_1 und VV_1 und P und Q auf den Linien AU und A_1V_1 so gewählt, dass z. B. P und A in Bezug auf U und U_1 conjugirt harmonisch liegen, so gilt folgender Satz:

„Der Ort des Punktes G ist ein Kegelschnitt K^2, der durch S, „P, A und die beiden Doppelpunkte der Involution geht, wenn an „Stelle von B und B_1 andere Paare von Punkten der Involution „treten, und die beiden durch G gehenden Diagonalen des Vierseits „gehen durch 2 feste Punkte dieses Kegelschnitts.“

Schneiden sich nämlich BU_1 und B_1V_1 in α_1, BU und B_1V_1 in α_2, BU und B_1V in α_3 und BU_1 und B_1V in α_4, so bestehen die Oerter der Punkte α_1 und α_3 aus Kegelschnitten, welche durch die

Punkte S und die beiden Doppelpunkte der Involution gehen. Verbinden wir nun irgend einen Punkt α_1 der Punktreihe des einen Kegelschnitts mit dem Punkt α_3 des andern, so muss $\alpha_1\alpha_3$ notwendig durch den 4ten Schnittpunkt der beiden Kegelschnitte gehen, da die Punktreihen α_1 und α_3 einander conform sind, und 3 der Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte sich selbst entsprechen. Daraus folgt, dass $\alpha_1\alpha_3$ durch einen festen Punkt R geht. Ebenso geht $\alpha_2\alpha_4$ durch den festen Punkt T.

Da überdies die Punktreihen α_1, α_2, α_3, α_4 alle unter sich projectivisch sind, so folgt ferner, dass auch die Strahlenbüschel $\alpha_1\alpha_3$ und $\alpha_2\alpha_4$ projectivisch unter sich sind, der Ort des Punktes G also ein Kegelschnitt ist. Dass der Kegelschnitt K^2 durch die weitern genannten Punkte geht, zeigen specielle Lagen der $\alpha_1\alpha_3$ und $\alpha_2\alpha_4$.

II.

Tritt nun die involutorische Reihe ins Unendliche und sind die Doppelpunkte die imaginären Kreispunkte im Unendlichen, so erhalten wir in Bezug auf UU_1 und VV_1 die Bedingung UU_1 senkrecht auf VV_1 und können den Satz nun folgendermassen aussprechen:

„Sind 2 sich senkrecht kreuzende Strecken AB gegeben, und „gehen durch diese Endpunkte die Seitenpaare eines Rechtecks, so „ist der Ort des Schwerpunkts des Rechtecks ein Kreis, und die Dia„gonalen des Rechtecks gehen alle durch 2 feste Punkte des Kreises, „die Rechtecke sind also alle unter sich ähnlich."

„Ist insbesondere der Punkt D so gelegen, dass er der Höhen„schnitt des Dreiecks ABC ist, so wird der Kreis zum Feuerbach„schen Kreise des Dreiecks ABC, die Diagonalen des Rechtecks gehen „durch die Schnittpunkte von AD und BC, BD und AC. In diesem „Falle gehen überdies die Umkreise allee dieser Rechtecke durch „den Schnittpunkt von AB mit CD."

Und ein sehr spec. Fall des letztern Satzes giebt uns als weitern, uns bis jetzt noch nirgend begegneten Satz:

„Ist ABC irgend ein rechter Winkel und fällen wir von 2 festen „Punkten A und C auf dessen Schenkeln Lote AD und CE auf „eine durch B gehende bewegliche Gerade, so wird ED von einem „festen Punkte G (auf AC, BG senkrecht auf AC) unter einem „rechten Winkel gesehen."

Weingarten (Württ.), im Juli 1886.

B. Sporer.

2.

Lehrsätze vom Sehnenvierecke

1) Wenn einem Kreise mit dem Mittelpunkte O ein Sehnenviereck $ABCD$ eingeschrieben ist, dessen Diagonalen (AC, BD) normal sind und sich im Punkte P schneiden; dann haben (wenn E, F, G, H, K, L resp. die Mittelpunkte von AB, BC, CD, DA, AC, BD sind) die vier Strecken EG, FH, KL und OP denselben Halbirungspunkt M.

Einem Kreise können unendlich viele Sehnenvierecke eingeschrieben werden, deren normale Diagonalen sich in demselben Punkte P schneiden.

2) Alle Strecken, welche zwischen den Mittelpunkten der Gegenseiten solcher Sehnenvierecke liegen, werden durch den Punkt M halbirt.

3) Die Mittelpunkte der Seiten aller dieser Sehnenvierecke liegen auf einem Kreise, der das Centrum M und den Halbmesser $\sqrt{\frac{r^2}{2}-\frac{a^2}{4}}$ hat, wenn r der Radius des umschriebenen Kreises und $OP = a$ ist.

4) Alle Rechtecke $EFGH$, deren Eckpunkte die Seiten solcher Sehnenvierecke halbiren, umhüllen eine Kegelschnittslinie, welche die Brennpunkte O und P und eine Hauptachse von der Länge r hat.

Wir teilen diese Sätze ohne Beweise mit, weil sie teils Folgerungen bekannter Sätze sind, teils leicht bewiesen werden können.

Pola, im Juni 1886.

Franz Schiffner,
k. k. Professor.

3.

Eine einfache Darstellung der Resultante von zwei quadratischen Formen.

Sind die Zahlen $a_0 b_0 \ldots$ so beschaffen, dass die Gleichungen

$$a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 = 0$$
$$b_0 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2 = 0$$

eine gemeinschaftliche Wurzel haben, so ist damit gesagt, dass es bestimmte Zahlen (x_1^2), $(2x_1 x_2)$, (x_2^2) gibt, für welche gleichzeitig

$$\left.\begin{array}{l} a_0(x_1^2) + a_1(2x_1 x_2) + a_2(x_2^2) = 0 \\ b_0(x_1^2) + b_1(2x_1 x_2) + b_2(x_2^2) = 0 \end{array}\right\};$$

während jedenfalls zugleich auch

$$4(x_1^2)(x_2^2) - (2x_1 x_2)^2 = 0$$

von selbst erfüllt wird.

Damit ist gesagt, dass die 6 Zahlen $a_0 a_1 a_2 b_0 b_1 b_2$ so beschaffen sind, dass der Kegelschnitt

$$4X_1 X_3 - X_2^2 = 0$$

und die Geraden

$$a_0 X_1 + a_1 X_2 + a_2 X_3 = 0$$
$$b_0 X_1 + b_1 X_2 + b_2 X_3 = 0$$

einen Punkt gemeinschaftlich haben, nämlich den Punkt $X_1 = (x_1^2)$, $X_2 = (2x_1 x_2)$, $X_3 = (x_2^2)$. Dies ist nur unter einer Bedingung zwischen den Coordinaten der beiden Geraden a und b möglich. Und wäre andrerseits diese Bedingung für das geometrische Gebilde der beiden Geraden, in Verbindung mit dem Kegelschnitte

$$4X_1 X_3 - X_2^2 = 0,$$

erfüllt durch gewisse angebbare Zahlen: $X_1 X_2 X_3$, so brauchte man blos $x_1^2 = \lambda X_1$, $2x_1 x_2 = \lambda X_2$, $x_2^2 = \lambda X_3$ zu setzen (je zwei dieser Gleichungen liefern Werte für x_1, x_2, welche der dritten von selbst genügen), um dann auch behaupten zu können, dass nunmehr auch die quadratischen Formen

$$a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 \quad \text{und}$$
$$b_0 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + b_2 x_1^2$$

eine gemeinschaftliche Wurzel $\frac{x_1}{x_2}$ besitzen müssen.

Man kann aber die Bedingung aufstellen dafür, dass der Schnittpunkt zweier Geraden

$$\left.\begin{array}{l} a_0 X_1 + a_1 X_2 + a_2 X_3 = 0 \\ b_0 X_1 + b_1 X_2 + b_2 X_3 = 0 \end{array}\right\}$$

auf einem Kegelschnitte $4X_1 X_3 - X_2^2 = 0$ liegt (Salmon Algebra der linear. Transform. Art. 21.; Beisp. 16).

Dieselbe ist, wenn $a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{21}\,a_{31}\,a_{12}$ die Coefficienten des Kegelschnitts, gegeben durch

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_0 & b_0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_1 & b_1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_2 & b_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

In unserm Falle hat man zu setzen $a_{22} = -1$; $a_{13} = 2$; die übrigen Coefficienten verschwinden; und man erhält:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & a_0 & b_0 \\ 0 & -1 & 0 & a_1 & b_1 \\ 2 & 0 & 0 & a_2 & b_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

als die Resultante der beiden vorgegebenen Formen.

Der hier benutzte Gedankengang stützt sich auf Burnside's Vorschlag zur Behandlung der Invariantentheorie (Salmon, Algebra art. 190).

Es sei noch bemerkt, dass man obige Determinante bedeutend vereinfachen kann; man multiplicirt die beiden letzten Zeilen mit 2; hierauf addirt man das $(-a_2)$-fache der ersten Zeile, das $2a_1$-fache der zweiten Zeile, und schliesslich das $(-a_0)$-fache der dritten Zeile zur vierten Zeile; schliesslich multiplicirt man die erste Zeile mit $(-b_2)$, die zweite mit $2b_1$, die dritte Zeile mit $(-b_0)$ und addirt zur fünften Zeile. Man erhält:

$$\begin{vmatrix} -2a_0 a_2 + 2a_1^2 & -b_0 a_2 + 2a_1 b_1 - a_0 b_2 \\ -a_0 b_2 + 2b_1 a_1 - b_0 a_2 & -2b_0 b_2 + 2b_1^2 \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$4(a_0 a_2 - a_1^2)(b_0 b_2 - b_1^2) - (a_0 b_2 + b_0 a_2 - 2a_1 b_1)^2.$$

Dies ist aber in der Tat eine bekannte Form der Resultante; sie tritt auf, wenn man die Bedingung sucht dafür, das die als Gleichung für λ dargestellte Discriminante von $a_x^2 + \lambda \alpha_x^2 = 0$ eine Doppelwurzel in den λ habe.

München, Herbst 1886.

Fritz Hofmann.

4.

Conforme perspective Projection der Flächen auf einander.

Bei Kartenprojectionen pflegen perspectivische Projectionen der Erdoberfläche auf abwickelbare Flächen bevorzugt zu werden. Aehnlichkeit der Flächenelemente bleibt dann ausser Betracht. Wir wollen nun statt dessen fragen, auf welchen Flächen die Aehnlichkeit der Elemente mit der Perspectivität vereinbar ist.

Das Quadrat des Linienelements in Polarcoordinaten r, φ, ψ dargestellt ist:

$$\partial s^2 = \partial r^2 + r^2(\cos^2\psi\,\partial\varphi^2 + \partial\psi)$$

Nimmt man den Anfang der r im Projectionscentrum, so decken sich perspectivisch alle Linien, welche bei gemeinsamen φ, ψ nur in r differiren. Daher ist für jede Projection von ∂s

$$\partial s_1{}^2 = \partial r_1{}^2 + r_1{}^2(\cos^2\psi\,\partial\varphi^2 + \partial\psi^2)$$

Liegt nun s auf einer Fläche, s_1 auf deren Projection, so sind die bei Variation von φ und ψ erzeugten Flächenelemente ähnlich, wenn bei jeder Variation von φ und ψ das Verhältniss von ∂s und ∂s_1 dasselbe bleibt. Dies erfordert, dass

$$\frac{\partial r^2}{r^2} = \frac{\partial r_1{}^2}{r_1{}^2}$$

sei. Die eine Lösung

$$\frac{\partial r}{r} = \frac{\partial r_1}{r_1}$$

welche nur ähnliche, ähnlich liegende Flächen gibt, kommt nicht in Betracht, folglich ist für unsere Frage

$$\frac{\partial r}{r} + \frac{\partial r_1}{r_1} = 0 \quad \text{oder}$$

$$rr_1 = m \text{ (const. über die ganze Fläche)}$$

„Die einzig mögliche conforme perspectivische Abbildung einer Fläche geschieht in reciproken Radien.“

Von hier ausgehend ergibt eine leichte Betrachtung Folgendes.

Einer Geraden entspricht ein Kreis, der durch das Centrum der Perspective C geht, und dessen Mittelpunkt mit C auf einer Normale zur Geraden liegt, mithin einer Regelfläche eine von Kreisen erzeugte Fläche, die sich sämtlich in C schneiden.

Da durch keinen Punkt eines nichtsphärischen Rotationsellipsoides mehr als ein Kreisschnitt geht, so lässt sich die ellipsoidische Erdoberfläche auf keiner Regelfläche, mithin auf keiner abwickelbaren, perspectivisch conform abbilden.

Die analytische Darstellung der inversen, d. h, in reciproken Radien entsprechenden Fläche zu einer gegebenen Regelfläche bietet sich direct leichter dar als mit Anwendung der geometrischen Betrachtung.

Die Gleichungen der Regelfläche seien:

$$x = \alpha + au; \quad y = \beta + bu; \quad z = \gamma + cu$$

wo a, b, c Richtungscosinus der Erzeugenden, u Strecke auf ihr, α β, γ, a, b, c Functionen eines von u unabhängigen Parameters sind. Sei

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

und bezeichne der Index I die Zugehörigkeit zur Inversen. Dann ist

$$x_1 = \frac{r_1 x}{r} = \frac{mx}{r^2} = \frac{mx}{x^2+y^2+z^2}; \quad \text{etc.}$$

Setzt man

$$\varkappa^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2; \quad \varkappa \cos\lambda = a\alpha + b\beta + c\gamma$$

so erhält man:

$$x_1 = m\frac{\alpha + au}{\varkappa^2 + 2u\varkappa\cos\lambda + u^2}; \quad \text{etc.}$$

Zur Vereinfachung sei

$$u = \varkappa(\sin\lambda\cot\omega - \cos\lambda); \quad \alpha = \varkappa(a\cos\lambda + a_1\sin\lambda)$$
$$\mu = \varkappa\sin\lambda = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 - (a\alpha+\beta b+\gamma c)^2}$$

d. i. gleich dem Abstande der Erzeugenden von C. Dann wird

$$x_1 = \frac{m}{\mu}\sin\omega\,(a_1\sin\omega + a\cos\omega); \quad \text{etc.}$$

die inverse Fläche zu der gegebenen:

$$x = \frac{\mu}{\sin\omega}(a_1\sin\omega + \cos\omega); \quad \text{etc.}$$

Hier sind $a_1 b_1 c_1$ Richtungscosinus einer sonst beliebigen, aber zur Erzeugenden normalen Geraden. Ihre Bedeutung hat diese Gerade als Schinttliinie der Ebene zwischen dem Radiusvector und der Erzeugenden mit der Normalebene der letztern, und ω ist der Winkel zwischen dem Radiusvector und der Erzeugenden.

R. Hoppe.

5.

Ein Viereckssatz.

In dem Aufsatz VII. 2. S. 224 finden sich die Coordinaten $x_0 y_0$ des Flächenschwerpunkts des Vierecks in 6 Grössen $u u_1\, u_2\, v v_1\, v_2$ dargestellt, wo der Eckenschwerpunkt zum Anfangspunkt gewählt ist, drückt man nun auch die Coordinaten des Diagonalenschnitts in denselben 6 Grössen aus, so zeigt sich, dass deren Werte

$$-3x_0, \quad -3y_0$$

sind, und man hat den Satz:

Der Flächenschwerpunkt, der Eckenschwerpunkt und der Diagonalenschnittpunkt eines Vierecks liegen in genannter Reihenfolge auf einer Geraden, deren so begrenzte Abschnitte sich verhalten wie 1 zu 3.

Diese einfache Beziehung führt auf die Vermutung, dass sie sich auch auf einfache Art synthetisch beweisen lässt.

R. Hoppe.

6.

Beweis des vorstehenden Viereckssatzes.

ABCD sei das Viereck, *E* der Durchschnitt, *F* und *G* die Halbirungspunkte der Diagonalen *AC* und *BD*. Teilt man *EF* in *H*, so dass $EH = \frac{2}{3} EF$ ist, und zieht durch *H* die Parallele zu *BD*, so geht diese durch die Schwerpunkte der Dreiecksflächen *ABC* und *ADC*, ist also eine Schwerlinie der Vierecksfläche. Macht man ebenso $EJ = \frac{2}{3} EG$ und legt durch *J* die Parallele zu *AC*, so erhält man ebenfalls eine Schwerlinie der Vierecksfläche. Der Schwerpunkt *S* dieser Fläche ist der vierte Eckpunkt des Parallelogramms über *EH* und *EJ*. Der Schwerpunkt *T* der 4 Ecken ist der Halbirungspunkt von *FG*. Hieraus folgt leicht, dass *E*, *T*, *S* in gerader Linie liegen, und sich

$$ET : ES = 3 : 4$$

verhält, w. z. b. w.

F. August.

7.

Zur Construction der Ellipse mit Benutzung von Krümmungskreisen.

Sind AA_1 und BB_1 die Achsen einer Ellipse, und ist $CDEF$ das Rechteck, welches diese Achsen zu Mittellinien hat, so trifft bekanntlich die Senkrechte aus C auf AB beziehungsweis AA_1 und BB_1 in den Krümmungsmittelpunkten M_1, M_2 der Scheitel A und B.

Mit Berücksichtigung der Symmetrie erhält man so leicht 4 Krümmungskreise der Ellipse.

In Folgendem soll nun gezeigt werden, wie sich weitere 4 Ellipsenpunkte und deren Krümmungskreise einfach ermitteln lassen.

Die Gleichung einer Ellipse E mit den Halbachsen a und b ist

$$b^2 x^2 + a^3 y^2 = a^2 b^2,$$

die Gleichung ihrer Tangente T im Punkte $P \ldots (x, y)$ lautet:

$$b^2 x \xi + a^2 y \eta = a^2 b^2,$$

die der Normalen N:

$$a^2 y \xi - b^2 x \eta = a^2 b^2;$$

der Krümmungsmittelpunkt M hat die Coordinaten:

$$x_1 = \frac{(a^2 - b^2) x^3}{a^4}, \quad y = -\frac{(a^2 - b^2) y^3}{b^4}$$

Bilden T, N und OM (der Radiusvector des Punktes M) mit der Abscissenachse OX beziehungsweise die Winkel t, n und m, dann ist

$$\operatorname{tang} t = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, \quad \operatorname{tang} n = \frac{a^2 y}{b^2 x} \quad \text{und} \quad \operatorname{tang} m = \frac{y_1}{x_1} = -\frac{a^4 y^3}{b^4 x^3}.$$

Diese 3 Werte nehmen für gewisse Punkte eine sehr einfache Form an. Liegt z. B. der Punkt $P \ldots (x, y)$ so, dass

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

ist, (das ist der Fall, wenn P ein Punkt der Geraden OC ist), dann wird

$$\operatorname{tang} t = -\frac{b}{a}, \quad \operatorname{tang} n = \frac{a}{b} \quad \text{und} \quad \operatorname{tang} m = -\frac{a}{b} \text{ sein.}$$

Trägt man also von O aus gegen A_1 zu $OG = b$, gegen B zu $OH = a$ auf und zeichnet das Rechteck $GOHK$, so gibt OK die Lage und Richtung von OM, GH die Richtung von N an, und T muss senkrecht zu GH oder parallel AB sein. Bedenkt man noch, dass T auf OX ein Stück OS abschneidet, welches im allgemeinen gleich $\frac{a^2}{x}$ ist; dass für den Punkt P aber $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ wird, weil P mit jenem Punkte p gleiche Abscisse hat, der im Kreise AA_1 und in der Diagonale des Quadrates über AA_1 liegt, so ergibt sich in unserem speciellen Falle für OS der Wert $a\sqrt{2}$ oder die Länge A_1H.

Der Ellipsenpunkt P in der Rechtecksdiagonale OC, seine Tangente T, die Normale N und der zugehörige Krümmungsmittelpunkt M können deshalb auf folgende einfache Art gefunden werden.

Man zeichnet $OG = b$, $OH = a$, $HK \# OG$, $OS = A_1H$, durch S die Tangente $T \perp GH$ oder $T \parallel AB$, durch P in OC die Normale $N \parallel GH$ und bringt N mit KO in M zum Schnitte.

Andere 3 Ellipsenpunkte und Krümmungsmittelpunkte liegen symmetrisch zu P und M für die Symmetralen AA_1 und BB_1.

Die so ermittelten 8 Krümmungskreise dürften den Verlauf der Ellipse in den meisten Fällen mit hinreichender Genauigkeit angeben.

Der oben eingeschlagene Weg führt auch zu beachtenswerten Resultaten, wenn Ellipsenpunkte betrachtet werden, für welche $\frac{x}{y} = \frac{a}{2b}, \frac{2a}{b}$ etc. ist, oder auch, wenn Ellipsen vorliegen, bei denen die Achsen in einem einfachen Verhältnisse stehen.

Pola, am 17. September 1886.

Franz Schiffner
k. k. Prof.

8.

Ueber Producte aus ganzen Zahlen.

A.

Sind $p - a$, $p + a$, $q + b$ und $q - b$ irgend 4 Zahlen, so ist stets die Relation

$$\text{I.} \qquad (p^2 - a^2)(q^2 - b^2) + (aq \pm bp)^2 = (pq \pm ab)^2$$

giltig. Aus dieser Relation nun sei es uns gestattet in folgendem einige Schlüsse zu ziehen, welche Producte aus 4 ganzen Zahlen betreffen.

1) $p(p+n)(p+2n)(p+3n)$. Wenden wir auf dieses Product die Relation I. an, so erhalten wir sofort:

II. $p(p+n)(p+2n)(p+3n)+n^4=(p^2+3pn+n^2)^2$ und

III. $p(p+n)(p+2n)(p+3n)+n^2(2p+3n)^2=(p^2+3pn+3n^2)^2$,

d. h. mit Worten:

Multipliciren wir irgend 4 auf einanderfolgende Glieder einer „arithmet. Reihe I. Ordnung und addiren dazu das mit dem Quadrat „der Differenz oder Summe der beiden mittleren der 4 Glieder, so „erhalten wir stets ein Quadrat".

Speciell giebt Gleich. II den Satz:

„Besteht eine arithm. Reihe I. Ordnung aus ganzen Zahlen, so „ist das um die 4te Potenz der Differenz der Reihe vermehrte Pro- „duct aus 4 auf einanderfolgenden Gliedern stets ein Quadrat".

Geben wir ferner n verschiedene Werte, so ergiebt sich uns:

$$\text{IV.}\quad\left\{\begin{array}{l} p(p+1)(p+2)(p+3)+1 \\ p(p+2)(p+4)(p+6)+16 \\ p(p+3)(p+6)(p+9)+81 \\ \qquad\text{u. s. w.} \qquad\qquad\qquad \text{und} \\ p(p+1)(p+2)(p+3)+(2p+3)^2 \\ p(p+2)(p+4)(p+6)+4(p+3)^2 \\ p(p+3)(p+6)(p+9)+(2p+9)^2 \\ \qquad\text{u. s. w.} \end{array}\right.$$

sind stets Quadrate, welchen Wert die ganze Zahl p auch annehmen mag. Speciell sagt die erste der Relationen IV. aus:

„Das um 1 vermehrte Product von 4 auf einanderfolgenden „Zahlen ist stets ein Quadrat".

2) $p(p+n)(p+q)(p+q+n)$. Wir erhalten ohne Schwierigkeit folgende Gleichungen:

V. $p(p+n)(p+q)(p+q+n)+\frac{n^2q^2}{4}=t^2$

VI. $p(p+n)(p+q)(p+q+n)+(2p+q+n)^2\frac{q^2}{4}=u^2$

VII. $p(p+n)(p+q)(p+q+n)+(2p+q+n)^2\frac{n^2}{4}=v^2$

Sollen die linken Seiten dieser Gleichungen ganze Zahlen vorstellen, so muss bei V. q oder n gerade, bei VI. und VII. q resp. n oder $p+n$ gerade sein.

Setzen wir specielle Werte für q und n ein, so folgt aus V.:

$$\text{VIII.}\quad \begin{cases} p(p+1)(p+2)(p+3)+1 & (n=2 \quad q=1) \\ p(p+2)(p+2)(p+3)+4 & (n=2 \quad q=2) \\ p(p+2)(p+3)(p+5)+9 & (n=2 \quad q=3) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ p(p+3)(p+4)(p+7)+36 & (n=3 \quad q=4) \\ p(p+3)(p+6)(p+9)+81 & (n=3 \quad q=6) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \end{cases}$$

aus VI. und VII.:

$$\text{IX.}\quad \begin{cases} p(p+1)(p+2)(p+3)+(2p+3)^2 & (n=1 \quad q=2) \\ p(p+2)(p+2)(p+4)+(2p+4)^2 & (n=2 \quad q=2) \\ p(p+3)(p+4)(p+7)+(2p+7)4^2 & (n=3 \quad q=4) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ p(p+1)(p+1)(p+2)+(p+1)^2 & (n=1 \quad q=1 \quad n+q=2) \\ p(p+1)(p+3)(p+4)+9(p+2)^2 & (n=1 \quad q=3 \quad q+n=4) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ p(p+3)(p+5)(p+8)+25(p+4)^2 & (n=3 \quad q=5 \quad p+q=8) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \end{cases}$$

sind stets Quadrate.

3) $p(p+\alpha)(p+\alpha+1)(p+2\alpha+1)$. Wir erhalten mittelst der Relation I.:

$$\text{X.}\quad p(p+\alpha)(p+\alpha+1)(p+2\alpha+1)+(2p+2\alpha+1)^2\frac{\alpha^2}{4}=t^2$$

$$\text{XI.}\quad p(p+\alpha)(p+\alpha+1)(p+2\alpha+1)+(2p+2\alpha+1)^2\frac{(\alpha+1)^2}{4}=u^2$$

$$\text{XII.}\quad p(p+\alpha)(p+\alpha+1)(p+2\alpha+1)+\frac{\alpha^2(\alpha+1)^2}{2}=v^2$$

wobei stets eine der linken Seiten der beiden ersten Gleichungen eine ganze Zahl ist, während dies mit der linken Seite der 3ten Gleichung stets der Fall ist.

Speciell folgt aus X. und XI.:

$$\text{XIII.}\quad \begin{cases} p(p+1)(p+2)(p+3)+(2p+3)^2 & (\alpha=1) \\ p(p+2)(p+3)(p+5)+(2p+5)^2 & (\alpha=2) \\ p(p+3)(p+4)(p+7)+4(2p+7)^2 & (\alpha=3) \\ p(p+4)(p+5)(p+9)+4(2p+9)^2 & (\alpha=4) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \end{cases}$$

und aus XII.:

$$\text{XVII.}\quad \left\{\begin{array}{ll} p(p+1)(p+2)(p+3)+1 & (\alpha=1) \\ p(p+2)(p+3)(p+5)+9 & (\alpha=2) \\ p(p+3)(p+4)(p+7)+36 & (\alpha=3) \\ p(p+4)(p+5)(p+9)+100 & (\alpha=4) \\ \dots\dots\dots\dots & \end{array}\right.$$

sind Quadrate.

4) $p(p+n\alpha)(p+n\alpha+\alpha)(p+2n\alpha+\alpha)$. So ergibt sich uns:

$$\text{XV.}\quad p(p+n\alpha)(p+n\alpha+\alpha)(p+2n\alpha+\alpha)+(2p+2n\alpha+\alpha)^2\frac{(n+1)^2\alpha^2}{2}=t^2$$

$$\text{XVI.}\quad p(p+n\alpha)(p+n\alpha+\alpha)(p+2n\alpha+\alpha)+(2p+2n\alpha+\alpha)^2\frac{n^2\alpha^2}{2}=u^2$$

$$\text{XVII.}\quad p(p+n\alpha)(p+n\alpha+\alpha)(p+2n\alpha+\alpha)+\left(n\,\frac{n+1}{2}\right)^2\alpha^4=v^2$$

wo bei der letzten Gleichung die linke Seite stets eine ganze Zahl ist, während es bei den beiden ersten nicht der Fall ist, wenn α nicht gerade ist. In letzterem Fr'le ist dies stets nur bei einer von beiden der Fall.

Setzen wir in Gleich. XV. bis XVII. specielle Werte für α und n, so erhalten wir z. B. aus XV. und XVI.:

$$\text{XVIII.}\quad \left\{\begin{array}{ll} p(p+4)(p+6)(p+10)+4(2p+10)^2 & (\alpha=2\ n=2) \\ p(p+4)(p+6)(p+10)+9(2p+10)^2 & (\alpha=2\ n=2) \\ p(p+6)(p+9)(p+15)+9(2p+15)^2 & (\alpha=3\ n=2) \\ p(p+9)(p+12)(p+21)+36(p+21)^2 & (\alpha=3\ n=3) \\ \dots\dots\dots\dots & \end{array}\right.$$

und aus XVII.:

$$\text{XIX.}\quad \left\{\begin{array}{ll} p(p+4)(p+6)(p+10)+144 & (\alpha=2\ n=2) \\ p(p+6)(p+8)(p+14)+576 & (\alpha=2\ n=3) \\ p(p+6)(p+9)(p+15)+729 & (\alpha=3\ n=2) \\ p(p+10)(p+12)(p+22)+3600 & (\alpha=2\ n=5) \\ \dots\dots\dots\dots & \end{array}\right.$$

a's vollständige Quadrate.

5) $2p(2p\pm1).2q(2q\pm1)$. Daraus folgen sofort die Relationen:

$$\text{XX.}\quad 2p(2p+1)\,2q.(2q+1)+(p-q)^2=t^2$$
$$\text{XXI.}\quad 2p(2p+1)(2q)(2q+1)+(p-q)^2(2p+2q+1)^2=u^2$$
$$\text{XXII.}\quad 2p(2p+1)(2q-1)2q+(p+q)^2=v^2$$

XXIII. $2p(2p+1)(2q-1)2q+(p+q)^2(2p-2q+1)^2 = w^2$

XXIV. $(2p-1)2p(2q-1)2q+(p-q)^2 = x^2$

XXV. $(2p-1)2p(2q-1)2q+(p-q)^2(2p+2q-1)^2 = y^2$

Setzen wir hier für p und q irgend welche specielle Werte, so erhalten wir hieraus ebenfalls eine Reihe von Quadraten, so z. B.:

XXVI.
$$\left\{\begin{array}{l}
2p(2p+1)(2p+6)(2p+7)+9 \quad (q=p+3);\ \text{aus XX.} \\
2p(2p+1)(2p-14)(2p-15)+225(2p-7)^2 \quad (p+q=7);\ \text{aus XXI.} \\
(2p)(2p+1)(2p-10)(2p-9)+25 \quad (p+q=5);\ \text{aus XXII.} \\
(2p)(2p+1)(2p+5)(2p+6)+25(2p+3)^2 \quad (q=p+3);\ \text{aus XIII.} \\
(2p-1)2p(2p+q)(2p+10)+25 \quad (q=p+5);\ \text{aus XXIV.} \\
(2p-1)2p(2p+q)(2p+10)+25(4p+5)^2 \quad (q=p+5);\ \text{aus XXV.} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right.$$

Fortsetzung folgt.

Weingarten, im Nov. 1885. B. Sporer.

XII.

Ueber Verteilung und Strömung der Elektricität auf dem Parallelepipedon.

Von

Hermann Niebour.

I.

Zur elektrischen Verteilung auf dem Parallelepipedon.

In der weiteren Ausarbeitung der Poisson'schen Theorie der Elektrostatik, welche dieselbe durch Gauss und Green erfahren hat, tritt, bei der Behandlung elektrostatischer Probleme für Conductoren von specieller Form, die Bedeutung der „Green'schen Belegung" des betreffenden Körpers in Bezug auf einen inneren Punkt, wie die der „Green'schen Function" vor allem hervor. — Die Bestimmung dieser Grössen für das Parallelepipedon wird uns in diesem Teile ausschliesslich beschäftigen.

Die anzuwendende Methode wollen wir zunächst an einem einfacheren Fall darlegen, indem wir uns vorweg die Aufgabe stellen:

> Gegeben ist eine unendliche planparallele Platte von der Dicke a und innerhalb ein Punkt P. Gesucht wird die diesem Punkt entsprechende Green'sche Oberflächenbelegung der Platte.

Der Gang der Lösung dieser Aufgabe ist der folgende: Wir bestimmen die „Green'sche Function" der gesuchten Belegung, haben dann also neben dem (direct gegebenen) Potential derselben auf äussere auch das auf innere Punkte und finden die Belegung η selbst für jeden Punkt der Oberfläche, wenn wir die Poisson'sche Differentialgleichung:

$$\frac{d\overline{V}_i}{dn} - \frac{d\overline{V}_a}{dn} = -4\pi\eta$$

verwenden.

$\overline{V}_i$ und $\overline{V}_a$ bezeichnen hierin die Potentialwerte der Belegung in den dem betreffenden Oberflächenpunkte unmittelbar benachbarten äusseren (a) und inneren (i) Punkt, n ist die innere Flächennormale.

Die Green'sche Function ist im Innern der Platte überall eindeutig und stetig; sie genügt hier der Gleichung: $\Delta f = 0$ und ist in allen Oberflächenpunkten mit dem Potential von P identisch. Zu ihrer Bestimmung benutzen wir hier wie später die Methode der Spiegelbilder. Dem Spiegelbilde von P gegen die Grenzebene I der Platte erteilen wir die Masse $+1$. Dann stimmt sein Potential für alle Punkte der Ebene I mit dem des Poles P überein. Für die Ebene II gilt das nicht; vielmehr müssen wir, um auch hier Uebereinstimmung zu erreichen, den Spiegelbildern von P und P' gegen die Ebene II je die Massen $+1$ und -1 erteilen. Fahren wir in dieser Weise fort, bis ins Unendliche hin, so findet schliesslich in beiden Ebenen zugleich Uebereinstimmung statt, und es ist demnach die Green'sche Function das Potential sämtlicher aufeinanderfolgenden Spiegelpunkte des Punktes P gegen die Grenzebenen, versehen mit den abwechselnden Massen ± 1.

Die Aufstellung jenes Ausdruckes hat sonach keine Schwierigkeiten. Wir nehmen die Mittelebene zur yz-Ebene unseres Coordinatensystems und legen die x-Achse durch den Punkt P, dem wir die Coordinate δ erteilen. Die Coordinaten sämtlicher Spiegelpunkte von P werden alsdann:

$$\varkappa\alpha + (-1)^\varkappa \delta,$$

$\varkappa$ wachsend von $+1$ bis $+\infty$ und von -1 bis $-\infty$; die zugehörigen Massen der Spiegelpunkte sind $(-1)^{\varkappa+1}$; so dass die Green'sche Function folgende Form gewinnt:

$$Vi = \frac{1}{\sqrt{(x-\delta)^2 + y^2 + z^2}} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\varkappa \frac{(-1)^{\varkappa+1}}{\sqrt{(\varkappa\alpha + (-1)^\varkappa\delta - x)^2 + y^2 + z^2}}$$

In der Tat hebt sich für die Oberflächenpunkte $x = \pm \alpha/_2$ die letzte Summe fort und wird also $V_i = V_a$. Den übrigen genannten Bedingungen, die wir mit C. Neumann als Hauptbedingungen zusammenfassen wollen, genügt V_i ohne weiteres als Potential äusserer Massen.

Aus V_i resultirt für die Dichtigkeit der Green'schen Massenbelegung beider Ebenen bei Anwendung der oben erwähnten Poisson-schen Gleichung:

$$1.\quad \begin{cases} \eta I = \dfrac{1}{4\pi}\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}{}_{\varkappa} \dfrac{(-1)^{\varkappa+1}\left(\varkappa\alpha+(-1)^{\varkappa}\delta-\frac{\alpha}{2}\right)}{\left\{\left(\varkappa\alpha+(-1)^{\varkappa}\delta-\frac{\alpha}{2}\right)^2+y^2+z^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \\[2ex] \eta II = \dfrac{1}{4\pi}\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}{}_{\varkappa} \dfrac{(-1)^{\varkappa}\left(\varkappa\alpha+(-1)^{\varkappa}\delta+\frac{\alpha}{2}\right)}{\left\{\left(\varkappa\alpha+(-1)^{\varkappa}\delta+\frac{\alpha}{2}\right)^2+y^2+z^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

r geben diesen Ausdrücken die folgende Gestalt:

$$\begin{cases} \eta I = \dfrac{1}{2\pi}\sum\limits_{1}^{\infty}{}_{\varkappa} \dfrac{(-1)^{\varkappa+1}\left(\varkappa\alpha+(-1)^{\varkappa}\delta-\frac{\alpha}{2}\right)}{\left\{\left(\varkappa\alpha+(-1)^{\varkappa}\delta-\frac{\alpha}{2}\right)^2+y^2+z^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \\[2ex] \eta II = \dfrac{1}{2\pi}\sum\limits_{-1}^{-\infty}{}_{\varkappa} \dfrac{(-1)^{\varkappa+1}\left(-\varkappa\alpha-(-1)^{\varkappa}\delta-\frac{\alpha}{2}\right)}{\left\{\left(-\varkappa\alpha-(-1)^{\varkappa}\delta-\frac{\alpha}{2}\right)^2+y^2+z^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

che uns sofort ihre physikalische Bedeutung erkennen lässt;

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{m\delta}{\{\delta^2+y^2+z^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

die Green'sche Belegung einer Ebene $x = c$ (als Grenze des Halbms gedacht) in Bezug auf einen Pol von dem Verticalabstand δ ihr und der Masse m. Danach lautet das gewonnene Resultat:

> „Um die einem inneren Punkt P als Pol entsprechende Green'sche Oberflächenbelegung einer unendlichen Platte zu erhalten, denken wir uns sämtliche aufeinanderfolgenden Spiegelpunkte des Punktes P gegen die Grenzebene der Platte bis ins Unendliche hin construirt. Den beiden ersten Spiegelbildern von P erteilen wir je die Masse $+1$, dem nächsten Paar je die Masse -1 u. s. w. Die so bestimmten unendlich vielen Massenpunkte teilen wir in solche, welche, von P aus betrachtet, jenseits der Ebene I und solche, die jenseits der Grenzebene II der Platte liegen, und bilden nun für die Punkte der ersten Art die ihnen als Pole entsprechenden Green'schen Oberflächenbelegungen der Ebene I (als Grenze des Halbraumes gedacht), für die Punkte zweiter Art die entsprechenden Belegungen für die Grenzebene II.

Denken wir uns endlich die Dichtigkeiten aller dieser Belegungen in jedem Punkt der beiden Ebenen summirt,

so haben wir in dieser Summe die gesuchte Dichtigkeit der Green'schen Oberflächenbelegung der Platte in Bezug auf P."

Hierbei mag bemerkt werden, dass, abgesehen von sogleich mitzuteilenden Beschränkungen, dieser Satz auf jedes beliebige Polyeder auszudehnen ist.

Man hat:

„Construirt man sämtliche Spiegelpunkte des Poles P gegen die Grenzebenen des Polyeders bis ins Unendliche hin, so ist die Green'sche Massenbelegung des Polyeders für jedes der begrenzenden Ebenenstücke gleich der Summe der Dichtigkeiten der Green'schen Belegungen dieser Ebenen (als Grenzen des Halbraums gedacht), gebildet für diejenigen Spiegelpunkte als Pole, welche durch die betreffende Ebene von P getrennt sind. — Die Massen, welche man dabei den Spiegelbildern zu erteilen hat, sind abwechselnd von der Grösse $+1$ oder -1, und zwar erhalten die ersten Spiegelpunkte von P alle die Masse $+1$; den bei der zweiten Spiegelung neu gewonnenen Punkten ist je die Masse -1 zu verleihen u. s. w."

Genauer gilt dieser Satz dann, wenn sämtliche Spiegelpunkte ausserhalb des Polyeders liegen und die erhaltenen Reihen convergiren. Ersteres ist zur Stetigkeit der Green'schen Function erforderlich und ist nur bei denjenigen Polyedern der Fall, deren Grenzebenen unter Winkeln von der Form $\frac{\pi}{n}$ (n eine ganze Zahl) zusammenstossen; letzteres bedarf im allgemeinen einer besonderen Untersuchung, welche in unserem Fall der unendlichen Platte fortfällt, weil, wegen der bis ins Unendliche abnehmenden Glieder mit wechselndem Vorzeichen, die Convergenz unmittelbar klar ist.

Weiter erwähnen wir zu der oben gelösten Aufgabe noch, dass verschiedene Grenzmethoden uns ebenfalls einfach zum Ziel geführt haben würden.

So gelangen wir zu den oben angeführten Resultaten, wenn wir in den Ausdrücken, die C. Neumann mittelst der dipolaren Coordinaten für die Green'sche Oberflächenbelegung zweier ausserhalb einander liegenden Kugeln entwickelt, die Kugelmittelpunkte nach verschiedenen Seiten ins Unendliche rücken lassen. Wir wollen einen anderen derartigen Grenzübergang kurz andeuten, ausgehend von den wohl neuesten Formeln dieser Art, die Mehler in den mathematischen Annalen Bd. 18 („Zur Theorie der Verteilung der Elektricität in leitenden Körpern") S. 469 ff. ableitet. Aus den letzten dort gegebe-

nen Ausdrücken ist als Green'sche Function für zwei concentrische Kugeln von den Radien $a = e^{\varrho_a}$ und $b = e^{\varrho_b}$ ($a < b$, der Raum zwischen ihnen als Conductor gedacht) zu entnehmen,

$$V_i = \frac{1}{e^{2\varrho} + e^{2\varrho_0} - 2\cos\vartheta \,.\, e^{\varrho+\varrho_0}}$$

$$+ \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s \left\{ \frac{e^{\varrho_a - \varrho_0 + s(\varrho_a - \varrho_b)}}{\sqrt{e^{2\varrho} + e^{2\varrho_a + 2\varrho_b - 2\varrho_0 + 2(2s+1)(\varrho_a - \varrho_b)} - 2\cos\vartheta \,.\, e^{\varrho_a + \varrho_b + \varrho - \varrho_0 + (2s+1)(\varrho_a - \varrho_b)}}} \right.$$

$$\left. - \frac{e^{s(\varrho_a - \varrho_b)}}{\sqrt{e^{2\varrho} + e^{2\varrho_0 + 4s(\varrho_a - \varrho_b)} - 2\cos\vartheta \,.\, e^{\varrho_0 + \varrho + 2s(\varrho_a - \varrho_b)}}} \right\}$$

Hier ist der Kugelmittelpunkt als Coordinatenanfang gewählt; die Polarcoordinaten des Poles P sind e^{ϱ_0} ($= \underline{x_0}$), 0,0 und die des variablen Punktes e^{ϱ} ($= \underline{r}$), ϑ, φ. Wir können also auch schreiben:

$$V = \frac{1}{\sqrt{r^2 + x_0^2 - 2 r x_0 \cos\vartheta}}$$

$$+ \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s \left\{ \frac{\frac{a}{x_0} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^s}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{ab}{x_0}\right)^2 \left(\frac{a}{b}\right)^{2(2s+1)} - 2r\frac{ab}{x_0} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{2s+1} \cos\vartheta}} \right.$$

$$\left. - \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^s}{\sqrt{r^2 + x_0^2 \left(\frac{a}{b}\right)^{4s} - 2 r x_0 \left(\frac{a}{b}\right)^{2s} \cos\vartheta}} \right\}$$

Lassen wir nun den Kugelmittelpunkt ins Unendliche rücken, so werden die Zähler der Summenglieder sämtlich 1 und da das erste Glied sich forthebt gegen das 0te Glied der letzten Summe, so sehen wir V_i ist das Potential der Punkte $\frac{ab}{x_0} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{2s+1}$, 0,0, vermindert um das Potential der Punkte $x_0 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{2s}$, 0,0; s wachsend von $-\infty$ bis $+\infty$, nur bei den letzten Punkten das Glied $s = 0$ übersprungen. Führen wir jetzt unsere alten Bezeichnungen und unser altes Coordinatensystem wieder ein, so ist zu setzen:

$$x_0 = a + \frac{\alpha}{2} - \delta$$

$$b = a + \alpha$$

und die Coordinaten der Punkte erster und zweiter Art werden:

$$1)\quad \frac{a+\alpha}{1+\frac{\frac{\alpha}{2}-\delta}{a}}\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{\alpha}{a}}\right)^{2s+1}-a-\frac{\alpha}{2},\ 0{,}0;$$

$$2)\quad \left(a+\frac{\alpha}{2}-\delta\right)\left(\frac{1}{1+\frac{\alpha}{a}}\right)^{2s}-a-\frac{\alpha}{a},\ 0{,}0.$$

Gehen wir hierin zur Grenze für $a = \infty$ über, so wird aus den letzten Ausdrücken:

$$(2s+1)\alpha-\delta, \quad \text{resp.} \quad 2s\alpha+\delta;$$

das aber sind die Coordinaten der Spiegelpunkte von P, und wir haben somit unsere oben abgeleiteten Formeln aus den von Mehler aufgestellten gewonnen.

Die Mehler'schen Untersuchungen sind im übrigen dadurch ausgezeichnet, dass sie die Resultate als Integrale elliptischer Functionen ergeben. Bei unserem Grenzfall, der unendlichen Platte, können genau dieselben Formen wol nicht beibehalten werden, indessen ist es leicht in etwas analoger Weise Integrale von ϑ functionen zu ververwenden, wenn wir uns an eine Bemerkung erinnern, die Riemann bei ähnlicher Gelegenheit macht. (Riemann-Hattendorf: Schwere, Elektricität, Magnetismus S. 89):

Es ist nämlich die Euler'sche Γfunction für das Argument $\frac{1}{2}$:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})=\sqrt{\pi}=\int_0^\infty e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}},$$

oder für $x = N.t$:

$$\frac{1}{\sqrt{N}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_0^\infty\frac{dt}{\sqrt{t}}e^{-Nt};$$

Setzen wir nun $N=(\varkappa\alpha+(-1)^\varkappa\delta-x)^2+y^2+z^2$ und tragen das Ganze in den für V_i gefundenen Ausdruck ein, so ergiebt sich als Green'sche Function der unendlichen Platte:

$$V_i=\frac{1}{\sqrt{(\delta-x)^2+y^2+z^2}}-\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\varkappa}\frac{(-1)^\varkappa}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{dt}{\sqrt{t}}\cdot e^{-t\{(\varkappa\alpha+(-1)^\varkappa\delta-x)^2+y^2+z^2\}}$$

oder, die geraden und ungeraden Glieder getrennt:

$$V_i = \frac{1}{\sqrt{(\delta-x)^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\varkappa} \Big\{ e^{-t[(2\varkappa\alpha+\delta-x)^2+y^2+z^2]} - e^{-t[(2\varkappa\alpha+\alpha-\delta-x)^2+y^2+z^2]} \Big\}$$

Die hier vorkommenden Summen sind direct als Jacobi'sche ϑ function zu schreiben. Wir benutzen die Definition:

$$\vartheta(z, g) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\varkappa}\, e^{n^2 g + 2nz}; \qquad (g < 0)$$

und haben:

$$V_i = \frac{1}{\sqrt{(\delta-x)^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}}\, e^{-t(y^2+z^2)}$$

$$\{ e^{-t(\delta-x)^2}\,\vartheta(2\alpha t(\delta-x),\ -4\alpha^2 t) - e^{-t(\alpha-\delta-x)^2}\,\vartheta(2\alpha . t . (\alpha-\delta-x),\ -4\alpha^2 t) \}$$

In analoger Weise sind die beiden oben (S. 339) erhaltenen Green-schen Oberflächenbelegungen der Platte umzugestalten. Wir geben ihnen zunächst die folgende Form:

$$\left\{\begin{aligned} \eta I &= \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{d\delta}\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\varkappa} \frac{1}{\sqrt{\left(\varkappa\alpha+(-1)^{\varkappa}\delta-\frac{\alpha}{2}\right)^2+z^2+y^2}} \\ \eta II &= -\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{d\delta}\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\varkappa} \frac{1}{\sqrt{\left(\varkappa\alpha+(-1)^{\varkappa}\delta+\frac{\alpha}{2}\right)^2+y^2+z^2}} \end{aligned}\right. .$$

und machen hier wieder die Riemann'sche Substitution.

Es resultirt:

$$\left\{\begin{aligned} \eta I &= \frac{1}{2(\pi)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{d}{d\delta}\cdot\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}}\, e^{-t\left[y^2+z^2+\left(\delta-\frac{\alpha}{2}\right)^2\right]} \cdot \vartheta\left[2\alpha t\left(\frac{\alpha}{2}-\delta\right),\ -4\alpha^2 t\right] \\ \eta II &= \frac{-1}{2(\pi)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{d}{d\delta}\cdot\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}}\, e^{-t\left[y^2+z^2+\left(\frac{\alpha}{2}+\delta\right)^2\right]} \cdot \vartheta\left[2\alpha t\left(\frac{\alpha}{2}+\delta\right),\ -4\alpha^2 t\right] \end{aligned}\right.$$

Nach diesen einfacheren Betrachtungen sind wir in den Stand gesetzt, die Lösung der betreffenden Aufgaben für complicirtere Poly-

eder, namentlich für den Fall des Parallelepipedons, fast unmittelbar hinzuschreiben. Wir betrachten nur den letzteren Körper; seine Kantenlängen (resp. parallel der xyzachse) nennen wir $\alpha\beta\gamma$, den Coordinatenanfang verlegen wir in den Mittelpunkt und verstehen unter abc die Coordinaten des Pols. Wir denken uns ferner sämtliche Spiegelpunkte des Pols gegen die sechs Grenzebenen bis ins Unendliche hin construirt — ihre Coordinaten sind

$$\varkappa\alpha+(-1)^\varkappa a, \quad \lambda\beta+(-1)^\lambda b, \quad \mu\gamma+(-1)^\mu c$$

— und erteilen ihnen die Massen $(-1)^{\varkappa+\lambda+\mu+1}$.

Alle Spiegelpunkte erhalten wir, wenn wir $\varkappa$, λ, μ je von $-\infty$ bis $+\infty$ wachsen lassen und sämtliche Combinationen, mit Ausschluss von $\varkappa=0$, $\lambda=0$, $\mu=0$, bilden; denn letztere ergiebt den Punkt P selbst.

Die Green'sche Function für das Parallelepipedon wird demnach lauten:

$$V_i = \frac{1}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}}$$

$$+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\varkappa}\sum_{\lambda}\sum_{\mu} \frac{(-1)^{\varkappa+\lambda+\mu+1}}{\sqrt{[\varkappa\alpha+(-1)^\varkappa a-x]^2+[\lambda\beta+(-1)^\lambda b-y]^2+[\mu\gamma+(-1)^\mu c-z]^2}}$$

von der leicht zu übersehen ist, dass sie in der Tat allen Anforderungen genügt. Wir machen wieder die Riemann'sche Substitution und erhalten bei Anwendung der Abkürzungen:

$$\begin{cases} E = \sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2} \\ E_{\varkappa\lambda\mu} = \sqrt{[\varkappa\alpha+(-1)^\varkappa a-x]^2+[\lambda\beta+(-1)^\lambda b-y]^2+[\mu c+(-1)^\mu c-z]^2} \end{cases}$$

$$V_i = \frac{1}{E}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\varkappa}\sum_{\lambda}\sum_{\mu}(-1)^{\varkappa+\lambda+\mu+1}\cdot e^{-tE^2_{\varkappa\lambda\mu}}$$

$$= \frac{1}{E}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}}\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\varkappa}(-1)^\varkappa e^{-t[\varkappa\alpha+(-1)^\varkappa a-x]^2}\right\}$$

$$\cdot\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\lambda}(-1)^\lambda e^{-t[\lambda\beta+(-1)^\lambda b-y]^2}\right\}\cdot\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\mu}(-1)^\mu e^{-t[\mu\gamma+(-1)^\mu c-z]^2}\right\}$$

oder bei Einführung der Jacobi'schen ϑfunction:

[redacted]

$$Vi = \frac{1}{E} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} \Big\{ e^{-t(a-x)^2} \vartheta\,(2at\,(a-x),\ -4a^2t)$$

$$- e^{-t(\alpha-x-a)^2} \vartheta\,(2at\,(\alpha - x - a))\Big\}\,.$$

$$.\Big\{ e^{-t(b-y)^2} \vartheta\,(2\beta t\,(b-y),\ -4\beta^2 t) - e^{-t(\beta-y-b)^2} \vartheta\,(2\beta t\,(\beta - y - b))\Big\}\,.$$

$$.\Big\{ e^{-t(c-z)^2} \vartheta\,(2\gamma t\,(c-z),\ -4\gamma^2 t) - e^{-t(\gamma-z-c)^2} \vartheta\,(2\gamma t\,(\gamma - z - c))\Big\}$$

Ebenso unmittelbar ergiebt der allgemeine, S. 5 genannte, Satz die Green'sche Oberflächenbelegung für die einzelnen Grenzebenen des Parallelepipedons.

Für die Ebene $x = +\frac{\alpha}{2}$ z. B. folgt:

$$\eta I = \frac{1}{2\pi} \sum_{+1}^{+\infty}{}_{\varkappa} \overline{\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\lambda} \sum{}_{\mu}}$$

$$\frac{(-1)^{\varkappa+\lambda+\mu+1}\left(\varkappa\alpha + (-1)^\varkappa a - \frac{\alpha}{2}\right)}{\left[\left(\varkappa\alpha + (-1)^\varkappa a - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + (\lambda\beta + (-1)^\lambda b - y)^2 + (\mu\gamma + (-1)^\mu (c - z)^2\right]^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \frac{d}{da} \sum{}_{\varkappa} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\lambda} \sum{}_{\mu}$$

$$\frac{(-1)^{\lambda+\mu}}{\sqrt{\left(\varkappa\alpha + (-1)^\varkappa a - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + (\lambda\beta + (-1)^\lambda b - y)^2 + (\mu\gamma + (-1)^\mu c - z)^2}}$$

oder in ϑ functionen geschrieben:

$$\eta I = \frac{1}{2\,(\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{d}{da} \int\limits_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} e^{-t\left(\frac{\alpha}{2} - a\right)^2} \vartheta\,\left(2at\left(\frac{\alpha}{2} - a\right),\ -4a^2 t\right).$$

$$.\{ e^{-t(b-y)^2} \vartheta(2\beta t\,(b-y),\ -4\beta^2 t) - e^{-t(\beta-y-b)^2} \vartheta(2\beta t\,(\beta - y - b,\ -4\beta^2 t)\}.$$

$$.\{ e^{-t(c-z)^2} \vartheta(2\gamma t\,(c-z),\ -4\gamma^2 t) - e^{-t(\gamma-z-c)^2} \vartheta\,(2\gamma t\,(\gamma - z - c),\ -4\gamma^2 t)\}$$

Genau entsprechend sind die Ausdrücke ηII und ηIII, die Belegungen der Ebenen $y = \frac{\beta}{2}$ und $z = \frac{\gamma}{2}$ gebildet, und für das Ebenenstück $x = -\frac{\alpha}{2}$ ergiebt sich:

$$\eta IV = \frac{-1}{4\pi}\frac{d}{da}\Sigma_\varkappa \overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\Sigma_\lambda}} \Sigma_\mu \frac{(-1)^{\lambda+\mu}}{\sqrt{\left(\varkappa\alpha+(-1)^\varkappa a+\frac{\alpha}{2}\right)^2+(\lambda\beta+(-1)^\lambda b-y)^2+(\mu\gamma+(-1)^\mu c-z)^2}}$$

oder nach der bekannten Umformung:

$$\eta IV = \frac{-1}{2(\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{d}{da}\cdot\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} e^{-t\left(\frac{\alpha}{2}+a\right)^2} \vartheta\left(2\alpha t\left(\frac{\alpha}{2}+a\right), \; -4\alpha^2 t\right).$$

$$.\{e^{t(b-y)^2}\vartheta(2\beta t(b-y), \; -4\beta^2 t) - e^{-t(\beta-b-y)^2}\vartheta(2\beta t(\beta-b-y))\}.$$

$$.\{e^{-t(c-z)^2}\vartheta(2\gamma t(c-z), \; -4\gamma^2 t) - e^{-t(\gamma-c-z)^2}\vartheta(2\gamma t(\gamma-c-z))\}$$

Ohne auf eine nähere Discussion dieser Formeln eingehen zu können, bemerken wir nur – wie aus den Formeln in ϑ unmittelbar ersichtlich, dass ηI wie ηIV für $y = \frac{\beta}{2}$ oder $z = \frac{\gamma}{2}$ verschwinden; allgemein, dass die Green'sche Oberflächenbelegung in jedem Punkt jeder Kante des Parallelepipedons 0 ist. Das muss so sein, denn es gilt überhaupt von jeder stetigen Belegung jedes mit Kanten behafteten Körpers; es ist eine notwendige Vorbedingung der Stetigkeit; im anderen Falle kann die Belegung keine zusammenhangende Oberfläche bilden.

II.

Strömung der Elektricität auf dem Parallelepipedon.

Die Aufgaben, welche uns hier zu beschäftigen haben, sind folgender Natur:

> Gegeben ist ein Conductor von bestimmter Gestalt. Durch einen dünnen Draht tritt ein elektrischer Strom in einem Punkt der Oberfläche ein, in einem anderen wieder aus.
>
> Zu bestimmen sind die Werte des Gesamtpotentials für jeden Punkt des Conductors; womit dann auch die Flächen constanten Potentials, sowie die Strömungscurven der Elektricität an der Oberfläche definirt sind.

Zur Lösung verwenden wir eine Methode, die C. Neumann in den letzten Capiteln seiner Vorlesung über Elektrostatik (Ostern 1884/85) vorführt.

Unter Zugrundelegung der Kirchhoff'schen Hypothesen über den stationären Zustand wird dort als Gesamtpotential für jeden Punkt x_p, y_p, z_p des gegebenen Conductors abgeleitet:

$$V_p = \frac{J}{4\pi\varkappa}\left\{\left(U^p - \frac{1}{E_p}\right)_B - \left(U^p - \frac{1}{E_p}\right)_A\right\}$$

hierin bedeutet J die Stromintensität, $\varkappa$ die Leitungsfähigkeit des Conductors, A und B sind Ein- resp. Austrittsstelle des Stromes und ihre Coordinaten sind für die allgemeinen Coordinaten x, y, z in die Klammerausdrücke einzutragen. In den letzteren endlich ist

$$E_p = \sqrt{(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2 + (z_p - z)^2}$$

und U^p eine in jedem Falle besonders zu bestimmende Function, welche durch folgende Bedingungen eindeutig bestimmt ist:

> Innerhalb des Conductors ist U^p mit seinen ersten Ableitungen überall eindeutig und stetig, auch ist hier überall $\triangle U^p = 0$; an allen Oberflächenpunkten genügt sie der Differentialgleichung:
>
> $$\frac{d\overline{U^p}}{dn} - \frac{d\overline{\frac{1}{E_p}}}{dn} = -\frac{4\pi}{s}$$

wo s die Oberfläche des Conductors repräsentirt, n die innere Oberflächennormale.

Die Gewinnung der Resultate nach dieser Methode für das Parallelepipedon wird auch hier durch vorherige Betrachtung einfacherer Fälle erleichtert.

Wir beginnen mit dem einfachsten Fall dieser Art, indem wir uns als Conductor den Halbraum, begrenzt durch die Ebene $x = \delta$ denken.

Zunächst wird uns die Bestimmung von U^p beschäftigen. Wir construiren den Spiegelpunkt von p und erteilen ihm die Masse -1. Das Potential dieses Massenpunktes genügt, da $s = \infty$ ist, allen an U^p gestellten Bedingungen; es ist daher hier:

$$U^p = \frac{-1}{\sqrt{(2\delta - x_p - x)^2 + (y_p - y)^2 + (z_p - z)^2}}$$

und aus der oben genannten Relation folgt für die Gleichung der Flächen constanten Potentials:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{(2\delta-x_p-x)^2+(y_p-y)^2+(z_p-z)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x_p-x)^2+(y_p-y)^2+(z_p-z)^2}}\right\}_A$$

$$-\left\{\frac{1}{\sqrt{(2\delta-x_p-x)^2+(y_p-y)^2+(z_p-z)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x_p-x)^2+(y_p-y)^2+(z_p-z)^2}}\right\}_B$$

$$= \text{const.}$$

Die allgemeinste Lage erteilen wir den Punkten A und B, wenn wir als ihre xyz Cordinaten resp. festsetzen δ, b, 0 und δ, $-b$, 0. Die Flächen constanten Potentials sind alsdann:

$$\frac{1}{\sqrt{(\delta-x_p)^2+(y_p-b)^2+z_p^2}}-\frac{1}{\sqrt{(\delta-x_p)^2+(y_p+b)^2+z_p^2}} = \text{const.}$$

Wir suchen vor allem die Curven constanten Potentials an der Oberfläche des Conductors und haben als solche die Curven:

$$\frac{1}{\sqrt{z_p^2+(y_p-b)^2}}-\frac{1}{\sqrt{z_p^2+(y_p+b)^2}} = \text{const.}$$

Für alle Punkte einer solchen Curve ist also die Differenz ihrer reciproken Abstände von der Ein- und Austrittsstelle des Stromes eine constante Grösse, und wir bezeichnen sie wegen dieser an die Hyperbel erinnernden Definition vor der Hand als „reciproke Hyperbeln".

Eine Behandlung dieser Curvengattung ist uns nicht bekannt, und wir wollen daher mit einigen Worten ihre Gestalt erläutern, wie auch im Anhang ein allgemeines Bild ihrer Form gegeben ist.

Bringen wir die Definitionsgleichung der „reciproken Hyperbel" auf die algebraische Form, so gelangen wir zu einer wenig übersichtlichen Gleichung 8. Grades, die noch dazu nicht nur unsere Curve $\frac{1}{E_A}-\frac{1}{E_B} = \text{const.}$, sondern auch die reciproke Ellipse

$$\frac{1}{E_A}+\frac{1}{E_B} = \text{const.}$$

umfasst, wegen des doppelten Vorzeichens der Wurzeln.

Dagegen hat es gar keine Schwierigkeiten die einzelnen Punkte unserer Curve zu construiren, wenn wir nur ihre Definitionsgleichung in folgende zwei, gleichzeitig zu erfüllende, Gleichungen zerlegen:

$$1)\quad \frac{1}{\sqrt{z_p^2+(y_p-b)^2}} = a$$

$$2)\ \frac{1}{\sqrt{z_p^2+(y_p+b)^2}}=a-c;$$

und hierin a alle möglichen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen lassen.

Wir erhalten demnach die Punkte unserer Curve, wenn wir um die Eintrittsstelle einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{a}$, um die Austrittsstelle einen solchen mit dem Radius $\frac{1}{a-c}$ beschreiben und die Schnittpunkte beider markiren.

Für die Natur der reciproken Hyperbel erhellt daraus unmittelbar, dass sie, analog der eigentlichen Hyperbel symmetrisch zur Axe AB (der grossen Axe) liegt; ebenso wird sie auch aus zwei congruenten, zur kleinen Axe symmetrischen Aesten bestehen, wenn man nämlich, wie bei der Hyperbel, c nur absolut betrachtet, die positiven und negativen Werte nicht scheidet: Die Curve $\frac{1}{E}-\frac{1}{E'}=c$ wird sich genau so um den einen Punkt herumziehen, wie die Curve $\frac{1}{E'}-\frac{1}{E}=c$ um den andern.

Endlich sind auch die beiden Grenzcurven $c=0$ und $c=[\infty]$ ohne weiteres abzulesen: $c=0$ ergibt die $y$axe, doppelt überdeckt zu denken wie bei der Hyperbel selbst; $c=\infty$ repräsentirt die beiden Punkte A und B. Zwischen beiden Grenzcurven ziehen sich die übrigen als congruente Ovale um A und B herum. Um die einzelnen zu erhalten, werden wir die Radien $\left(\frac{1}{a}\text{ und }\frac{1}{a-c}\right)$ der betreffenden Kreise für die verschiedenen Werte von a tabellarisch zusammenstellen und dann ermitteln, welche dieser Kreise gewünschte Schnittpunkte liefern.

Für die reciproke Hyperbel $c=1$ z. B. entwerfen wir die folgende Tabelle:

a	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a-1}$	
$-\infty$	0	0	
-10	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{11}$	α
-1	-1	$-\frac{1}{2}$	
$-\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{5}$	β
$-\frac{1}{3}$	-3	$-\frac{3}{4}$	
$-\frac{1}{4}$	-4	$-\frac{4}{5}$	
0	∞	-1	γ
$\frac{1}{4}$	4	$-\frac{4}{3}$	
$\frac{1}{3}$	3	$-\frac{3}{2}$	δ
$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	-3	
$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{4}$	-5	
1	1	∞	ε
$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$	3	
$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	2	ζ
$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{2}$	
2	$\frac{1}{2}$	1	
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	η
∞	0	0	

Nehmen wir alsdann noch als Abstand der Punkte AB die Grösse 2 an, so liegen die in Frage kommenden Kreise ausserhalb einander in den Intervallen α und η der Tabelle; in den Intervallen β und ζ schneiden sie sich in den Punkten der reciproken Hyperbel; in γ und ε umschliesst ein Kreis den andern, und in δ endlich stellt sich die „reciproke Ellipse" ein, denn hier ist

$$\left[\frac{1}{E}\right]+\left[\frac{1}{E'}\right]=1.$$

Die letztgenannte Curve ist hier nicht zu betrachten; sie besteht zunächst ebenfalls aus zwei congruenten Ovalen um A und B herum geht aber mit wachsendem c in ellipsenförmige Gebilde (A und B umschliessend) über und hat als Grenzlage die unendlich grosse Curve.

Nachdem wir somit ermittelt haben, in welchen Curven die Flächen constanten Potentials von der Oberfläche des Conductors geschnitten werden, sind uns diese Flächen selbst ebenfalls bekannt. Es sind die Rotationsflächen der reciproken Hyperbel um die grosse Axe AB; wir haben sie als zweischalige reciproke Rotationshyperboloide zu bezeichnen.

In einem zweiten vorläufigen Specialfalle betrachten wir einen Conductor von der Form eines senkrechten unendlichen Keils. Zu dem Punkte p, in Bezug auf den wir das Gesamtpotential suchen, construiren wir die drei Spiegelpunkte gegen die Ebenen des Conductors und haben alsdann in dem negativen Potential dieser drei, je mit der Masse 1 versehenen, Punkte die zu suchende Function U^p.

Dass diese Function

$$U^p = \left\{\frac{-1}{\sqrt{(x_p+x)^2+(y_p-y)^2+(z_p-z)^2}} + \frac{-1}{\sqrt{(x_p+x)^2+(y_p+y)^2+(z_p-z)^2}}\right.$$
$$\left. + \frac{-1}{\sqrt{(x_p-x)^2+(y_p+y)^2+(z_p-z)^2}}\right\}$$

in der Tat den an U gestellten Bedingungen genügt, ist unmittelbar zu übersehen, und die Flächen constanten Potentials sind in jedem Falle leicht daraus herzustellen.

Verschiedene specielle Annahmen über Ein- und Austrittsstelle des Stromes führen zu interessanten Resultaten, um aber nicht zu sehr ins Detail zu geraten, greifen wir nur den einfachsten Fall heraus, wo beide Punkte A und B auf der Axe des Keils sich befinden.

Als ihre Coordinaten haben wir alsdann resp. 0, 0, δ und 0, 0, $-\delta$ und die Flächen constanten Potentials werden repräsentirt durch die Gleichung:

$$\frac{1}{\sqrt{x_p^2+y_p^2+(z_p-\delta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_p^2+y_p^2+(z_p+\delta)^2}} = c.$$

Es sind das dieselben Flächen, wie wir sie für den Halbraum als Conductor erhielten: ihre Schnitte mit den Grenzebenen sind reciproke Hyperbeln, sie selbst Rotationsflächen der letzteren um die grosse Axe.

Die planparallele unendliche Platte mag den letzten zu untersuchenden Specialfall bilden.

Auch hier nehmen wir sämtliche aufeinander folgenden Spiegelpunkte bis ins Unendliche hin von p hinzu, und setzen U^p gleich dem negativen Potential der letzteren, schreiben also, unter Benutzung der Bezeichnungsweise des I. Abschnitts:

$$U^p = \frac{1}{\sqrt{(x_p-x)^2+(y_p-y)^2+(z_p-z)^2}}$$
$$-\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\varkappa} \frac{1}{\sqrt{(\varkappa a+(-1)^{\varkappa}x_p-x)^2+y_p-y)^2+(z_p-z)^2}}$$

Diese Function genügt, als Potential äusserer Massen, den Hauptbedingungen unmittelbar; weiter aber ist:

$$\left(\frac{dU^p}{dx}\right)_{x=\frac{\alpha}{2}} = \left(\frac{d\frac{1}{E_p}}{dx}\right)_{x=\frac{\alpha}{2}}$$

$$-\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\varkappa} \frac{\varkappa\alpha - \frac{\alpha}{2} + (-1)^{\varkappa} x_p}{\left\{\left(\varkappa\alpha + (-1)^{\varkappa} x_p - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + (y_p - y)^2 + (z_p - z)^2\right\}^{3/2}}$$

$$\left(\frac{dU^p}{dx}\right)_{x=\frac{\alpha}{2}} = \left(\frac{d\frac{1}{E_p}}{dx}\right)_{x=-\frac{\alpha}{2}}$$

$$-\Sigma_{\varkappa} \frac{\varkappa\alpha + \frac{\alpha}{2} + (-1)^{\varkappa} x_p}{\left\{\left(\varkappa\alpha + (-1)^{\varkappa} x_p + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + (y_p - y)^2 + (z_p - z)^2\right\}^{3/2}}$$

und hierin heben sich die Summen Glied für Glied fort, wie es erforderlich ist.

Dagegen begegnen wir hier einer neuen Schwierigkeit, indem für U^p eine nicht unbedingt convergente Reihe gewonnen ist. Um das zu erkennen, benutzen wir den bekannten Lehrsatz, dass eine Reihe ΣU_n convergirt oder divergirt, je nachdem

$$\lim_{n=\infty} n\left(1 - \frac{u_n + 1}{u_n}\right) > 1 \quad \text{oder} \quad < 1.$$

Die vorliegende Reihe formen wir in der Weise um, dass wir den Wurzelausdruck im Nenner nach Potenzen von $(y_p - y)^2 + (z_p - z)^2$ entwickeln. Die Factoren der 1., 2. etc. Potenz nähern sich mit wachsendem $\varkappa$ unbegrenzt der Null und genügt es daher, folgende Reihe zu untersuchen:

$$\Sigma U_n = \Sigma \frac{1}{(\varkappa\alpha + (-1)^{\varkappa} x_p - x + c}:$$

Für dieselbe ist

$$\lim \varkappa\left(1 - \frac{u_{\varkappa+1}}{u_{\varkappa}}\right) = \lim \varkappa\left(1 - \frac{\varkappa\alpha + (-1)^{\varkappa} x_p - x + c}{\varkappa\alpha + \alpha - (-1)^{\varkappa} x_p - x + c}\right)$$

$$= \lim \frac{\varkappa(\alpha^{\varkappa} - (-1)^{\varkappa} 2x_p)}{\varkappa\alpha + \alpha - (-1)^{\varkappa} x_p - x + c}$$

$$= 1 - (-1)^{\varkappa} \frac{2x_p}{\alpha}$$

und dieser Wert ist dann, und nur dann > 1, wenn $\varkappa$ ungerade ist,

da $\frac{2x_p}{\alpha}$ stets ein ächter Bruch ist. Geht $\varkappa$ durch die negativen Zahlen ins Unendliche, wie es hier auch zu untersuchen ist, so kommt die Reihe:

$$\overset{\infty}{\underset{n}{\Sigma}} U_n = \frac{1}{-\varkappa\alpha + (-1)^\varkappa x_p - x + c}$$

in Betracht; obiger Grenzwert ist alsdann:

$$-\left(1 + (-1)^\varkappa \frac{2x_p}{\alpha}\right)$$

und er ist > 1 für $\varkappa$ gerade.

Wir sehen also, unsere Reihe für U_p ist an sich nicht unbedingt convergent; zugleich aber lehrt die letzte Betrachtung, dass die erwünschte Convergenz erreicht wird, wenn wir nur je zwei aufeinander folgende Glieder unserer Reihe zusammenfassen, eins mit geradem, eins mit ungeradem $\varkappa$, letzteres mit dem grösseren Wert von $\varkappa$ in der Zahlenreihe. Mit anderen Worten, wir haben zu setzen:

$$U^p = \frac{1}{\sqrt{(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2 + (z_p - z)^2}}$$
$$-\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\varkappa} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(2\varkappa\alpha + x_p - x)^2 + r^2}} + \frac{1}{\sqrt{(2\varkappa\alpha + \alpha - x_p - x)^2 + r^2}} \right\}$$
$$r^2 = (y_p - y)^2 + (z_p - z)^2.$$

Dass diese Reihe in der Tat convergirt, ergibt auch eine neue Anwendung des erwähnten Convergenzsatzes auf dieselbe.

Eine andere Form für U^p liefert die im ersten Teil mehrfach verwendete Riemann'sche Substitution:

$$\frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} e^{-Nt}$$

in den letzten Ausdruck.

Es resultirt

$$U^p = \frac{1}{\sqrt{(x_p - x)^2 + (y_p - x)^2 + (z_p - z)^2}}$$
$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} e^{-tr^2} \left\{ e^{-t(x_p - x)^2} \vartheta(2\alpha t(x_p - x), -4\alpha^2 t) \right.$$
$$\left. + e^{-t(x_p + x - \alpha)^2} \vartheta(2\alpha t(x_p + x - \alpha), -4\alpha^2 t) \right\},$$

Nach Aufstellung von U^p sind die Flächen constanten Potentials nach bekannter Methode zu finden. Wir haben zwei Fälle zu scheiden. Im ersten a) liegen Ein- und Austrittsstelle des Stromes auf derselben Grenzebene der Platte, im zweiten Falle b) auf verschiedenen Grenzebenen.

Im Falle a) sind als Coordinaten der Punkte A und B resp. anzunehmen: $\frac{\alpha}{2}$, b, 0 und $\frac{\alpha}{2}$, $-b$, 0; die Flächen constanten Potentials werden alsdann (gleich in ϑ ausgedrückt):

$$c = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} e^{-t\left[z_p^2 + \left(\frac{\alpha}{2} - x_p\right)^2\right]} \left\{e^{-t(y_p-b)^2} - e^{-t(y_p+b)^2}\right\} \vartheta\left(2\alpha t\left(\frac{\alpha}{2} - x_p\right), -4\alpha^2 t\right).$$

Im Falle b) sind die betreffenden Coordinaten ganz allgemein, $\frac{\alpha}{2}$, b, 0, und $-\frac{\alpha}{2} - b$, 0, die Flächen constanten Potentials lauten zunächst:

$$c = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} e^{-t\left[z_p^2 + (y_p - b)^2 + \left(x_p - \frac{\alpha}{2}\right)^2\right]} . 2\vartheta\left(\alpha t\left(x_p - \frac{\alpha}{2}\right), -4\alpha^2 t\right)$$

$$-\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} e^{-t[z_p^2 + (y_p+b)^2]}$$

$$\left\{e^{-t\left(x_p + \frac{\alpha}{2}\right)^2} \vartheta\left(2\alpha t\left(x_p + \frac{\alpha}{2}\right)\right) + e^{-t\left(x_p - \frac{3\alpha}{2}\right)} . \vartheta\left(2\alpha t\left(x_p - \frac{3\alpha}{2}\right)\right)\right\}$$

Nach dem Satze $\vartheta(z, g) = e^{g+2z} \vartheta(z+g, g)$ sind aber die beiden Summanden des letzten Gliedes gleich und kommt daher für die Fächen constanten Potentials:

$$c = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} e^{-tz_p^2} \left\{e^{-t\left[\left(\frac{\alpha}{2} - x_p\right)^2 + (y_p - b)^2\right]} . \vartheta\left(2\alpha t\left(\frac{\alpha}{2} - x_p\right), -4\alpha^2 t\right)\right.$$

$$\left. - e^{-t\left[\left(\frac{\alpha}{2} + x_p\right)^2 + (y_p + b)^2\right]} . \vartheta\left(2\alpha t\left(\frac{\alpha}{2} + x_p\right), -4\alpha^2 t\right)\right\}$$

Die Flächen beider Arten sind im allgemeinen von sehr com-

plicirter Beschaffenheit und können hier nicht näher untersucht werden.

Zu einfachen Resultaten gelangen wir nur dann, wenn die Punkte A und B in gegenüberliegenden Punkten der Platte sich befinden; d. h. in unserm zweiten Fall bei der Annahme $b=0$. Dann nämlich kommen in unserer Flächengleichung die Coordinaten y_p und z_p nur in der Verbindung $y_p^2+z_p^2$ vor; es sind also die Flächen constanten Potentials Rotationsflächen um die Axe AB. Das ergiebt weiter als Niveaucurven an der Oberfläche des Conductors die Kreise um A resp. um B; als Strömungscurven der Elektricität die von A und B ausgehenden Geraden.

Nach Behandlung dieser verschiedenen Specialfälle ist unsere eigentliche Aufgabe leicht zu erledigen. Die drei Kantenlängen des Parallelepipedons seien α, β, γ. Setzen wir alsdann, ganz analog den bisherigen Ergebnissen

$$U^p{}_1 = \frac{1}{\sqrt{(x_p-x)^2+(y_p-y)^2+(z_p-z)^2}}$$
$$-\sum_\varkappa \sum_{\lambda}{}_{-\infty}^{+\infty} \sum_\mu \frac{1}{\sqrt{(\varkappa\alpha+(-1)^\varkappa x_p-x)^2+(\lambda\beta+(-1)^\lambda y_p-y)^2+(\mu\gamma+(-1)^\mu z_p-z)^2}}$$

so genügt diese Function den an U zu stellenden Hauptbedingungen und ausserdem ist für alle Oberflächenpunkte

$$\frac{dU^p{}_1}{dn} - \frac{d\frac{1}{E^p}}{dn} = 0.$$

Da nun in diesem Fall nicht, wie sonst, $s=\infty$ ist, so müssen wir, um U für Parallelepipedon zu erhalten, noch eine neue Function f hinzufügen, die im Innern des Conductors überall den Hauptbedingungen (f, $\frac{df}{dx}$ ... eindeutig und stetig) genügt und in den Oberflächenpunkten die Gleichung

$$\frac{df}{dn} = -\frac{4\pi}{s}$$

erfüllt. Die letzte Bedingung wird befriedigt durch die unendlich vieldeutige Function

$$\frac{4\pi}{s(2n+1)}\left\{\frac{x^{2n+1}}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2n}}+\frac{y^{2n+1}}{\left(\frac{\beta}{2}\right)^{2n}}+\frac{z^{2n+1}}{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2n}}\right\}$$

für jeden Wert von n; im allgemeinen aber erfüllen diese Functionen die Hauptbedingungen nicht. Das geschieht vielmehr nur in dem Falle $n = 0$, und wir haben daher zu setzen:

$$f = \frac{4\pi}{s}(x+y+z)$$

$$U^p = \frac{4\pi}{s}(x+y+z) + \frac{1}{\sqrt{(x_p-x)^2+(y_p-y)^2+(z_p-z)^2}}$$

$$-\sum_{\varkappa}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\lambda}\sum_{\mu}\frac{1}{\sqrt{(\varkappa\alpha+(-1)^{\varkappa}x_p-x)^2+(\lambda\beta+(-1)^{\lambda}y_p-y)^2+(\mu\gamma+(-1)^{\mu}z_p-z)^2}}$$

Die Riemann'sche Substitution giebt für die letzte Grösse die andere Form:

$$U^p = \frac{4\pi}{s}(x+y+z) + \frac{1}{E_p} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}} \times$$

$$\left\{e^{-t(x_p-x)^2}\vartheta(2\alpha t(x_p-x), -4\alpha^2 t) + e^{-t(x_p+x-\alpha)^2}\vartheta(2\alpha t(x_p+x-\alpha))\right\}$$

$$\cdot\left\{e^{-t(y_p-y)^2}\vartheta(2\beta t(y_p-y), -4\beta^2 t) + e^{-t(y_p+y-\beta)^2}\vartheta(2\beta t(y_p+y-\beta))\right\}$$

$$\cdot\left\{e^{-t(z_p-z)^2}\vartheta(2\gamma t(z_p-z), -4\gamma^2 t) + e^{-t(z_p+z-\gamma)^2}\vartheta(2\gamma t(z_p+z-\gamma))\right\}$$

und zwar ist diese Form als die allein strenge anzusehen. Denn, analog wie bei der unendlichen Platte, wird auch hier eine Reihe, welche U^p in der ersten Form darstellt, nur bei geeigneter Zusammenfassung der Glieder convergiren.

Diese geeignete Zusammenfassung ist aber bei Einführung der ϑ-functionen von selbst erforderlich; weshalb die letzte Form allein allen Anforderungen genügt.

Jm Uebrigen vermittelt U^p die Aufstellung der Flächen constanten Potentials ohne weiteres in jedem speciellen Fall. Legen wir z. B. die Punkte A und B in die Mittelpunkte zweier gegenüberliegenden Seitenflächen des Conductors, setzen also als ihre Coordinaten resp. $\frac{\alpha}{2}$, ,0 0 und $-\frac{\alpha}{2}$, 0, 0 fest; so werden wir nach einfachen Umformungen erhalten als Gleichung der Flächen:

$$V = c$$

$$s = \int_0^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}}\left\{e^{-ty_p^2}\vartheta(2\beta t y_p) + e^{-t(y_p-\beta)^2}\vartheta(2\beta t(y_p-\beta))\right\} \times$$

[redacted]

$$\cdot \left\{ e^{-tz_p^2} \vartheta(2\gamma t z_p) + e^{-t(z_p-\gamma)^2} \vartheta(2\gamma t(z_p-\gamma)) \right\}$$

$$\cdot \left\{ e^{-t\left(x_p-\frac{\alpha}{2}\right)^2} \vartheta\left(2\alpha t\left(x_p-\frac{\alpha}{2}\right)\right) - e^{-t\left(x_p+\frac{\alpha}{2}\right)^2} \vartheta\left(2\alpha t\left(x_p+\frac{\alpha}{2}\right)\right) \right\}$$

Sind andererseits zwei gegenüberliegende Ecken des Parallelepipedons $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}\right.$ und $\left.-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}, -\frac{\gamma}{2}\right)$ Ein- resp. Austrittsstelle des Stromes, so lautet die gesuchte Gleichung:

$$c = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} \left\{ e^{-t\left[\left(x_p-\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y_p-\frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(z_p-\frac{\gamma}{2}\right)^2\right]} \times \right.$$

$$\vartheta\left(2\alpha t\left(x_p-\frac{\alpha}{2}\right)\right) \vartheta\left(2\beta t\left(y_p-\frac{\beta}{2}\right)\right) \vartheta\left(2\gamma t\left(z_p-\frac{\gamma}{2}\right)\right)$$

$$- e^{-t\left[\left(x_p+\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y_p+\frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(z_p+\frac{\gamma}{2}\right)^2\right]} \times$$

$$\left. \vartheta\left(2\alpha t\left(x_p+\frac{\alpha}{2}\right)\right) \vartheta\left(2\beta t\left(y_p+\frac{\beta}{2}\right)\right) \vartheta\left(2\gamma t\left(z_p+\frac{\gamma}{2}\right)\right) \right\}.$$

Unsere Aufgabe ist damit als gelöst zu betrachten.

XIII.

Ueber singuläre Punkte der gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades.

Von

C. F. E. Björling,

Professor an der Universität Lund.

---

§ 1. Die Differentialgleichung

(1) $$X dx + Y dy = 0 \quad \text{oder} \quad X + pY = 0,$$

wo X, Y algebraische, rationale und ganze Functionen von x, y sind, bestimmt für jedes Wertpaar dieser Veränderlichen (jeden Punkt der Ebene) eine einzige Fortschreitungsrichtung. Ausnahme davon bilden die Punkte, deren Coordinaten den Bedingungen $X = 0$, $Y = 0$ genügen; dieselben werden singuläre benannt.

Das Verhalten der von der Differentialgleichung definirten Functionen in der Umgebung solcher Punkte ist in der bekannten Abhandlung von Briot und Bouquet[1]) untersucht worden. Von ihren Nachfolgern auf demselben Gebiete seien hier nur Poircaré[2]) und Fuchs[3]) erwähnt.

---

1) Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles. § III. Journal de l'éc. polytechn. T. XXI.

2) Sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles. Journ. de l'éc. pol. XXVIII.

3) Ueber die Werte, welche die Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung in singulären Punkten annehmen können. Sits. Ber. d. K. Preuss. Ak. d. Wiss. 1866.

Der Gegenstand verdient jedoch wol auch in einer etwas anderen Hinsicht untersucht zu werden, und eine Vergleichung mit den singulären Punkten der algebraischen Curven dürfte hier an ihrem Platze sein. Man hat diese Punkte aus zwei verschiedenen Gesichtspunkten, dem functionentheoretischen und dem geometrischen behandelt. Auf der einen Seite hat man — und in dieser Hinsicht ist wol Puiseux an erster Stelle zu nennen — die Bedeutung dieser Punkte als kritische oder „Verzweigungspunkte" für die von der Curvengleichung definirten algebraischen Function untersucht; auf der andern hat man, und zwar seit einer weit entfernteren Zeit, die Fragen nach der Anzahl und der Beschaffenheit der Tangenten und Zweige, die die Curve in einem solchen Punkte besitzt, behandelt und damit auch, insoweit es sich um reelle Veränderliche handelt, die Form der Curve in der nächsten Umgebung des Punktes auszumitteln, d. h. dieselbe zu construiren, versucht.

Die entsprechende geometrische Untersuchung der Singularitäten der durch die gewöhnlichen Differentialgleichungen definirten ebenen Curven scheint sich bisher hauptsächlich, oder fast ausschliessend, auf jene Gleichungen von höheren Graden als dem ersten gerichtet. Die s. g. singuläre Lösung, oder richtiger die Coincidenzcurve dieser Gleichungen, die bekanntlich nach den Entdeckungen von De Morgan (Transactions of the Cambr. Phil. Soc., Vol. 9) und Darboux (Bulletin d. sciences mathém., 1873) im allgemeinen Falle der Ort der Spitzen der Integralcurven ist, ist seit ehedem ein beliebter Gegenstand der mathematischen Forschung gewesen. In den Gleichungen ersten Grades kann bekanntlich eine solche Curve niemals vorkommen; statt derselben treten da nur einzelne singuläre Punkte auf. Ueber diese ist dem Verf. keine andere Untersuchung in der hier fraglichen Richtung bekannt, als eine Arbeit von Poincaré, zu welcher er hier unten am Schlusse zurückkommen wird. Die vollständige Erörterung der Theorie von diesen Punkten ist wol jedoch als eine Bedingung für ein erfolgreiches Studium der Singularitäten der Gleichungen höherer Gerade zu betrachten, und zwar aus mehreren Gründen. Von diesen mögen nur zwei hier erwähnt werden. Erstens treten im allgemeinen in der eben genannten Coincidenzcurve selber Punkte von besonderer Art (sowol generelle, als individuelle, um einen hier unten vorgeschlagenen Ausdruck zu benutzen) auf; zweitens kommen oftmals singuläre Gerade als Bestandteile jener Curve vor, Gerade, die es sich bisher unter bestimmte Kategorien einzuordnen oftmals etwas schwierig erwiesen hat, und die in der Tat nichts anderes als die dualistisch entsprechenden Gebilde zu jenen Punkten sind.

§ 2. Wir nehmen hier immer an, dass der singuläre Punkt der Anfangspunkt $O(x = y = 0)$ sei, und

$$X = A(x, y) + \varphi(x, y), \quad Y = B(x, y) + \psi(x, y),$$

wo

$$A(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + a_n y^n,$$
$$B(x, y) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} y + b_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + b_n y^n,$$

und $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ ganze Functionen von höherem Grade als n sind. Zu solcher Form kann (1) immer gebracht werden, durch Drehung des Coordinatensystems, wenn solches nötig ist, oder im allgemeinen durch eine lineare Substitution wie

$$(2) \qquad x = \alpha x_1 + \beta y_1, \quad y = \gamma x_1 + \delta y_1,$$

woraus folgt

$$(3) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\gamma . dx_1 + \delta . dy_1}{\alpha . dx_1 + \beta . dy_1}.$$

Dividirt man (1) n mal und setzt nachher $x = y = 0$, so ergiebt sich

$$(4) \quad a_0 + (a_1 + b_0) p + (a_2 + b_1) p^2 + \ldots + (a_n + b_{n-1}) p^n + b_n p^{n+1} = 0,$$

$$(5) \qquad F(1, p) = 0.$$

Diese Gleichung giebt $n+1$, im allgemeinen verschiedene Werte von p, d. h. $n+1$ besondere Ausgangsrichtungen der Integralcurven aus O. In Aehnlichkeit mit dem Verlaufe der algebraischen Curven, obgleich zwar in einer sehr verschiedenen Bedeutung, könnte man also hier O als einen „$(n+1)$-fachen Punkt“ bezeichnen.

Nur in einem Falle lässt sich der Wert von p in O nicht bestimmen, wenn nämlich

$$a_0 = a_1 + b_0 = a_2 + b_1 = \ldots = a_n + b_{n-1} = b_n = 0,$$

welches offenbar damit gleichbedeutend ist, dass $A(x, y) + pB(x, y)$ den Factor $y - px$ enthält. In solchem Falle gehen die Integralcurven in allen Richtungen von O aus. Beisp.: Gewöhnlicher Basispunkt in einem Curvenbüschel.

§ 3. In den §§ 3., 4. nehmen wir an, dass $A(x, y)$ und $B(x, y)$ keinen gemeinsamen linearen Factor enthalten, oder, was dasselbe ist, dass die Curven $X = 0$, $Y = 0$ sich in O nicht berühren. Ist das entgegengesetzte der Fall, so nennen wir einen solchen gemeinsamen Factor Specialfactor, die gemeinsame Tangente der

Curven Specialtangente, und es sei nur im Vorbeigehen bemerkt, dass ein solcher Factor offenbar sich nicht durch irgend eine lineare Substitution wie (2) entfernen lässt.

Durch hinreichende Verminderung der absoluten Werte von x, y kann man offenbar die Werte von X, Y zu beliebig naher Uebereinstimmung mit denen von $A(x, y)$, $B(x, y)$ bringen. In der nächsten Umgebung des Anfangspunktes muss also die Differentialgleichung (1) unendlich nahe mit

$$A(x, y) + pB(x, y) \tag{6}$$

übereinstimmen. Diese lässt sich, als homogen, leicht integriren. Setzt man $y = xz$, so wird dieselbe, nach Verkürzen mit x^n

$$A(1, z) + \left(z + x\frac{dz}{dx}\right) B(1, z) = 0;$$

oder mit Anwendung der Bezeichung (5)

$$\frac{dx}{x} + \frac{B(1, z)\,dz}{F(1, z)} = 0; \tag{7}$$

folglich, wenn wir die $n+1$ p-Wurzeln der Gleichung (4), die hier anfangs alle untereinander verschieden angenommen werden, mit $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \dots \varrho_{n+1}$ bezeichnen

$$\frac{dx}{x} + \sum_{i=1}^{i=n+1} \frac{\beta_i}{z - \varrho_i} = 0. \tag{8}$$

wo

$$\beta_i = \frac{B(1, \varrho_i)}{F_\varrho'(1, \varrho_i)}.$$

Durch Integrirung erhält man also, wenn die arbitäre Constante hier, wie immer im folgenden, mit K bezeichnet wird,

$$x\prod_1^{n+1} (z - \varrho_i)^{\beta_i} = K. \tag{9}$$

Die Summe $\sum_1^{n+1} \beta_i$ ist $= 1$, wie sich leicht zeigt, wenn man in der Identität

$$\frac{B(1, z)}{F(1, z)} = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n}{a_0 + (a_1 + b_0)z + \dots + b_n z^{n+1}} = \sum_1^{n+1} \frac{\beta_i}{z - \varrho_i}$$

mit z multiplicirt und dann z unendlich wachsen lässt. Folglich ergiebt sich aus (9), wenn man $\frac{y}{x}$ einführt,

(10) $$(y-\varrho_1 x)^{\beta_1}.(y-\varrho_2 x)^{\beta_2}\dots(y-\varrho_{n+1}x)^{\beta_{n+1}} = K$$

als Integral der Gleichung (6).

Wir bezeichnen nun mit (β) den reellen Teil von β. Bekanntlich ist für $x=0$ die Grösse x^β null, unbestimmt oder unendlich, jenachdem (β) positiv, null oder negativ ist. Daraus folgt:

1°) Wenn alle die reellen Grössen (β_1), (β_2) ... (β_{n+1}) von demselben Zeichen (also positiv) sind, giebt die Position $x=y=0$ in (10) $K=0$. Es giebt also nur einen einzigen Wert der Integrationsconstante, für welchen diese Gleichung von den Coordinaten des Anfangspunktes befriedigt wird, d. h. eine einzige Integralcurve geht durch O und hat offenbar $n+1$ Tangenten. Individueller singulärer Punkt.

2°) Wenn dagegen irgend eine oder einige dieser Grössen $(\beta_1)\dots(\beta_{n+1})$ negativ sind, so wird die Gleichung (10) von $x=y=0$ befriedigt, was K auch sei, d. h. eine unendliche Anzahl Integralcurven gehen durch O[4]). Genereller singulärer Punkt.

Das letztere sei nun der Fall; (β_1), (β_2) ... (β_m) seien positiv, (β_{m+1}) ... (β_{n+1}) negativ. Die Gleichung (10) lässt sich schreiben

(11) $$(y-\varrho_1 x)^{\beta_1}\dots(y-\varrho_m x)^{\beta_m} = K(y-\varrho_{m+1}x)^{-\beta_{m+1}}\dots$$
$$\dots(y-\varrho_{n+1}x)^{-\beta_{n+1}},$$

wo also die reellen Teile aller Exponenten positiv sind. Sämtliche Gerade $y-\varrho_i x=0$, deren entsprechende Factoren auf der rechten Seite der Gleichung (11) eingehen, berühren in O alle dadurch gehende Integralcurven mit Ausnahme einer einzigen, welche dagegen die übrigen (auf der linken Seite vorkommenden) berührt.

Die Gerade der ersten Art benennen wir generelle, die der zweiten individuelle Tangenten. Die Anzahl jeder Art ist also wenigstens 1, höchstens n.

Um den Satz zu beweisen, führen wir Polarcoordinaten ein, setzend $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $\varrho_i=\operatorname{tg}\psi_i$. Da wird

$$y-\varrho_i x=\frac{r\sin(\varphi-\psi_i)}{\cos\psi_i},$$

und (11) kann geschrieben werden

4) Vgl. Briot et Bouquet, l. c. S. 172, § 82.

$$r^{\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_m}\left[\frac{\sin(\varphi-\psi_1)}{\cos\psi_1}\right]^{\beta_1}\dots\left[\frac{\sin(\varphi-\psi_m)}{\cos\psi_m}\right]^{\beta_m}=$$

$$=Kr^{-(\beta_{m+1}+\dots+\beta_{n+1})}\cdot\left[\frac{\sin(\varphi-\psi_{m+1})}{\cos\psi_{m+1}}\right]^{-\beta_{m+1}}\dots\left[\frac{\sin(\varphi-\psi_{n+1})}{\cos\psi_{n+1}}\right]^{-\beta_{n+1}},$$

oder, da $\sum\limits_1^{n+1}\beta_i=1$ ist, und $K.\prod\limits_1^{n+1}(\cos\psi_i)^{\beta_i}=k$ gesetzt werden kann,

$$r=k.\frac{[\sin(\varphi-\psi_{m+1})]^{-\beta_{m+1}}\dots[\sin(\varphi-\psi_{n+1})]^{-\beta_{n+1}}}{[\sin(\varphi-\psi_1)]^{\beta_1}\dots[\sin(\varphi-\psi_m)]^{\beta_m}}.$$

Da die reellen Teile aller hier eingehenden Exponenten positiv sind, verschwindet r, was k auch sei, für $\varphi=\psi_{m+1}\dots\psi_{n+1}$, welche Werte also die Ausgangsrichtungen der Integralcurven aus O im allgemeinen Falle angeben.

Nur für $K=k=0$ ist das Resultat ein anderes; die rechte Seite der Gleichung (11) verschwindet; also werden dann $\psi_1, \psi_2 \dots \psi_m$ Ausgangsrichtungen.

§ 4. Es sei nun $a_0=0$, also $p=0$ eine Wurzel der Gleichung (4), und sei $\varrho_{n+1}.\beta_{n+1}=\frac{B(1,0)}{F_\varrho'(1,0)}$ das ist $=\frac{b_0}{a_1+b_0}$. Die Notwendige und hinreichende Bedingung, dass die entsprechende Gerade $y=0$ generelle Tangente sei, ist also $\left(\frac{b_0}{a_1+b_0}\right)<0$, oder, was dasselbe ist

$$\left(\frac{a_1}{b_0}\right)<-1.$$

Für $\left(\frac{b_0}{a_1+b_0}\right)>0$ ist dagegen $y=0$ individuelle Tangente, der Punkt selber kann sowol generell als individuell sein [5]).

Da b_0 hier nicht null sein kann (denn in solchem Falle wäre ja y Specialfactor), wird die Grenze zwischen den beiden Fällen gebildet von $\left(\frac{b_0}{a_1+b_0}\right)=\infty$, d. h. $a_1+b_0=0$. Dann ist $p=0$ **Doppelpunkt** der Gleichung (4), sei $\varrho_{n+1}=\varrho_n$. Die Gleichung (7) wird

---

5) Wenn O individueller sing. Punkt ist, muss offenbar jedes (β) positiv und <1 (da ja die Summe aller $\beta=1$ ist) sein; also auch $\left(\frac{b_0}{a_1+b_0}\right)<1$, folglich $\left(\frac{a_1}{b_0}\right)>0$. Diese Bedingung ist also für individuellen sing. Punkt notwendig, aber nicht hinreichend.

$$\frac{dx}{x}+\frac{B(1,z).dz}{z^2[a_2+b_1+(a_3+b_2)z+\ldots+b_n z^{n-1}]}=0,$$

also ergiebt sich statt (8)

$$\frac{dx}{x}+\frac{\gamma}{z^2}+\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\beta_i}{z-\varrho_i}=0,$$

wo $\gamma=\frac{b_0}{a_2+b_1}$ und $\sum_1^n \beta_i=1$; folglich nach Integration und Einführung von $\frac{y}{x}$ statt z

$$(y-\varrho_1 x)^{\beta_1}.(y-\varrho_2 x)^{\beta_2}\ldots y^{\beta_n}=Ke^{\frac{\gamma x}{y}}.$$

Durch Anwendung von Polarcoordinaten kann diese Gleichung geschrieben werden

(12) $\quad r[\sin(\varphi-\psi_1)]^{\beta_1}.[\sin(\varphi-\psi_2)]^{\beta_2}\ldots[\sin\varphi]^{\beta_n}=ke^{\gamma\cot\varphi}.$

Wir beschränken uns hier auf den Fall, wo γ, x, y, also auch φ, reell sind.

Da wird offenbar, was $K(k)$ auch sei, $r=0$ für $\gamma\cot\varphi=-\infty$, d. h. wenn

entweder $\gamma>0$, und $\cot\varphi$ unendlich wächst in negativer Richtung, d. h. die Integralcurven im 2ten oder 4ten Quadranten belegen sind;

oder $\gamma<0$, und $\cot\varphi$ unendlich wächst in positiver Richtung, d. h die Integralcurven im 1ten oder 3ten Quadranten belegen sind.

In jedem Falle ist also $y=0$ als generelle Tangente zu betrachten, obgleich die Integralcurven dieselbe nur an der einen Seite berühren, nämlich an entgegengesetzter Seite in ihrer positiven und negativen Hälfte (Fig. 4.).

γ kann offenbar nicht $=0$ sein. Wenn es unendlich ist, also $a_2+b_1=0$, ist $p=0$ dreifache Wurzel zu (4), sie sei $\varrho_{n+1}=\varrho_n=\varrho_{n-1}$. Statt (12) erhält man dann

(13) $\quad r[\sin(\varphi-\psi_1)]^{\beta_1}\ldots[\sin\varphi]^{\beta_{n-1}}=Ke^{\delta\cot^2\varphi+\delta_1\cot\varphi}$

wo

$$2\delta(a_3+b_2)=b_0,\quad 2\delta(a_4+b_3)+\delta_1(a_3+b_2)=b_1;$$

und es ergiebt sich aus (13), dass wenigstens unter der oben genannten Beschränkung, $y = 0$ generelle oder individuelle Tangente ist, jenachdem $\delta <$ oder > 0 ist.

Im allgemeinen, wenn $p = 0$ m-fache Wurzel zu (4) ist, findet man das Integral

$$r.[\sin(\varphi - \psi_1)]^{\beta_1} \dots [\sin\varphi]^{\beta_{n-m+2}} = Ke^{\varepsilon \cot^{m-1}\varphi + \varepsilon_1 \cot^{m-2}\varphi + \dots + \varepsilon_{m-2}\cot\varphi}$$

wo

$$\varepsilon = \frac{b_0}{(m-1)(a_m + b_{m-1})}$$

und folglich (wenigstens unter derselben Beschränkung), dass

für m gerade, $y = 0$ immer generelle Tangente ist, mit Berührung an entgegengesetzter Seite in ihren beiden Hälften (Fig. 4); aber

für m ungerade, $y = 0$ generelle oder individuelle Tangente ist, jenachdem $\varepsilon <$ oder > 0 ist.

§ 5. Dass die Resultate in § 4 auch in dem Falle gelten, wo die bisher gemachte Voraussetzung nicht erfüllt ist, d. h. wo ein oder mehrere Specialfactoren (doch nicht y) vorkommen, lässt sich folgendermassen zeigen.

Die Gleichung (1) sei

$$a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \dots + c_0x^{n+1} + c_1x^ny + \dots + p(b_0x^n + b_1x^{n-1}y + \dots + d_0x^{n+1} + d_1x^ny + \dots) = 0$$

(b_0 nicht null)

Setzt man $y = xz$, so ergiebt sich nach Verkürzen mit x^n 6)

$$(14) \qquad (a_1 + b_0)z + (a_2 + b_1)z^2 + \dots + c_0x + (c_1 + d_0)xz + \dots + x\frac{dz}{dx}(b_0 + b_1z + \dots + d_0x + \dots) = 0.$$

Wenn c_0 nicht null ist, bilden die Glieder niedrigster Dimension die Gleichung

$$(15) \qquad (a_1 + b_0)z + c_0x + b_0x\frac{dz}{dx} = 0,$$

6) Wir bemerken, dass $x = 0$ keine hier zu untersuchende Tangente ist.

durch deren Integration und nachheriges Einführen von $\frac{y}{x}$ statt z man erhält

(16) $$y = Kx^{-\frac{a_1}{b_0}} - \frac{c_0 x^2}{a_1 + 2b_0},$$

ausgenommen für $a_1 + 2b_0 = 0$, da

(17) $$y = x^2\left(K - \frac{c_0}{b_0}\log x\right).$$

Ist dagegen $c_0 = 0$, und g_0 Coefficient der niedrigsten x-Dignität x^{n+m} in (14), die nicht mit z oder $\frac{dz}{dx}$ multiplicirt ist; ergiebt sich statt (15)

$$(a_1 + b_0)z + g_0 x^m + b_0 x\frac{dz}{dx} = 0,$$

also

(18) $$y = Kx^{-\frac{a_1}{b_0}} - \frac{g_0 x^{m+1}}{a_1 + (m+1)b_0}$$

ausgenommen für $a_1 + (m+1)b_0 = 0$, da

(19) $$y = x^{m+1}\left(K - \frac{g_0}{b_0}\log x\right)$$

Aus (16)—(19) geht hervor, dass $y = 0$ generelle oder individuelle Tangente ist, jenachdem $\left(\frac{a_1}{b_0}\right) <$ oder > -1 ist.

§ 6. Ist dagegen $p = 0$ eine m-fache Wurzel der Gleichung (4), also $a_0 = a_1 + b_0 = a_2 + b_1 = \ldots = a_{m-1} + b_{m-2} = 0$, so erhält man statt (15) die Gleichung

$$(a_m + b_{m-1})z^m + c_0 x + b_0 x\frac{dz}{dx} = 0,$$

oder, wenn $a_m + b_{m-1} = b_0\alpha$, $c_0 = b_0\lambda$ gesetzt wird,

(20) $$\alpha z^m + \lambda x + x.\frac{dz}{dx} = 0.$$

Um einen approximativen Ausdruck für die Integrale dieser Gleichuug in der Umgegend des Punktes $x = z = 0$ zu bekommen, führen wir zwei neue Veränderliche t, u ein, setzend

$$x = tu, \quad z = u - \lambda tu;$$

dem Punkte $t = u = 0$ entspricht dann auch $x = z = 0$.

Dadurch wird (20), nach einer einfachen Umformung,

$$t[1+\alpha u^{m-1}(1-\lambda t)^m]+\alpha u^m(1-\lambda t)^m\cdot\frac{dt}{du}=0,$$

worin die Glieder niedrigster Dimension die Gleichung

$$t+\alpha u^m.\frac{dt}{du}=0$$

bilden. Daraus ergiebt sich

$$Kt=e^{\frac{1}{(m-1)\alpha u^{m-1}}},$$

oder nach Einführen von x, y

$$Kx^2=(y+\lambda x^2).e^{\frac{x^{m-1}}{(m-1)\alpha(y+\lambda x^2)^{m-1}}}$$

Führt man hier Polarcoordinaten ein und setzt darnach $r=0$, so wird die Ausgangsrichtung der Integralcurven aus O bestimmt durch die Gleichung

$$\sin\varphi.e^{\frac{b_0\cot^{m-1}\varphi}{(m-1)(a_m+b_{m-1})}}=0,$$

oder mit Anwendung der Bezeichnung in den letzten Zeilen des § 4

$$\sin\varphi.e^{\varepsilon.\cot^{m-1}\varphi}=0,$$

wodurch das da erhaltene Resultat bestätigt wird.

§ 7. Wir behandeln nun den Fall der Specialfactoren. Es sei erstens bemerkt, dass solche immer vorkommen, sobald die beiden in X und Y eingehenden homogenen Functionen niedrigster Ordnung von ungleicher Gradzahl untereinander sind.

Es sei in der Tat

$$X=C(x,y)+\varphi(x,y),\quad Y=D(x,y)+\Psi(x,y),$$

wo die homogenen Functionen $C(x,y)$, $D(x,y)$ die Glieder niedrigster Dimension in X, Y, resp., enthalten. Die Gradzahlen dieser Functionen seien p, q, und $p<q$.

Durch die Substitution (2) wird (1), wenn wir die Functionen $C(\alpha x_1+\beta y_1,\ \gamma x_1+\delta y_1)$, $\varphi(\alpha x_1+\beta y_1,\ \gamma x_1+\delta y_1)$ etc. kurz mit C_1, φ_1 etc. bezeichnen,

$$(\alpha\,dx_1 + \beta\,dy_1)(C_1 + \varphi_1) + (\gamma\,dx_1 + \delta\,dy_1)(D_1 + \psi_1) = 0,$$

oder, wenn $\frac{dy_1}{dx_1} = p_1$ gesetzt wird,

$$\alpha C_1 + \gamma D_1 + \alpha\varphi_1 + \gamma\psi_1 + p_1(\beta C_1 + \delta D_1 + \beta\varphi_1 + \delta\psi_1) = 0.$$

Die hier oben mit A, B bezeichneten Functionen sind also hier von αC_1 und βC_1, welche alle linearen Factoren gemeinsam haben repräsentirt.

§ 8. y sei nun einfacher Specialfactor, also $a_0 = b_0 = 0$.[7]) Die Gleichung (1) sei

$$(21)\quad a_1 x^{n-1}y + a_2 x^{n-2}y^2 + \ldots + c_0 x^{n+1} + c_1 x^n y + \ldots + p\,(b_1 x^{n-1} y + b_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + d_0 x^{n+1} + d_1 x^n y + \ldots) = 0.$$

Setzt man $y = x^2 v$, so ergiebt sich nach Verkürzen mit x^{n+1}

$$a_1 v + (a_2 + 2b_1)xv^2 + \ldots + c_0 + (c_1 + 2d_0)xv + \ldots + x^2\frac{dv}{dx}(b_1 v + b_2 xv^2 + \ldots + d_0 + d_1 xv + \ldots) = 0.$$

Darauf setzen wir $v = \varrho + s$, wo $a_1\varrho + c_0 = 0$. Die Glieder niedrigster Dimension bilden dann die Gleichung

$$a_1 s + [(a_2 + 2b_1)\varrho^2 + (c_1 + 2d_0)\varrho]x + (b_1\varrho + d_0)x^2\frac{ds}{dx} = 0,$$

oder kurz

$$(22)\qquad x^2\frac{ds}{dx} + \alpha s = \lambda x,$$

wo

$$\alpha = \frac{a_1}{b_1\varrho + d} = \frac{a_1^2}{a_1 d_0 - b_1 c_0}.^{8)}$$

Ihr Integral ist

$$s = e^{\frac{\alpha}{x}}\left[K + \lambda\int e^{-\frac{\alpha}{x}}\frac{dx}{x}\right],$$

und durch Einführen von y findet man also

$$y = -\frac{c_0}{a_1}x^2 + x^2 e^{\frac{\alpha}{x}}\left[K + \lambda\int e^{\frac{\alpha}{x}}\frac{dx}{x}\right]$$

kurz

7) Vgl. Briot et Bouquet, l. c. S. 181, § 90.

8) Mit λ, μ, ν bezeichnen wir immer irrelevante Constanten.

(23) $$y = -\frac{c_0}{a_1}x^2 + Kx^2 e^{\frac{\alpha}{x}} + \lambda x^2 . J(x).$$

Die übrigens einwertige Function $e^{\frac{\alpha}{x}}$ hat bekanntlich für $x = 0$ eine „wesentlich singuläre Stelle", in deren Umgebung sie „jedem willkürlich angenommenen Werte beliebig nahe kommen kann".[9])

Wenn es sich aber nur um reelle Grössen handelt, verschwindet bekanntlich diese Function und ebenso ihre Derivirte continuirlich für $x = 0$, doch nur insofern x sich der Null von der einen Seite nähert, der negativen oder positiven, jenachdem $\alpha > $ oder < 0 ist. Um zu zeigen, dass auch $J(x)$ für $x = 0$ verschwindet, setzen wir $x = -\frac{1}{z}$, wo z reell und sehr gross ist. Dadurch verwandelt sich $-J(z)$ in

$$e^{-\alpha z}\int e^{\alpha z}\frac{dz}{z} \quad \text{oder} \quad \frac{\int e^{\alpha z}\frac{dz}{z}}{e^{\alpha z}},$$

und durch Deriviren des Zählers und des Nenners ergiebt sich $\frac{1}{\alpha z}$. Es folgt hieraus, dass die Gleichung (23) darstellenden reellen Integralcurven die Curve $y = -\frac{c_0}{a_1}x^2$, und somit auch die Specialtangente berühren, aber immer nur an der einen Seite des singulären Punktes.

§ 9. Auch wenn die Specialtangente von höherer Ordnung ist, kommen wieder unbestimmte Integralfunctionen von derselben Art zum Vorschein. y^m sei nun Specialfactor (d. h. $a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0$, $b_0 = b_1 = \ldots = b_{m-1} = 0$); die Gleichung (1) ist dann

(24) $$y^m[a_m x^{n-m} + a_{m+1}x^{n-m-1}y + \ldots + p(b_m x^{n-m} + b_{m+1}x^{n-m-1}y + \ldots)] + c_0 x^{n+1} + c_1 x^n y + \ldots + p(d_0 x^{n+1} + d_1 x^n y + \ldots) = 0.$$

Wir setzen $x = t^m$, $y = t^{m+1}v$, also $p = \frac{1}{m}\left[(m+1)tv + t^2.\frac{dv}{dt}\right]$; die Gl. (24) wird, nach Verkürzen mit $t^{m(n+1)}$

$$ma_m v^m + [ma_{m+1} + (m+1)b_m]tv^{m+1} + \ldots + t^2 v^m \frac{dv}{dt}(b_m + b_{m+1}tv + \ldots)$$
$$+ mc_0 + [mc_1 + (m+1)d_0]tv + \ldots + t^2\frac{dv}{dt}(d_0 + d_1 tv + \ldots) = 0.$$

9) Weierstrass, Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen. Abh. d. k. Akad. d. Wiss. zu Berlin. 1876.

Setzen wir darauf $v = \varrho + z$, wo $a_m \varrho^m + c_0 = 0$, so bilden die Glieder niedrigster Dimension die Gleichung

$$m^2 a_m \varrho^{m-1} s + \lambda t + (b_m \varrho^m + d_0) t^2 \frac{ds}{dt} = 0,$$

die von derselben Art als (22) ist.

§ 10. Das vorige setzt voraus, dass a_1 in (21) oder a_m in (24) nicht null sei (sonst wäre ja ϱ unendlich), d. h. dass **nicht die Specialtangente nähere Berührung mit der einen als mit der anderen der Curven** $X = 0$, $Y = 0$ **habe.** Es ist in der Tat bemerkenswert, dass im entgegengesetzten Falle ein ganz anderes Resultat sich ergiebt, und man im allgemeinen wieder auf Integrale von demselben Typus als hier oben (§§ 3—5) zurückkommt.

Wir behandeln zuerst (§§ 10, 11) (21), unter dieser Voraussetzung $a_1 = 0$, und setzen da $x = z^2$, $y = u^3$, also $p = \frac{3u^2}{2z} \cdot \frac{du}{dz}$; die Gleichung wird dann

$$(25) \quad a_2 z^{2n-3} u^6 + a_3 z^{2n-5} u^9 + \ldots + c_0 z^{2n+3} + c_1 z^{2n+1} u^3 + \ldots$$
$$+ \frac{3}{2} \cdot \frac{du}{dz} (b_1 z^{2n-2} u^5 + b_2 z^{2n-4} u^8 + \ldots + d_0 z^{2n+2} u^2 + \ldots) = 0.$$

Die von den Gliedern niedrigsten $(2n+3)$ Grades gebildete Gleichung wird, nach Verkürzen mit z^{2n-3} (wir erinnern, dass $z = 0$, d. h. $x = 0$, keine hier zu untersuchende Tangente ist):

$$a_2 u^6 + c_0 z^6 + \frac{3}{2} b_1 z u^5 \cdot \frac{du}{dz} = 0,$$

durch deren Integration und nachheriges Einführen von y und x im allgemeinen sich ergiebt

$$y^2 = K x^{-\frac{2a_2}{b_1}} - \frac{2c_0}{2a_2 + 3b_1} \cdot x^3.$$

Hier ist $y = 0$ generelle oder individuelle Tangente, jenachdem $\left(\frac{a_2}{b_1}\right) <$ oder > -1 ist. Es sei auch bemerkt, dass die Berührung der Integralcurven mit dieser Tangente niemals von höherer Ordnung als $\frac{3}{2}$ sein kann.

§ 11. Das vorige setzt voraus, dass c_0 nicht null sei; sonst wäre in (25) $u = 0$, d. h. $y = 0$, Specialtangente.

Sei nun $a_0 = a_1 = b_0 = c_0 = 0$, also (1)

$$a_2 x^{n-2} y^2 + a_3 x^{n-3} y^3 + \ldots + c_1 x^n y + \ldots + e_0 x^{n+2} + \ldots$$
$$+ p (b_1 x^{n-1} y + \ldots + d_0 x^{n+1} + \ldots) = 0.$$

Setzt man $y = z^2$, so wird diese Gleichung

$$a_2 x^{n-2} z^4 + a_3 x^{n-3} z^6 + \ldots + c_1 x^n z^2 + \ldots + e_0 x^{n+2} + \ldots$$
$$+ 2 . \frac{dz}{dx} (b_1 x^{n-1} z^3 + \ldots + d_0 x^{n+1} z + \ldots) = 0.$$

Die Glieder niedrigsten $(n+2)$ Grades bilden, nach Verkürzen mit x^{n-2}, die Gleichung

$$e_0 x^4 + c_1 x^2 z^2 + a_2 z^4 + 2z \frac{dz}{dx} (b_1 x z^2 + d_0 x^3) = 0.$$

Für ihre Integration setzen wir $z^2 = x^2 u$, und erhalten so

$$\frac{dx}{x} + \frac{(b_1 u + d_0) \, du}{(a_2 + 2b_1) u^2 + (c_1 + 2d_0) u + e_0} = 0,$$

oder wenn ϱ_1, ϱ_2 die Wurzeln der Gleichung

(26) $$(a_2 + 2b_1) \varrho^2 + (c_1 + 2d_0) \varrho + e_0 = 0$$

sind

(27) $$x^{\frac{a_2}{b_1} + 2} \cdot (u - \varrho_1)^{\alpha_1} (u - \varrho_2)^{\alpha_2} = K,$$

wo

(28) $$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \; \varrho_2 \alpha_1 + \varrho_1 \alpha_2 = -\frac{d_0}{b_1}.$$

Nach Einführen von z, und darnach y in (27) erhält man

$$x^{\frac{a_2}{b_1}} . (y - \varrho_1 x^2)^{\alpha_1} (y - \varrho_2 x^2)^{\alpha_2} = K.$$

Die x-Axe ist also generelle Tangente, wenn entweder $\left(\frac{a_2}{b_1}\right) < -1$, oder im entgegengesetzten Falle irgend eine der beiden Grössen (α_1), (α_2) negativ ist.

§ 12. Wenn endlich $y = 0$ m-fache Specialtangente ist, aber, wie in § 10, um eine Einheit höhere Berührung mit $X = 0$ als mit $Y = 0$ hat, d. h. wenn in (24) auch $a_m = 0$ ist, setzen wir

$$x = z^{m+1}, \quad y = u^{m+2}, \quad \text{also} \quad p = \frac{(m+2) u^{m+1}}{(m+1) z^m} \cdot \frac{du}{dz}.$$

(24) wird dann verwandelt in eine mit (25)

deren Glieder niedrigster Dimension vom Grade $(mn+2m+n+1)$ sind und, nach Verkürzen mit $z^{(n-m)(m+1)-1}$ die Gleichung

$$a_{m+1}u^{(m+1)(m+2)}+c_0 z^{(m+1)(m+2)}+\frac{m+2}{m+1}b_m zu^{m^2+3m+1}\frac{du}{dz}=0$$

bilden. Nach Integration und Einführen von x und y ergiebt sich

$$y^{m+1}=Kx^{-\frac{(m+1)a_{m+1}}{b_m}}-\frac{(m+1)c_0}{(m+1)a_{m+1}+(m+2)b_m}x^{m+2};$$

$y=0$ ist also generelle Tangente für $\left(\frac{a_{m+1}}{b_m}\right)<-1$.

§ 13. Wenn es sich nur um reelle Grössen und Tangenten handelt, lassen sich, mit Hülfe der elementaren Regeln von der geometrischen Bedeutung der ersten und zweiten Derivirten $y'(p)$ und y'', wenigstens die wichtigsten der obigen Resultate graphisch bestätigen, und die Form der Integralcurven in der Umgebung des singulären Punktes ermitteln.

Wir schreiben hier, der Kürze wegen, f_1 und f_2 für f_x' und f_x''.

Aus (1) ergiebt sich, durch Derivation und nachherige Einsetzung von $-\frac{X}{Y}$ für p,

(29) $$S+Y^2.y''=0,$$

wo

(30) $$S=X(XY_2-X_2Y)+Y(X_1Y-XY_1).$$

Wir suchen nun einen Ausdruck für S, wenn $X=A+\varphi$, $Y=B+\psi$. Daraus folgt

(31) $$XY_2-X_2Y=\begin{vmatrix}A & A_2\\ B & B_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}A & A_2\\ \psi & \psi_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\varphi & \varphi_2\\ B & B_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\varphi & \varphi_2\\ \psi & \psi_2\end{vmatrix}.$$

In Folge der Homogeneität ist aber

$$nA=xA_1+yA_2,\quad nB=xB_1+yB_2;$$

wenn wir also

$$\begin{vmatrix}A_1 & A_2\\ B_1 & B_2\end{vmatrix}\text{ mit }(A_1B_2),\quad \begin{vmatrix}A & A_2\\ \psi & \psi_2\end{vmatrix}\text{ mit }(A\psi_2),$$

u. s. f. bezeichnen, wird (31)

$$XY_2-X_2Y=\frac{1}{n}x(A_1B_2)+(A\psi_2)+(\varphi B_2)+(\varphi\psi_2).$$

Ebenso findet man

$$X_1Y - XY_1 = \frac{1}{n}y(A_1B_2) + (\psi A_1) + (B\varphi_1) + (\psi\varphi_1).$$

Setzen wir nun $(A_1B_2) = n.J(x,y)$, oder kurz nJ, so wird (30)

$$S = (A+\varphi)[xJ + (A\psi_2) + (\varphi B_2) + (\varphi\psi_2)] \\ + (B+\psi)[yJ + (\psi A_1) + (B\varphi_1) + (\psi\varphi_1)],$$

und, da nach § 2. $xA + yB = F$ zu setzen ist, also

$$(32)\quad F(x,y) = a_0x^{n+1} + (a_1+b_0)x^ny + (a_2+b_1)x^{n-1}y^2 + \ldots + b_ny^{n+1},$$

ergiebt sich für S folgender Ausdruck

$$(33)\quad S = F(x,y)\,.\,J(x,y) \text{ [homogen vom Grade } 3n-1] \\ + J(x\varphi + y\psi) + A[(A\psi_2) + (\varphi B_2)] + B[(\psi A_1) + (B\varphi_1)] \\ + A(\varphi\psi_2) + B(\psi\varphi_1) + \varphi[(A\psi_2) + (\varphi B_2)] + \psi[(\psi A_1) + (B\varphi_1)] \\ + \varphi(\varphi\psi_2) + \psi(\psi\varphi_1).$$

Da nun, wie im allgemeinen der Fall ist, und wie wir hier immer annehmen, die Glieder niedrigster Dimension in $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ vom Grade $(n+1)$ sind, so folgt, dass in diesem Ausdrucke für S die Glieder niedrigster Dimension

in der zweiten Zeile	vom	Grade		$3n$	sind
„ „ dritten	„	„	„	$(3n+1)$	„
„ „ vierten	„	„	„	$(3n+2)$	„

Man hat auch

$$(34)\quad y = \begin{array}{r} a_0b_1 \\ -a_1b_0 \end{array}\Bigg|\, x^{2n-2} + \begin{array}{r} 2a_0b_2 \\ -2a_2b_0 \end{array}\Bigg|\, x^{2n-3}y + \begin{array}{r} 3a_0b_3 \\ +a_1b_2 \\ -a_2b_1 \\ -3a_3b_0 \end{array}\Bigg|\, x^{2n-4}y^2 + \begin{array}{r} 4a_0b_4 \\ +2a_1b_3 \\ -2a_3b_1 \\ -4a_4b_0 \end{array}\Bigg|\, x^{2n-5}y^3 + \ldots$$

Vermittelst dieser Ausdrücke lassen sich die Zeichen der ersten und der zweiten Derivirten $y'(p)$ und y'' in jedem Felde in der nächsten Umgebung des singulären Punktes bestimmen. Dieselben hangen natürlich von den Gliedern niedrigster Dimension der Functionen X, Y, S ab.

§ 14. Wir behandeln zuerst die Resultate in § 4. und nehmen also an, dass $y = 0$ Tangente sei (y ein Factor in $F(x,y)$, also $a_0 = 0$), aber nicht Specialtangente, also b_0 nicht $= 0$.

Durch O ziehen wir zwei Gerade POP' QOQ' (Fig. 1.), die mit der x-Axe sehr kleine Winkel POX, QOX bilden, innerhalb deren keine andere von den die Gleichungen $X=0$, $Y=0$ $J=0$, $F=0$ repräsentirenden Geraden fallen. In den Winkelfeldern POQ, $P'OQ'$ kann man y als unendlich klein in Vergleich mit x ansehen; die Zeichen der Functionen A, B, J, F hangen also in diesen Feldern nur von ihren ersten Gliedern ab, d. h. das Zeichen von

A, also auch von X, von dem Gliede $a_1 x^{n-1} y$,
B, " " " Y, " " " $b_0 x^n$,
J, " " " $-a_1 b_0 x^{2n-2}$,
F, " " " $(a_1+b_0) x^n y$,

folglich, da JF die Glieder niedrigster Dimension in S enthält, das Zeichen dieser letzten Function von

$$-a_1 b_0 (a_1+b_0) x^{3n-2} y.$$

Da nun

$$y' = -\frac{X}{Y}, \quad y'' = -\frac{S}{Y^3},$$

so wird das Zeichen von

y' bestimmt vom Gliede $-\frac{a_1 y}{b_0 x}$,
y'' " " " $+\frac{a_1(a_1+b_0) y}{b_0^2 x^2}$.

Es sei nun erstens $\frac{a_1}{b_0} > 0$, also auch $\frac{a_1+b_0}{b_0} > 0$. Die erste Derivirte y' wird dann im Winkelfelde XOP negativ, in $Q'OX'$ positiv, in $X'OP'$ negativ, in QOX positiv; die zweite y'' in XOP positiv, in $Q'OX'$ positiv, in $X'OP'$ und QOX negativ. In Fig. 1., wie immer im folgenden, giebt das obere (resp. untere) Zeichen dasjenige der ersten (resp. zweiten) Derivirten an; die Integralcurven haben also in den Winkelfeldern die von den punktirten Zügen angegebenen Formen: sie können folglich im allgemeinen nicht die x-Axe in O berühren, d. h. dieselbe ist nur individuelle Tangente.

Zweitens sei $\frac{a_1}{b_0}$ negativ, aber > -1, also $\frac{a_1+b_0}{b_0} > 0$. Die Zeichenverteilung der Derivirten, und also die Form der Integralcurven wird dann die in Fig. 2. angegebene; die Schlussfolge dieselbe wie im ersten Falle: die x-Axe ist nur individuelle Tangente.

Drittens sei $\frac{a_1}{b_0} < -1$, also $\frac{a_1+b_0}{b_0} < 0$. Fig. 3. giebt die Zeichenverteilung und die Curven an; dieselben berühren in O die x-Axe, die nun generelle Tangente ist.

Wir betrachten nun die Grenze zwischen dem zweiten und dem dritten Falle [10]), also $\frac{a_1}{b_0} = -1$, oder $a_1 + b_0 = 0$. $p = 0$ ist dann Doppelwurzel der Gleichung (4); das erste Glied von F ist $(a_2 + b_1)x^{n-1}y^2$, also das Zeichen von y'' bestimmt vom Gliede

$$\frac{a_1(a_2+b_1)y^2}{b_0{}^2x^3} = -\frac{(a_2+b_1)y^2}{b_0x^3} = -\frac{y^2}{\gamma x^3} \quad (\S\ 4).$$

Für $\gamma > 0$ ist die Zeichenverteilung und Form der Integralcurven in Fig. 4. gegeben; für $\gamma < 0$ berühren dagegen die Curven die x-Achse nur in den beiden andern Winkelfeldern, was mit dem in § 4. gefundenen übereinstimmt.

Es sei nun auch $a_2 + b_1 = 0$, also $p = 0$ dreifache Wurzel der Gleichung (4). Das erste Glied von F ist $(a_3 + b_2)x^{n-2}y^3$, also das Zeichen von y'' bestimmt vom Gliede

$$\frac{a_1(a_3+b_2)y^3}{b_0{}^2x^4} = -\frac{(a_3+b_2)y^3}{b_0x^4} = -\frac{y^3}{2\delta x^4} \quad (\S\ 4).$$

Für $\delta < 0$ (generelle Tangente) ist das Resultat in Fig. 3., für $\delta > 0$ (individuelle) in Fig. 2. gezeichnet. Und man bestätigt leicht, dass, wenn $p = 0$ m-fache Wurzel der Gleich. (4) ist, das Resultat mit dem in § 4. gefundenen übereinstimmt.

§ 15. Im allgemeinen ist die Curve $X = 0$ der Ort der Punkte, wo $y' = 0$ ist, wo also die Integralcurven ein Maximum oder Minimum haben. Man ersieht dann leicht, dass

links von einem X-Zweige müssen die beiden Derivirten entgegengesetzte, rechts davon einerlei Zeichen haben.

Die Curve $Y = 0$ ist dagegen der Ort der Punkte, wo $y' = \infty$ wird, und die beiden Derivirten Zeichen ändern. Man findet ebenso, dass

oberhalb eines Y-Zweiges muss y'' negativ, unterhalb desselben positiv sein.

Die Curve $S = 0$ ist dagen der Ort der Punkte, wo nur die zweite Derivirte ihr Zeichen ändert. Die durch O gehenden Zweige dieser Curve sind von zwei verschiedenen Arten, jenachdem ihre Tangenten in O der Gruppe $J = 0$ oder $F = 0$ angehören (s. (33)); wir bezeichnen sie kurz als J- oder F-Zweige.

10) Die Grenze zwischen dem ersten und dem zweiten Falle ($a_1 = 0$) hat keine andere Bedeutung, als dass eine J-Gerade (s. § 15.) mit einer F-Geraden in der x-Axe zusammenfällt, woraus folgt, dass y'' in dieser Axe ihr Zeichen nicht ändert. Man würde übrigens den ersten und den zweiten Fall als „Individuelle Tangente mit Convexität" und „$J.T.$ mit Concavität" bezeichnen können. In individuellen singulären Punkten kann nur die erste Art vorkommen, da in solchen $\frac{a_1}{b_0}$ immer positiv ist. (S. di-

Die ersten bilden den Ort der gewöhnlichen Inflexionen der Integralcurven. Die zweiten geben die Richtungen dieser Curven in der nächsten Umgebung des Anfangspunktes an. Dieses geht sowol aus §§. 2. und 14. hervor, wie daraus, dass für unendlich kleine x- und y-Werte die Derivirte $\frac{dy}{dx}$ unendlich wenig vom Quotienten $\frac{y}{x}$ abweicht; also auch die von (1) bestimmten Fortschreitungsrichtungen unendlich wenig von den Zweigen der Curve $xX+yY=0$, deren Tangenten in O durch $F(x,y)=0$ gegeben sind.

In dieser Weise lassen sich die Formen der Integralcurven in der Umgebung eines singulären Punktes sehr leicht graphisch darstellen, wenigstens sooft die A- und B-Gerade von einander verschieden sind. Die Zweige der Curven X, Y, S kann man in solchem Falle approximativ als Gerade zeichnen. Wir geben zwei Beispiele·

1) $A=x^3-x^2y-4xy^2-Ey^3,\quad B=x^3-x^2y+Exy^2+4y^3.$

O ist also 4-facher Punkt. Man erhält

$$F=x^4-5x^2y^2+4y^4=(y^2-x^2)(4y^2-x^2);$$

die vier Tangenten sind also alle reell. Ferner ist

$$J=24y(x+2y)(x^2-xy+y^2);$$

es giebt also nur zwei reelle J-Gerade. A enthält nur den einen reellen linearen Factor $(x-3,11y)$; B ebenso den einzigen reellen $(x+0,46y)$.

Um einen Ausgangspunkt für die Bestimmung der Zeichen der Derivirten zu haben, kann man z. B. x, y positiv, und die letztere sehr klein annehmen. Man hat: da alle A, B, F, J positiv, folglich y' und y'' negativ. Nach diesen Angaben kann man die Integralcurven, wie Fig. 5. zeigt, ziehen; es zeigt sich dann, dass

$$x=2y \quad \text{und} \quad x+y=0 \text{ generelle, aber}$$
$$x+2y=0 \quad \text{und} \quad x=y \text{ individuelle}$$

Tangenten sind.

2) $A=3xy-y^2,\quad B=-2x^2+xy.$

F ist $=x^2y$. Der Punkt ist 3-fach mit einer Doppeltangente.

J ist $=6x^2-4xy+y^2$; es giebt also keine reelle J-Gerade.

Für x und y positiv, die letztere sehr klein, hat man für A, B, F, J die Zeichen $+$, $-$, $+$, $+$; also y' und y'' positiv.

Fig. 6. zeigt die Integralcurven. Auch die einfache Tangente ist also generell.

Die Resultate können leicht durch Integration bestätigt werden.

§ 16. Wenn dagegen auch $b_0 = 0$, und $y = 0$ also Specialtangente ist, so müssen wir. um die Felder in der Umgebung des Anfangspunktes unterscheiden zu können, auch die Glieder höherer Ordnung in Betracht ziehen. Wir nehmen also an:

$$\varphi(x,y) = c_0 x^{n+1} + c_1 x^n y + c_2 x^{n-1} y^2 + \dots + \varphi_1(x,y),$$
$$\psi(x,y) = d_0 x^{n+1} + d_1 x^n y + d_2 x^{n-1} y^2 + \dots + \psi_1(x,y),$$

wo φ_1, ψ_1 von höherem Grade als $(n+1)$ sind.

In diesem Falle ist $X = 0$ für

(35) $$y = -\frac{c_0}{a_1} x^2 + \dots,$$

welcher Zweig also die positiven und negativen X-Felder unterscheidet; ebenso $Y = 0$ für

(36) $$y = -\frac{d_0}{b_1} x^2 + \dots$$

Man hat nun (vergl. (32) und (34))

(37) $$F(x,y) = y[a_1 x^n + (a_2 + b_1) x^{n-1} y + \dots],$$
(38) $$J(x,y) = y^2[(a_1 b_2 - a_2 b_1) x^{2n-4} + 2(a_1 b_3 - a_3 b_1) x^{2n-5} y + \dots],$$

und findet weiter

(39) $$(A\psi_2) = -a_1 d_0 x^{2n} - 2a_2 d_0 x^{2n-1} y + \dots,$$
(40) $$(\varphi B_2) = b_1 c_0 x^{2n} + 2b_2 c_0 x^{2n-1} y + \dots,$$
(41) $$(\psi A_1) = -2a_1 d_0 x^{2n-1} y - (3a_2 d_0 + a_1 d_1) x^{2n-2} y^2 + \dots,$$
(42) $$(B\varphi_1) = 2b_1 c_0 x^{2n-1} y + (3b_2 c_0 + b_1 c_1) x^{2n-2} y^2 + \dots;$$

folglich durch Einsetzung in (33)

$$\begin{aligned} S = {} & y^3[a_1(a_1 b_2 - a_2 b_1) x^{3n-4} + \lambda x^{3n-5} y + \dots] \\ & + y[a_1(b_1 c_0 - a_1 d_0) x^{3n-1} + \mu x^{3n-2} y + \dots] \\ & + c_0(b_1 c_0 - a_1 d_0) x^{3n+1} + \nu x^{3n} y + \dots, \end{aligned}$$

wo, wie früher, die erste (zweite, dritte) Zeile die Glieder vom Grade $3n-1$ $(3n, 3n+1)$ enthält, und die Werte der Coefficienten λ, μ, ν irrelevant sind.

Bei Untersuchung der die x-Axe in O berührenden Zweige der Curve $S = 0$ findet man also als ihre approximativen Ausdrücke

$$(43) \qquad y^2 = \frac{b_1 c_0 - a_1 d_0}{a_2 b_1 - a_1 b_2} x^3 + \dots, \quad \text{und}$$

$$(44) \qquad y = -\frac{c_0}{a_1} x^2 + \lambda_1 x^3 + \dots .$$

Der Zweig (43) (offenbar ein J-Zweig) hat mit $y = 0$ entferntere Berührung als alle die Zweige (35), (36), (44), und braucht also hier nicht in Betracht gezogen zu werden. Der Zweig (44) schneidet den X-Zweig (35), aber nicht den Y-Zweig (36).

Um einen Ausgangspunkt für die Bestimmung der Zeichen der beiden Derivirten zu bekommen, setzen wir $y = 0$. Dadurch wird

$$X = c_0 x^{n+1} + \dots, \quad Y = d_0 x^{n+1} + \dots, \quad S = c_0 (b_1 c_0 - a_1 d_0) x^{2n+1} + \dots,$$

folglich

$$(45) \quad y' = -\frac{c_0}{d_0} + \dots, \quad y'' = \frac{a_1 d_0 - b_1 c_0}{(d_0 x)^2} \frac{c_0}{d_0} + \dots,$$

wodurch jene Zeichen in der x-Axe selber besimmt sind.

Um nun die Untersuchung soweit möglich zu vereinfachen, bemerken wir zuerst, dass eine Umkehrung der positiven x-Richtung die Zeichen von b_1 und d_0, somit auch dasjenige von $(a_1 d_0 - b_1 c_0)$ verändert; dass dagegen die Umkehrung der y-Richtung die Zeichen von a_1 und d_0, somit auch dasjenige von $c_0 d_0$ verändert. Wir können also immer die beiden Grössen

$$(a_1 d_0 - b_1 c_0) \quad \text{und} \quad c_0 d_0,$$

folglich auch $\left(\frac{a_1}{c_0} - \frac{b_1}{d_0}\right)$ positiv annehmen. Die Zeichen der beiden Derivirten in der x-Axe sind also nach (45) $\mp$.

Wenn nun 1⁰) $\frac{a_1}{c_0} > \frac{b_1}{d_0} > 0$, so haben die X- und Y-Zweige (35) und (36) die in Fig. 7. gezeichnete Lage. Der S-Zweig (44) muss rechts oberhalb, links unterhalb des X-Zweiges (35) liegen, weil (§ 15.) die beiden Zeichen rechts von diesem letzteren einerlei, links von demselben entgegengesetzt sein müssen. Die Integralcurven müssen also die in Fig. 7. gezeichnete Form haben; sie berühren also die Curve $y = -\frac{c_0}{a_1} x^2$, und damit auch die x-Axe in O, aber nur an der linken (negativen) Seite.

Auf ähnliche Weise construirt man für

2⁰) $\frac{a_1}{c_0} > 0 > \frac{b_1}{d_0}$ die Fig. 8., und

3⁰) $0 > \frac{a_1}{c_0} > \frac{b_1}{d_0}$ die Fig. 9;

das Resultat in Beziehung auf die Form der Integralcurven wird immer dasselbe und mit § 8. übereinstimmend, da hier $\alpha = \frac{a_1^2}{a_1 d_0 - b_1 c_0}$ positiv angenommen ist [11]).

§ 17. Nun sei auch $a_1 = 0$, sowie a_0 und b_0 (Vgl. § 10.). X ist $= 0$ für

$$y^2 = -\frac{c_0}{a_2} x^3 + \ldots;$$

der Y-Zweig ist (36), wie in vorigem Falle. Durch Benutzung der Ausdrücke in (37) — (42) findet man weiter

$$\begin{aligned} S = {} & y^4[-a_2 b_1 (a_2 + b_1) x^{3n-5} + \lambda x^{3n-6} y + \ldots] \\ & + y^2 [2 b_1^2 c_0 x^{3n-2} + \mu x^{3n-3} y + \ldots] \\ & + b_1 c_0^2 x^{3n+1} + \nu x^{3n} y + \ldots; \end{aligned}$$

die approximativen Ausdrücke der die x-Axe in O berührenden Zweige der Curve $S = 0$ sind also

$$y^2 = \varrho_1 x^3, \quad y^2 = \varrho_2 x^3,$$

wo ϱ_1, ϱ_2 die Wurzeln der Gleichung

$$a_2 b_1 (a_2 + b_1) \varrho^2 - 2 b_1^2 c_0 \varrho = b_1 c_0^2$$

sind, also

$$\left.\begin{matrix} \varrho_1 \\ \varrho_2 \end{matrix}\right\} = \frac{c_0 (b_1 \pm \sqrt{a_2^2 + b_1^2 + a_2 b_1})}{a_2 (a_2 + b_1)}.$$

Setzt man nun wie früher $y = 0$, so ergiebt sich

$$X = c_0 x^{n+1} + \ldots, \quad Y = d_0 x^{n+1} + \ldots, \quad S = b_1 c_0^2 x^{3n+1} + \ldots,$$

also

11) Ebenso wie hier oben auf die Analogie zwischen unseren hier betrachteten n-fachen Punkten und denjenigen der algebraischen ebenen Curven hingedeutet worden ist, liegt es nahe zur Hand die in Fig. 4. und in den Fig. 7. — 9. gezeichneten Integralcurvenformen als Inflexions- und Spitz-Formen resp. zu bezeichnen.

$$(46)\qquad y' = -\frac{c_0}{d_0} + \ldots,\quad y'' = -\frac{b_1 c_0^2}{d_0^3 x^3} + \ldots,$$

wodurch die Zeichen der Derivirten in der x-Axe bestimmt sind.

Zur Vereinfachung der Discussion bemerken wir zuerst, dass eine Umkehrung der positiven x-Richtung das Zeichen von c_0, dagegen die Umkehrung der y-Richtung dasjenige von d_0 ändert. Wir können somit immer alle die drei Grössen c_0, b_1, d_0 positiv machen, und darnach, ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit des Resultates, $b_1 = 1$ setzen. Die Zeichen der beiden Derivirten in der x-Axe sind also nach (46) gleich.

Da ferner der Y-Zweig (36) nähere Berührung mit der x-Axe als alle übrigen hier vorkommenden Curvenzweige hat, ist in den Fig. 10.—12. jener als mit dieser Axe zusammenfallend gezeichnet.

Es sei nun 1⁰) $a_2 > 0$. Aus den Gleichungen

$$(47)\qquad \varrho_1 + \varrho_2 = \frac{2c_0}{a_2(a_2+1)},\quad \varrho_1\varrho_2 = -\frac{c_0^2}{a_2(a_2+1)}$$

folgt, dass ϱ_1 und ϱ_2 von entgegengesetzen Zeichen sind; ϱ_1 sei > 0. Es zeigt sich auch, dass $-\varrho_2 < \frac{c_0}{a_2}$ ist, d. h.

$$\frac{c_0}{a_2(a_2+1)}(\sqrt{a_2^2+a_2+1} - 1) < \frac{c_0}{a_2},$$

denn dieses giebt $a_2 > -1$; die X- und S-Zweige haben also die in Fig. 10. gezeichnete Lage.

Die Form der Integralcurven ergiebt sich hieraus; die x-Axe ist individuelle Tangente. In den Feldern zwischen den X- und ϱ_2-Zweigen (im 2ten und 3ten Quadranten) kann offenbar nur eine Berührung von der Ordnung $\frac{3}{2}$ stattfinden; hier ist der Platz des berührenden Individes (s. § 10.).

2⁰) sei $0 > a_2 > -1$. Aus (47) folgt, dass ϱ_1 und ϱ_2 negativ sind. Der X-Zweig ist dagegen im 1ten und 4ten Quadranten belegen. Das Resultat ist in Fig. 11. gezeichnet; die x-Axe, wie in 1⁰), individuelle Tangente.

3⁰) $a_2 < -1$. ϱ_1, ϱ_2 sind wieder von entgegengetzten Zeichen; ϱ_1 sei positiv. ϱ_1 ist $> -\frac{c_0}{a_1}$, d. h.

$$\frac{c_0}{a_2(a_2+1)}(\sqrt{a_2^2+a_2+1}+1) > -\frac{c_0}{a_1},$$

denn dieses giebt $\alpha_2 < -1$; die X- und S-Zweige haben also die in Fig. 12 gezeichnete Lage. Die Form der Integralcurven ergiebt sich hieraus; $y = 0$ ist generelle Tangente, die Berührung der Curven mit derselben kann aber niemals von höherer Ordnung als $\frac{3}{2}$ sein.

§ 18. Beispiele. 1) Wir geben zuerst folgende Beispiele von singulären Punkten mit **unbestimmbarer** Ausgangsrichtung (§ 2). In den Differentialgleichungen

$$\text{(a)}\quad -y+x^3+xy^2+p(x+x^2y+y^3) = 0,$$
$$\text{(b)}\quad y+x^2y^3+p(-x+x^3y^2) = 0,$$
$$\text{(c)}\quad -xy+x^2y+y^2+px^2 = 0,$$
$$\text{(d)}\quad xy+y^2+ay^3 = p(x^2+xy+axy^2+y^3),$$
$$\text{(e)}\quad 2xy^2+x^4-3x^2y^m = p(2x^2y+(m-2)y^{m+1}-mx^3y^{m-1})\quad (m>1)$$

enthält $A(x, y)+p.B(x, y)$ immer den Factor $y-px$. Die Integrale sind

$$\text{(a)}\quad x^2+y^2+2.\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = K,$$
$$\text{(b)}\quad x^2y^2+2\log\frac{x}{y} = K,$$
$$\text{(c)}\quad 2x+\log\frac{y^2}{x^2+y^2} = K,$$
$$\text{(d)}\quad a^2y^2+ax+(a+1)y = Kye^{\frac{ax}{y}},$$
$$\text{(e)}\quad y^2-x^3 = K(y^m-x^2),$$

oder in Polarcoordinaten

$$\text{(a)}\quad r^2+2\varphi = K,$$
$$\text{(b)}\quad r^4\sin^2 2\varphi+8\log\cot\varphi = K,$$
$$\text{(c)}\quad r\cos\varphi+\log\sin\varphi = K,$$
$$\text{(d)}\quad a^2r\sin\varphi+a\cot\varphi+a+1 = Ke^{a\cot\varphi},$$
$$\text{(e)}\quad \operatorname{tg}^2\varphi-r\cos\varphi = K(r^{m-2}.\operatorname{tg}^2\varphi.\sin^{m-2}\varphi-1);$$

wie man sieht, hängt für $r = 0$ die Ausgangsrichtung φ immer von K ab.

2) $-3x^2y+y^3+x^3y+2px^3 = 0$. 4-facher Punkt. Man hat (§ 3) $F(1, p) = -p+p^3$, also $\varrho_1 = 0$, $\varrho_3 = +1$, $\varrho_4 = \infty$. $B(1, p)$ ist $= 2$, $F'(1, p) = -1+3p^2$, also $\beta_1 = -2$, $\beta_2 = \beta_3 = 1$, $\beta_4 = +1$. Der Punkt ist generell, mit einer generellen Tangente $y = 0$, und drei individuellen $y = \pm x$ und $x = 0$.

Das Integral ist $y^2+x^3=Ke^x y^2$. Die generelle Tangente zeigt sich unmittelbar; die übrigen kommen zum Vorschein für $K=1$; man erhält dann durch Reihenentwicklung

$$x^3=xy^2(1+\lambda x+\mu x^2+\ldots).$$

3) $2xy+x^2y-y^3=p(x^2+y^3+x^3-xy^2)$. 3-facher Punkt. Man hat (§ 3) $F(1,p)=p-p^3$, also $\varrho_1=0$, $\varrho_2=-1$, $\varrho_3=+1$. $B(1,p)$ ist $=-1-p^2$, $F'(1,p)=1-3p^2$, also $\beta_1=-1$, $\beta_2=\beta_3=+1$. Genereller Punkt mit einer generellen Tangente $y=0$, und zwei individuellen $y=\pm x$.

Das Integral ist $\frac{2y}{y^2-x^2}=\log\left(K.\frac{y+x}{y-x}\right)$. oder in Polarcoordinaten $\frac{2\sin\varphi}{\cos 2\varphi}=r.\log\left(K.\cot\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\right)$. Für $r=0$ ist also immer $\sin\varphi=0$. Für $K=\infty$ wird die erste Gleichung $y^2=x^2$.

4) $3x^3y-y^4-3x^2y^3=p(3x^4-3x^3y^2-2y^5)$. 5-facher Punkt. Man hat $\varrho_1=\varrho_2=\varrho_3=\varrho_4=0$, $\varrho_5=\infty$. Wir untersuchen $y=0$ nach § 4. b_0 ist $=-3$, $a_4=-1$, $b_3=0$, also $\varepsilon=1$. $y=0$ ist also generelle Tangente, mit Berührung in den 2ten und 4ten Quadranten.

Um $\varrho_5=\infty$ zu untersuchen, vertauschen wir x und y. Da wird $a_0=a_1=0$, $b_0=-1$. Die Tangente ist also individuell.

$$\text{Das Integral ist } y^2-x=Ke^{\left(\frac{x}{y}\right)^3}.$$

5) $y^3+x^3y+3x^4y=2x^5p$. Um Functionen A, B von demselben Grade darzustellen, setzen wir $x=x_1+y_1$, $y=y_1$, und finden so

$$y_1{}^3+\varphi_4+\varphi_5+p_1(y_1{}^3+\psi_4+\psi_5)=0,$$

wo die Indices den Grad der homogenen Functionen φ, ψ angeben. Die Gleichung ist von der in § 9 betrachteten Art; die einzige Tangente $y=0$ ist Specialtangente, und die Integralfunction in der Umgebung des Punktes wesentlich unbestimmt.

$$\left(\text{Integral: } x^3+y^2=Ky^2e^{\frac{1}{x}}\right)$$

6) $xy+y^3=p(y-x^2+xy^2$. n ist $=1$. Die einzige Tangente $y=0$ ist speciell; hat aber nähere Berührung mit $X=0$ als mit $Y=0$. $a_0=b_0=a_1=0$, ebenso $c_0=0$. (S. § 11). Ferner ist $b_1=-1$, $c_1=1$, $d_0=1$, die Gleichung (26) also $-2\varrho^2+3\varrho=0$.

Hieraus folgt $\alpha_1 = \frac{2}{3}$, $\alpha_2 = \frac{1}{3}$. Die Tangente ist also individuell, und, da es keine andere giebt, auch der Punkt selbst.

$$(\text{Int.: } (1 + 3xy + y^3)^2 = K(1 + 2xy)^3).$$

7) $y^2 + 2x^2y - 3xy^3 + p(-2xy + 2x^3 + 3x^2y^2) = 0.$ $n = 2$, $\varrho_1 = \varrho_2 = 0$, $\varrho_3 = \infty$.

$y = 0$ ist Specialtangente. $a_0 = b_0 = a_1 = 0$, $b_1 = -2$, $c_0 = 0$. (S. § 11). Hier ist $a_2 = 1$, $b_2 = 0$, $c_1 = 2$, $e_0 = 0$, $d_0 = 2$; die Gl. (26) also $-3\varrho^2 + 6\varrho = 0$, woraus folgt $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$. Individuelle Tangente.

Um ϱ_3 zu untersuchen, vertauschen wir x und y. Da wird $a_0 = 0$, $a_1 = -2$, $b_0 = 1$, also $\frac{a_1}{b_0} = -2$. Die Tangente ist generell.

Das Integral ist $(2x - y^2)^2 = K(x^2 - 2x^3y)$. $x = 0$ ist folglich im allgemeinen Tangente in O, für $K = 4$ hat man aber

$$y(-4xy + 8x^3 + y^3) = 0.$$

8) $-mx^{m-1}y^3 + (m-4)x^{m+3} - x^my^3 + x^{m+4} - 4x^3y^n - y^{n+3} + x^4y^n + p[3x^my^2 + (3-n)y^{n+2} + nx^4y^{n-1}] = 0.$ $(m < n)$.

$(m+3)$-facher Punkt. Für $m = 3$ ist die Ausgangsrichtung unbestimmbar; wir nehmen also diesen Fall aus. Drei Wurzeln der Gl. (4) sind dann null, die übrigen unendlich.

a) $y = 0$ ist Specialtangente von der in § 12 behandelten Art, denn $a_0 = a_1 = a_2 = b_0 = b_1 = 0$. Ferner ist $c_0 = m - 4$, $a_3 = -m$, $b_2 = 3$, also $\frac{a_3}{b_2} = -\frac{m}{3}$, und (wenigstens für $m \gtrless 4$) $y = 0$ generell oder individuell, jenachdem $m >$ oder < 3 ist.

b) Um die andere Wurzel zu untersuchen, vertauschen wir x und y. Die Methode in § 12 ist freilich nicht anwendbar, durch die Substitution $x = z^m$, $y = u^n$ findet man aber

$$nzu^{mn-1} \cdot \frac{du}{dz} - 3u^{mn} = (3 - n)z^{mn},$$

folglich durch Integration und Wiedereinführen von x, y

$$y^m = Kx^3 - x^n$$

$y = 0$ (d. h. die frühere y-Axe) ist also generell oder individuell, jenachdem $m <$ oder > 3 ist.

Das Resultat wird bestätigt aus dem Ausdrucke für das Integral:

$$y^3 - x^4 = Ke^x(x^m + y^n).$$

Bem. 1. In der zu (1) reciproken Differentialgleichung R, die im allgemeinen nicht vom ersten Grade ist, entsprechen den hier behandelten Punkten singuläre Gerade. Einem singulären Punkte mit unbestimmbarer Ausgangsrichtung (§ 2) entspricht in R eine Gerade, die in allen ihren Punkten von den Integralcurven berührt wird; einem n-fachen Punkte in (1) eine Gerade mit n verschiedenen Berührungspunkten, welche sowol generelle als individuelle sein können.

Bem. 2. Die Curven $X = 0$, $Y = 0$ schneiden sich im allgemeinen nur in einfachen Punkten. In der Regel, d. h. wenn die Gleichung (1) die allgemeine in ihrer Art ist, kommen also nur Doppelpunkte ($n = 1$) vor. Dieselben können generelle oder individuelle sein, im vorigen Falle mit nur einer generellen Tangente.

Diese Punkte sind behandelt vom Hrn. Poincaré (Resal, Journal de Math., Sér. 3, Tome 7, S. 386). Die „noeuds" und „cols" des Hrn. P. sind dieselben, die hier oben als Doppelpunkte mit reellen Tangenten bezeichnet sind, jene generelle, diese individuelle; seine „foyers" sind meine Doppelpunkte mit imaginären Tangenten, seine „centres" ein specieller Fall davon.

Lund, 1. August 1886.

XIV.

Theorie der Thetafunctionen einer Veränderlichen, deren Charakteristiken sich aus gebrochenen Zahlen zusammensetzen lassen.

Von

Richard Voss

aus Teterow.

Die Theorie der Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus gebrochenen Zahlen bestehen, ist der Gegenstand verschiedener Untersuchungen der Herren Prym und Krazer gewesen. Für den Fall $n = 3$ der elliptischen Functionen ist sie von Herrn Krazer durchgeführt und zwar auf Grund der Prym'schen Thetaformeln, deren Entwicklungen in den Acta mathematica Band III gegeben sind. In neuester Zeit hat nun Herr Professor Krause in seiner in den mathematischen Annalen Band XXVI erschienenen Arbeit: Ueber Thetafunctionen, deren Charakteristiken gebrochene Zahlen sind — die Prym'schen Formeln für den Fall zweier Veränderlichen in einer neuen und einfachen Weise abgeleitet und zugleich unabhängig von jenen Formeln Methoden zur Herstellung allgemeiner Thetabeziehungen gegeben.

Auf diese Arbeit von Herrn Professor Krause stützen sich nun wesentlich die folgenden Betrachtungen, deren Gang demnach klar vorliegt. Nach Ableitung der Haupteigenschaften der neu eingeführten Thetafunctionen und nach Aufstellung der Substitutionstabelle, die die einzelnen Functionen in einander überführt, werden wir eine Methode angeben, die sich naturgemäss zur Parameterdarstellung unserer Functionen im allgemeinen Falle wie für die Nullwerte der Argumente darbietet. Die Behandlung der speciellen Fälle $n = 3$ und $n = 5$ werden uns weiter zu einer Reihe von Thetarelationen führen. Für den ersten Fall werden wir zugleich die angegebene Methode der Parameterdarstellung näher durchführen und ir-
dung damit nach Analogie der von Herrn Kr

suchungen in: Ueber Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Perioden gebildet sind — zeigen, wie auch mit unserem Verfahren die Darstellung der Thetaquotienten auf die von ihm angeführte Form ermöglicht werden kann. Hieran wird sich die Entwicklung einer Reihe allgemeiner Thetabeziehungen anschliessen. Für den Fall $n = 3$ werden wir hierbei die Relationen zu gewinnen suchen, die Herr Krazer in der erwähnten Arbeit aufgestellt hat, während wir für den Fall $n = 5$, den Untersuchungen des Herrn Bianchi folgend, die 5 quadratischen Gleichungen entwickeln werden. — Schliesslich sollen die Prym'schen Fundamentalformeln auf eine einfache und directe Art abgeleitet werden.

In Bezug auf die benutzte Litteratur verweise ich auf:

Krause: Ueber Thetafunctionen, deren Charakteristiken gebrochene Zahlen sind. Math. Annalen Band XXVI pag. 569.

Krazer: Ueber Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Perioden gebildet sind. Math. Annalen Band XXII pag. 417.

Thomae: Darstellung des Quotienten zweier Thetafunctionen, deren Argumente sich um Drittel der Peridicitätsmoduln unterscheiden, durch algebraische Functionen. Math. Annalen Band VI pag. 603.

Klein: Zur Theorie der elliptischen Functionen $n$ter Stufe. Abdruck aus den Berichten der math.-phys. Classe der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1884 pag. 62.

Klein: Abhandlungen der Leipziger Academie. 1885.

Bianchi: Ueber die Normalformen dritter und fünfter Stufe des elliptischen Integrals erster Gattung. Math. Annalen. Band XVII pag. 234.

Müller: Zur Transformation der Thetafunctionen. Grunert's Archiv. 2. Reihe, Band I.

Die vorliegende Arbeit schliesst sich an die Uebungen im mathematischen Seminar der Universität Rostock an, deren Gegenstand unter Leitung des Herrn Professor Krause im Sommersemester 1885 die Theorie der Thetafunctionen bildete.

Ich will an dieser Stelle nicht verfehlen, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Krause, meinen verbindlichsten Dank auszusprechen für die lebhafteste Anregung und dauernde Unterstützung, die mir durch das Interesse zu Teil wurde, welches Herr Professor Krause dieser Arbeit widmete.

§ 1.

Einführungen der allgemeinen Thetafunctionen. Eigenschaften derselben.

Definiren wir eine Thetafunction: $\vartheta\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}(v)$ durch die Summe:

$$\vartheta\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}(v)=\sum_{m\,-\infty}^{+\infty} e^{\pi i\tau\left(m+\frac{k}{n}\right)^2+2\pi i\left(m+\frac{k}{n}\right)\left(v+\frac{k_1}{n}\right)}$$

oder was dasselbe sagt:

$$\vartheta\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}(v)=\vartheta_3\left(v+\frac{k}{n}\tau+\frac{k_1}{n}\right)e^{\pi i\frac{k}{n}\left(2v+\frac{2k_1}{n}+\frac{k}{n}\tau\right)}$$

so wollen wir ganz allgemein setzen:

$$\vartheta_\alpha\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}(v)=\vartheta_\alpha\left(v+\frac{k}{n}\tau+\frac{k_1}{n}\right)e^{\pi i\frac{k}{n}\left(2v+\frac{2k_1}{n}+\frac{k}{n}\tau\right)}$$

wobei unter n eine ungerade Zahl, und unter α ein beliebiger der 4 Indices 0, 1, 2, 3 verstanden werden soll. Dann lehrt die gegebene Definition die Existenz folgender Fundamentalgleichungen:

$$\vartheta_\alpha\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}(v+1)=\vartheta_\alpha\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}(v)\,e^{2\pi i\frac{k}{n}}$$

$$\vartheta_\alpha\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}(v+\tau)=\vartheta_\alpha\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}(v)\,e^{-2\pi i\frac{k_1}{n}}\,e^{-\pi i(2v+\tau)}$$

$$\vartheta_\alpha\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}\left(v+\frac{k'\tau}{n}+\frac{k_1'}{n}\right)=\vartheta_\alpha\begin{bmatrix}k+k'\\k_1+k_1'\end{bmatrix}(v)\,e^{-\pi i\frac{k'}{n}\left(2v+2\frac{(k_1+k_1')}{n}+k'\frac{\tau}{n}\right)}$$

Der Uebergang der Thetafunctionen in einander geschieht dabei nach folgender Tabelle:

$$\vartheta_3\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}\left(v+\frac{1}{2}\right)=\vartheta_0\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}(v)\,e^{\pi i\frac{k}{n}}$$

$$\vartheta_0\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}\left(v+\frac{1}{2}\right)=\vartheta_3\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}(v)\quad ''$$

$$\vartheta_2\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}\left(v+\frac{1}{2}\right)=-\vartheta_1\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}(v)\quad ''$$

$$\vartheta_1\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}\left(v+\frac{1}{2}\right)=\vartheta_2\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}(v)\quad ''$$

$$\vartheta_3\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}\left(v+\frac{\tau}{2}\right)=\vartheta_2\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}(v)\,e^{-\pi i\frac{k_1}{n}}\,e^{-\frac{\pi i}{2}\left(2v+\frac{\tau}{2}\right)}$$

$$\vartheta_2\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}\left(v+\frac{\tau}{2}\right)=\vartheta_3\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}(v) \quad " \quad "$$

$$\vartheta_1\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}\left(v+\frac{\tau}{2}\right)=i\vartheta_0\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}(v) \quad " \quad "$$

$$\vartheta_0\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}\left(v+\frac{\tau}{2}\right)=i\vartheta_1\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}(v) \quad " \quad "$$

$$\vartheta_3\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}\left(v+\frac{\tau+1}{2}\right)=i\vartheta_1\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}(v)\,e^{-\frac{\pi i}{n}(k-k_1)}\,e^{-\frac{\pi i}{2}\left(2v+\frac{\tau}{2}\right)}$$

$$\vartheta_1\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}\left(v+\frac{\tau+1}{2}\right)=\vartheta_3\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}(v) \quad " \quad "$$

$$\vartheta_2\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}\left(v+\frac{\tau+1}{2}\right)=-i\vartheta_0\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}(v) \quad " \quad "$$

$$\vartheta_0\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}\left(v+\frac{\tau+1}{2}\right)=\vartheta_2\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}(v) \quad " \quad "$$

Thetafunctionen $n$ter Ordnung können wir nun beispielsweise bilden, indem wir die definirten Functionen in die $n$te Potenz erheben. Denn dann sind die für eine Thetafunction $n$ter Ordnung charakteristischen Bedingungen erfüllt. Ebenso sind derartige Functionen die Producte zu je n, also:

$$\Pi\vartheta_\alpha\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}(v)$$

bei denen:

$$\Sigma k\equiv\Sigma k_1\equiv 0 \mod n$$

Solche Thetafunctionen lassen sich aber nach dem Hermite'schen Princip darstellen als Summe von n Thetafunctionen von derselben Ordnung und derselben Charakteristik mit n willkürlichen Constanten, die linear von einander unabhängig sind.

Greifen wir die einfachste dieser Functionen heraus: $\vartheta_3^n\left(v+\frac{1}{n}\right)$, so können wir dieselbe in die Form bringen:

$$(A): \quad \vartheta_3{}^n\left(v+\frac{1}{n}\right)=c_1\,\vartheta_3{}^n(v)+c_2\,\vartheta_3{}^{n-2}(v)\,\vartheta_2{}^2(v)+\ldots$$
$$+c_{\frac{n+1}{2}}\,\vartheta_3(v)\,\vartheta_2{}^{n-1}(v)+c_{\frac{n+3}{2}}\,\vartheta_0(v)\,\vartheta_1(v)\,\vartheta_2(v)\,\vartheta_3{}^{n-3}(v)$$
$$+\ldots+c_n\,\vartheta_0(v)\,\vartheta_1(v)\,\vartheta_2{}^{n-2}(v)$$

Die Anwendung der aufgestellten Substitutionstabelle ergiebt hieraus die weiteren Gleichungen:

$$-\vartheta_2{}^n\left(v+\frac{1}{n}\right)=c_1\,\vartheta_2{}^n(v)+c_2\,\vartheta_2{}^{n-2}(v)\,\vartheta_3{}^2(v)+\ldots+c_{\frac{n+1}{2}}\,\vartheta_2(v)\,\vartheta_3{}^{n-1}(v)$$
$$-c_{\frac{n+3}{2}}\,\vartheta_0(v)\,\vartheta_1(v)\,\vartheta_3(v)\,\vartheta_2{}^{n-3}(v)-\ldots-c_n\,\vartheta_0(v)\,\vartheta_1(v)\,\vartheta_3{}^{n-2}(v)$$

$$\vartheta_0{}^n\left(v+\frac{1}{n}\right)=c_1\,\vartheta_0{}^n(v)+c_2\,\vartheta_0{}^{n-2}(v)\,\vartheta_1{}^2(v)+\ldots+c_{\frac{n+1}{2}}\,\vartheta_0(v)\,\vartheta_1{}^{n-1}(v)$$
$$-c_{\frac{n+3}{2}}\,\vartheta_1(v)\,\vartheta_2(v)\,\vartheta_3(v)\,\vartheta_0{}^{n-3}(v)-\ldots-c_n\,\vartheta_2(v)\,\vartheta_3(v)\,\vartheta_1{}^{n-2}(v)$$

$$-\vartheta_1{}^n\left(v+\frac{1}{n}\right)=c_1\,\vartheta_1{}^n(v)+c_2\,\vartheta_1{}^{n-2}(v)\,\vartheta_0{}^2(v)+\ldots+c_{\frac{n+1}{2}}\,\vartheta_1(v)\,\vartheta_0{}^{n-1}(v)$$
$$+c_{\frac{n+3}{2}}\,\vartheta_0(v)\,\vartheta_2(v)\,\vartheta_3(v)\,\vartheta_1{}^{n-3}(v)+\ldots+c_n\,\vartheta_2(v)\,\vartheta_3(v)\,\vartheta_0{}^{n-2}(v)$$

Um die auftretenden Constanten zu bestimmen, multipliciren wir die linken Seiten mit $\vartheta_0{}^n\left(v+\frac{1}{n}\right)$, dividiren beide Seiten durch $\vartheta_0{}^n(v)$ und führen statt der Thetafunctionen die elliptischen Functionen ein durch die Gleichungen:

$$u=\pi\,\vartheta_3{}^2 v=2Kv$$

$$\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}=\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\operatorname{sn}(u); \quad \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)}=\frac{\vartheta_2}{\vartheta_0}\operatorname{cn}(u); \quad \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)}=\frac{\vartheta_3}{\vartheta_0}\operatorname{dn}(u)$$

Dann folgt das Gleichungssystem

$$B): \quad \frac{\vartheta_0{}^n\left(v+\frac{1}{n}\right)}{\vartheta_0{}^n(v)}\operatorname{dn}^n\left(u+\frac{2K}{n}\right)=c_1\operatorname{dn}^n(u)+c_2\operatorname{dn}^{n-2}(u)\operatorname{cn}^2(u)\frac{\vartheta_2{}^2}{\vartheta_3{}^2}+\ldots$$

$$+c_{\frac{n+1}{2}}\,\mathrm{dn}\,(u)\,\mathrm{cn}^{n-1}(u)\,\frac{\vartheta_2^{\,n-1}}{\vartheta_3^{\,n-1}}+c_{\frac{n+3}{2}}\,\mathrm{sn}(u)\,\mathrm{cn}(u)\,\mathrm{dn}^{n-3}(u)\,\frac{\vartheta_0^{\,2}\vartheta_2^{\,2}}{\vartheta_3^{\,4}}$$

$$+\ldots+c_n\,\mathrm{sn}\,(u)\,\mathrm{cn}^{n-2}\,(u)\,\frac{\vartheta_0^{\,2}\vartheta_2^{\,n-1}}{\vartheta_3^{\,n+1}}$$

$$-\frac{\vartheta_0^{\,n}\left(v+\frac{1}{n}\right)}{\vartheta_0(v)^n}\,\mathrm{cn}^n\left(u+\frac{2K}{n}\right)=c_1\,\mathrm{cn}^n\,(u)+c_2\,\mathrm{cn}^{n-2}(u)\,\mathrm{dn}^2\,(u)\,\frac{\vartheta_3^{\,2}}{\vartheta_2^{\,2}}+\ldots$$

$$+c_{\frac{n+1}{2}}\,\mathrm{cn}\,(u)\,\mathrm{dn}^{n-1}\,(u)\,\frac{\vartheta_3^{\,n-1}}{\vartheta_2^{\,n-1}}-c_{\frac{n+3}{2}}\,\mathrm{sn}\,(u)\,\mathrm{dn}\,(u)\,\mathrm{cn}^{n-3}(u)\,\frac{\vartheta_0^{\,2}}{\vartheta_2^{\,2}}-\ldots$$

$$-c_n\,\mathrm{sn}\,(u)\,\mathrm{dn}^{n-2}\,(u)\,\frac{\vartheta_0^{\,2}\vartheta_3^{\,n-3}}{\vartheta_2^{\,n-1}}$$

$$\frac{\vartheta_0^{\,n}\left(v+\frac{1}{n}\right)}{\vartheta_0(v)^n}=c_1+c_2\,\mathrm{sn}^2\,(u)\,\frac{\vartheta_2^{\,2}}{\vartheta_3^{\,2}}+\ldots+c_{\frac{n+1}{2}}\,\mathrm{sn}^{n-1}\,(u)\,\frac{\vartheta_2^{\,n-1}}{\vartheta_3^{\,n-1}}$$

$$-c_{\frac{n+3}{2}}\,\mathrm{sn}\,(u)\,\mathrm{cn}\,(u)\,\mathrm{dn}(u)\,\frac{\vartheta_2^{\,2}}{\vartheta_0^{\,2}}-\ldots-c_n\mathrm{cn}(u)\mathrm{dn}(u)\mathrm{sn}^{n-2}(u)\frac{\vartheta_2^{\,2}}{\vartheta_0^{\,2}}\frac{\vartheta_2^{\,n-3}}{\vartheta_3^{\,n-3}}$$

$$-\frac{\vartheta_0^{\,n}\left(v+\frac{1}{n}\right)}{\vartheta_0(v)^n}\,\mathrm{sn}^n\left(u+\frac{2K}{n}\right)=c_1\,\mathrm{sn}^n(u)+c_2\,\mathrm{sn}^{n-2}(u)\,\frac{\vartheta_3^{\,2}}{\vartheta_2^{\,2}}+\ldots$$

$$+c_{\frac{n+1}{2}}\,\mathrm{sn}\,(u)\,\frac{\vartheta_3^{\,n-1}}{\vartheta_2^{\,n-1}}+c_{\frac{n+3}{2}}\,\mathrm{cn}\,(u)\,\mathrm{dn}\,(u)\,\mathrm{sn}^{n-3}(u)\,\frac{\vartheta_3^{\,4}}{\vartheta_0^{\,2}\vartheta_2^{\,2}}+\ldots$$

$$+c_n\,\mathrm{cn}\,(u)\,\mathrm{dn}\,(u)\,\frac{\vartheta_3^{\,2}}{\vartheta_0^{\,2}}\frac{\vartheta_3^{\,n-1}}{\vartheta_2^{\,n-1}}$$

Hierin denken wir uns die Potenzreihen der elliptischen Functionen, deren Argumente u und $u+\frac{2K}{n}$ sind, eingeführt. Die Coefficienten der ersten Entwicklung stellen bekannte Functionen von ϑ_α dar, während die der letzten bekannte Functionen von ϑ_α und $\vartheta_\alpha(^1/_n)$ sind. Endlich möge noch der Quotient $\frac{\vartheta_0^{\,n}\left(v+\frac{1}{n}\right)}{\vartheta_0^{\,n}(v)}$ in eine nach Potenzen von u fortschreitende Reihe entwickelt werden. Die Constante berechnen wir dabei nach dem Theorem von Maclaurin, die übrigen Coefficienten sehen wir aber als Unbekannte an und bezeichnen sie mit y_1, y_2, ... Durch Gleichsetzen der Glieder gleich hoher Potenzen von u erhalten wir alsdann eine Fülle von Gleichungen

mit den Unbekannten c und y. Aus diesen Gleichungen lassen sich die Unbekannten als rationale Functionen der Grössen ϑ_α und $\vartheta_\alpha({}^1/_n)$ bestimmen, während sich zwischen diesen Grössen selbst eine Reihe von Beziehungen ergeben werden.

Die Reihenentwicklungen der elliptischen Functionen mit dem Argument u finden wir in der Arbeit von Hrn. Müller pag. 166. Für die übrigen elliptischen Functionen wollen wir sie, soweit wir später von ihnen Gebrauch machen, angeben:

$$\operatorname{sn}\left(u+\frac{2K}{n}\right)=\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1({}^1/_n)}{\vartheta_0({}^1/_n)}+u\cdot\frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_2\vartheta_3}\cdot\frac{\vartheta_2({}^1/_n)\,\vartheta_3({}^1/_n)}{\vartheta_0^2({}^1/_n)}$$
$$+\frac{u^2}{2!}\frac{1}{\vartheta_2\vartheta_3^3}\cdot\frac{\vartheta_1({}^1/_n)}{\vartheta_0({}^1/_n)}\left\{-\vartheta_0^2({}^1/_n)(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)+2\vartheta_2^2\vartheta_3^2\vartheta_1^2({}^1/_n)\right\}+\dots$$

$$\operatorname{cn}\left(u+\frac{2K}{n}\right)=\frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}\cdot\frac{\vartheta_2({}^1/_n)}{\vartheta_0({}^1/_n)}-u\cdot\frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}\cdot\frac{\vartheta_1({}^1/_n)\,\vartheta_3({}^1/_n)}{\vartheta_0^2({}^1/_n)}$$
$$+\frac{u^2}{2!}\frac{\vartheta_0}{\vartheta_2\vartheta_3^4}\frac{\vartheta_2({}^1/_n)}{\vartheta_0^3({}^1/_n)}\left\{\vartheta_0^2({}^1/_n)(\vartheta_2^4-\vartheta_0^4)-2\vartheta_0^2\vartheta_2^2\vartheta_2^2({}^1/_n)\right\}-\dots$$

$$\operatorname{dn}\left(u+\frac{2K}{n}\right)=\frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_3({}^1/_n)}{\vartheta_0({}^1/_n)}-u\frac{\vartheta_0\vartheta_2^2}{\vartheta_3^3}\cdot\frac{\vartheta_1({}^1/_n)\,\vartheta_2({}^1/_n)}{\vartheta_0^2({}^1/_n)}$$
$$+\frac{u^2}{2!}\frac{\vartheta_0}{\vartheta_3^5}\frac{\vartheta_3({}^1/_n)}{\vartheta_0^3({}^1/_n)}\left\{\vartheta_0^2({}^1/_n)(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)-2\vartheta_0^2\vartheta_3^2\vartheta_3^2({}^1/_n)\right\}-\dots$$

$$\operatorname{sn}^3\left(u+\frac{2K}{n}\right)=\frac{\vartheta_3^3}{\vartheta_2^3}\frac{\vartheta_1^3({}^1/_n)}{\vartheta_0^3({}^1/_n)}+u.3.\frac{\vartheta_0^2\vartheta_3}{\vartheta_2^3}\cdot\frac{\vartheta_1^2({}^1/_n)\,\vartheta_2({}^1/_n)\,\vartheta_3({}^1/_n)}{\vartheta_0^4({}^1/_n)}$$
$$+u^2\cdot\frac{3}{2!}\frac{1}{\vartheta_2^3\vartheta_3}\frac{\vartheta_1({}^1/_n)}{\vartheta_0^5({}^1/_n)}\cdot\left\{2\vartheta_2^2\vartheta_3^2\vartheta_1^4({}^1/_n)+2\vartheta_0^4\vartheta_2^2({}^1/_n)\,\vartheta_3^2({}^1/_n)\right.$$
$$\left.-\vartheta_0^2({}^1/_n)\,\vartheta_1^2({}^1/_n)(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)\right\}+\dots$$

$$\operatorname{sn}^4\left(u+\frac{2K}{n}\right)=\frac{\vartheta_3^4}{\vartheta_2^4}\cdot\frac{\vartheta_1^4({}^1/_n)}{\vartheta_0^4({}^1/_n)}+u.4.\frac{\vartheta_0^2\vartheta_3^2}{\vartheta_2^4}\frac{\vartheta_1^3({}^1/_n)\,\vartheta_2({}^1/_n)\,\vartheta_3({}^1/_n)}{\vartheta_0^5({}^1/_n)}$$
$$+u^2\frac{4}{2!}\frac{1}{\vartheta_2^4}\frac{\vartheta_1^2({}^1/_n)}{\vartheta_0^6({}^1/_n)}\left\{2\vartheta_2^2\vartheta_3^2\vartheta_1^4({}^1/_n)+3\vartheta_0^4\vartheta_2^2({}^1/_n)\vartheta_3^2({}^1/_n)\right.$$
$$\left.-\vartheta_0^2({}^1/_n)\,\vartheta_1^2({}^1/_n)(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)\right\}+\dots$$

$$\operatorname{sn}^5\left(u+\frac{2K}{n}\right)=\frac{\vartheta_3^5}{\vartheta_2^5}\frac{\vartheta_1^5({}^1/_n)}{\vartheta_0^5({}^1/_n)}+u.5.\frac{\vartheta_0^2\vartheta_3^3}{\vartheta_2^5}\frac{\vartheta_1^4({}^1/_n)\,\vartheta_2({}^1/_n)\,\vartheta_3({}^1/_n)}{\vartheta_0^6({}^1/_n)}$$
$$+u^2\cdot\frac{5}{2!}\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2^5}\frac{\vartheta_1^3({}^1/_n)}{\vartheta_0^7({}^1/_n)}\left\{2\vartheta_2^2\vartheta_3^2\vartheta_1^4({}^1/_n)+4\vartheta_0^4\vartheta_2^2({}^1/_n)\,\vartheta_3^2({}^1/_n)\right.$$
$$\left.-\vartheta_0^2({}^1/_n)\,\vartheta_1^2({}^1/_n)(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)\right\}+\dots$$

$$\mathrm{cn}^3\left(u+\frac{2K}{n}\right)=\frac{\vartheta_0^3}{\vartheta_2^3}\frac{\vartheta_2^3(1/n)}{\vartheta_0^3(1/n)}-u.3.\frac{\vartheta_0^3}{\vartheta_2^3}\frac{\vartheta_1(1/n)\,\vartheta_2^2(1/n)\,\vartheta_3(1/n)}{\vartheta_0^4(1/n)}$$

$$+u^2\frac{3}{2!}\frac{\vartheta_0^3}{\vartheta_2^3\vartheta_3^4}\frac{\vartheta_2(1/n)}{\vartheta_0^5(1/n)}\Big\{-2\vartheta_0^2\vartheta_2^2\vartheta_2^4(1/n)+2\vartheta_3^4\vartheta_1^2(1/n)\,\vartheta_3^2(1/n)$$

$$+\vartheta_0^2(1/n)\,\vartheta_2^2(1/n)(\vartheta_2^4-\vartheta_0^4)\Big\}-\dots$$

$$\mathrm{cn}^4\left(u+\frac{2K}{n}\right)=\frac{\vartheta_0^4}{\vartheta_2^4}\frac{\vartheta_2^4(1/n)}{\vartheta_0^4(1/n)}-u.4.\frac{\vartheta_0^4}{\vartheta_2^4}\frac{\vartheta_1(1/n)\,\vartheta_2^3(1/n)\,\vartheta_3(1/n)}{\vartheta_0^5(1/n)}$$

$$+u^2.\frac{4}{2!}\frac{\vartheta_0^4}{\vartheta_2^4\vartheta_3^4}\frac{\vartheta_2^2(1/n)}{\vartheta_0^6(1/n)}\Big\{-2\vartheta_0^2\vartheta_2^2\vartheta_2^4(1/n)+3\vartheta_3^4\vartheta_1^2(1/n)\vartheta_3^2(1/n)$$

$$+\vartheta_0^2(1/n)\,\vartheta_2^2(1/n)(\vartheta_2^4-\vartheta_0^4)\Big\}-\dots$$

$$\mathrm{cn}^5\left(u+\frac{2K}{n}\right)=\frac{\vartheta_0^5}{\vartheta_2^5}\frac{\vartheta_2^5(1/n)}{\vartheta_0^5(1/n)}-u.5.\frac{\vartheta_0^5}{\vartheta_2^5}.\frac{\vartheta_1(1/n)\vartheta_2^4(1/n)\,\vartheta_3(1/n)}{\vartheta_0^6(1/n)}$$

$$+u^2.\frac{5}{2!}\frac{\vartheta_0^5}{\vartheta_2^5\vartheta_3^5}.\frac{\vartheta_2^3(1/n)}{\vartheta_0^7(1/n)}\Big\{-2\vartheta_0^2\vartheta_2^2\vartheta_2^4(1/n)+4\vartheta_3^4\vartheta_1^2(1/n)\,\vartheta_3^2(1/n)$$

$$+\vartheta_0^2(1/n)\,\vartheta_2^2(1/n)(\vartheta_2^4-\vartheta_0^4)\Big\}-\dots$$

$$\mathrm{dn}^3\left(u+\frac{2K}{n}\right)=\frac{\vartheta_0^3}{\vartheta_3^3}.\frac{\vartheta_3^3(1/n)}{\vartheta_0^3(1/n)}-u.3.\frac{\vartheta_0^3\vartheta_2^2}{\vartheta_3^5}.\frac{\vartheta_1(1/n)\,\vartheta_2(1/n\,\vartheta_3^2(1/n)}{\vartheta_0^4(1/n}$$

$$+u^2\frac{3}{2!}\frac{\vartheta_0^3}{\vartheta_3^7}.\frac{\vartheta_3(1/n)}{\vartheta_0^5(1/n)}\Big\{-2\vartheta_0^2\vartheta_3^2\vartheta_3^4(1/n)+2\vartheta_2^4\vartheta_1^2(1/n)\,\vartheta_2^2(1/n)$$

$$+\vartheta_0^2(1/n)\,\vartheta_3^2(1/n)\,(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)\Big\}-\dots$$

$$\mathrm{dn}^4\left(u+\frac{2K}{n}\right)=\frac{\vartheta_0^4}{\vartheta_3^4}.\frac{\vartheta_3^4(1/n)}{\vartheta_0^4(1/n)}-u.4.\frac{\vartheta_0^4\vartheta_2^2}{\vartheta_3^6}.\frac{\vartheta_1(1/n)\,\vartheta_2(1/n)\,\vartheta_3^3(1/n)}{\vartheta_0^5(1/n)}$$

$$+u^2.\frac{4}{2!}\frac{\vartheta_0^4}{\vartheta_3^8}.\frac{\vartheta_3^2(1/u)}{\vartheta_0^6(1/n)}\Big\{-2\vartheta_0^2\vartheta_3^2\vartheta_3^4(1/n)+3\vartheta_2^4\vartheta_1^2(1/n)\,\vartheta_2^2(1/n)$$

$$+\vartheta_0^2(1/n)\,\vartheta_3^2(1/n)\,(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)\Big\}-\dots$$

$$\mathrm{dn}^5\left(u+\frac{2K}{n}\right)=\frac{\vartheta_0^5}{\vartheta_3^5}.\frac{\vartheta_3^5(1/n)}{\vartheta_0^5(1/n)}-u.5.\frac{\vartheta_0^5\vartheta_2^2}{\vartheta_3^7}\frac{\vartheta_1(1/n)\,\vartheta_2(1/n)\,\vartheta_3^4(1/n)}{\vartheta_0^6(1/n)}$$

$$+u^2\frac{5}{2!}\frac{\vartheta_0^5}{\vartheta_3^9}.\frac{\vartheta_3^3(1/n)}{\vartheta_0^7(1/n)}\Big\{-2\vartheta_0^2\vartheta_3^2\vartheta_3^4(1/n)+4\vartheta_2^4\vartheta_1^2(1/n)\,\vartheta_2^2(1/n)$$

$$+\vartheta_0^2(1/n)\,\vartheta_3^2(1/n)\,(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)\Big\}-\dots$$

§ 2.

Parameterdarstellung im allgemeinen Fall wie für die Nullwerte der Argumente.

Wir greifen einen beliebigen Thetaquotienten heraus und wenden auf Zähler und Nenner das gezeigte Verfahren an. Alsdann ist unmittelbar klar, dass die veränderlichen Thetaquotienten sich sämtlich auf eine Hülfsvariable, nämlich eine der 3 elliptischen Functionen, und zwar mit Hülfe von Quadratwurzeln reduciren lassen. Die Constanten, einschliesslich der Quotienten der Nullwerte, können wir dagegen als Functionen zweier Grössen darstellen, z. B. der beiden Grössen

$$\frac{\vartheta_1(1/n, \tau)}{\vartheta_3(1/n, \tau)} \quad \text{und} \quad \frac{\vartheta_1(\tau/n, \tau)}{\vartheta_3(\tau/n, \tau)};$$

Dabei besteht zwischen diesen beiden Grössen eine Gleichung, die vom $n+1$ten Grade ist, sobald n eine Primzahl bedeutet. Ist aber n eine zusammengesetzte Zahl, so wird der Grad eine complicirte Form annehmen.

In welcher Weise nun die Reduction der Constanten vorzunehmen ist, wollen wir kurz andeuten:

1) Zu Folge der Formeln des Additionstheorems [1])

$$\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{\vartheta_0^2}\cdot\frac{\vartheta_1\left(\frac{m+m_1\tau}{n}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{m+m_1\tau}{n}\right)}
= \frac{\frac{\vartheta_1\left(\frac{m}{n}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{m}{n}\right)}\frac{\vartheta_2\left(\frac{m_1\tau}{n}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{m_1\tau}{n}\right)}\frac{\vartheta_3\left(\frac{m_1\tau}{n}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{m_1\tau}{n}\right)} + \frac{\vartheta_3\left(\frac{m}{n}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{m}{n}\right)}\frac{\vartheta_2\left(\frac{m}{n}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{m}{n}\right)}\frac{\vartheta_1\left(\frac{m_1\tau}{n}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{m_1\tau}{n}\right)}}{1-\frac{\vartheta_1^2\left(\frac{m}{n}\right)}{\vartheta_0^2\left(\frac{m}{n}\right)}\cdot\frac{\vartheta_1^2\left(\frac{m_1\tau}{n}\right)}{\vartheta_0^2\left(\frac{m_1\tau}{n}\right)}}$$

1) cf. Jacobi: Gesammelte Werke I. pag. 513.

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_0}\cdot\frac{\vartheta_2\left(\frac{m+m_1\tau}{n}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{m+m_1\tau}{n}\right)}$$

$$=\frac{\dfrac{\vartheta_2\left(\frac{m}{n}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{m}{n}\right)}\dfrac{\vartheta_2\left(\frac{m_1\tau}{n}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{m_1\tau}{n}\right)}-\dfrac{\vartheta_1\left(\frac{m}{n}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{m}{n}\right)}\dfrac{\vartheta_3\left(\frac{m}{n}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{m}{n}\right)}\dfrac{\vartheta_1\left(\frac{m_1\tau}{n}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{m_1\tau}{n}\right)}\dfrac{\vartheta_3\left(\frac{m_1\tau}{n}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{m_1\tau}{n}\right)}}{1-\dfrac{\vartheta_1^2\left(\frac{m}{n}\right)}{\vartheta_0^2\left(\frac{m}{n}\right)}\dfrac{\vartheta_1^2\left(\frac{m_1\tau}{n}\right)}{\vartheta_0^2\left(\frac{m_1\tau}{n}\right)}}$$

$$\frac{\vartheta_3}{\vartheta_0}\cdot\frac{\vartheta_3\left(\frac{m+m_1\tau}{n}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{m+m_1\tau}{n}\right)}$$

$$=\frac{\dfrac{\vartheta_3\left(\frac{m}{n}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{m}{n}\right)}\cdot\dfrac{\vartheta_3\left(\frac{m_1\tau}{n}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{m_1\tau}{n}\right)}-\dfrac{\vartheta_1\left(\frac{m}{n}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{m}{n}\right)}\cdot\dfrac{\vartheta_2\left(\frac{m}{n}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{m}{n}\right)}\cdot\dfrac{\vartheta_1\left(\frac{m_1\tau}{n}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{m_1\tau}{n}\right)}\cdot\dfrac{\vartheta_2\left(\frac{m_1\tau}{n}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{m_1\tau}{n}\right)}}{1-\dfrac{\vartheta_1^2\left(\frac{m}{n}\right)}{\vartheta_0^2\left(\frac{m}{n}\right)}\dfrac{\vartheta_1^2\left(\frac{m_1\tau}{n}\right)}{\vartheta_0^2\left(\frac{m_1\tau}{n}\right)}}$$

werden alle Ausdrücke von der Form:

$$\frac{\vartheta_\alpha\left(\frac{m+m_1\tau}{n}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{m+m_1\tau}{n}\right)}$$

wobei m und m_1 alle Wertcombinationen aus den folgenden Zahlen beigelegt werden

$$m:\ 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots\ \pm\frac{n-1}{2};$$

$$m_1:\ 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots\ \pm\frac{n-1}{2};$$

unmittelbar dargestellt werden können durch die beiden Quotienten:

$$\frac{\vartheta_\alpha(1/n,\tau)}{\vartheta_0(1/n,\tau)}\quad\text{und}\quad\frac{\vartheta_\alpha(\tau/n,\tau)}{\vartheta_0(\tau/n,\tau)};\quad \alpha=1,\ 2,\ 3.$$

Berücksichtigen wir nun die Relationen:[1])

$$\vartheta_3^2 \vartheta_3^2(x) = \vartheta_0^2 \vartheta_0^2(x) + \vartheta_2^2 \vartheta_2^2(x)$$
$$\vartheta_3^2 \vartheta_0^2(x) = \vartheta_0^2 \vartheta_3^2(x) + \vartheta_2^2 \vartheta_1^2(x)$$
$$\vartheta_3^2 \vartheta_2^2(x) = \vartheta_2^2 \vartheta_3^2(x) - \vartheta_0^2 \vartheta_1^2(x)$$
$$\vartheta_3^2 \vartheta_1^2(x) = \vartheta_2^2 \vartheta_0^2(x) - \vartheta_0^2 \vartheta_2^2(x)$$

die für jeden Wert von x gelten, so leuchtet ein, dass sich diese 3 Quotienten durch die verlangten ausdrücken lassen. — Allerdings treten noch die Nullwerte selbst auf, deren Reduction uns sofort beschäftigen wird.

2) Wir betrachten den Ausdruck:

$$\frac{\vartheta_0(v'\tau')}{\vartheta_0^n(v,\tau)} \cdot \frac{\vartheta_0^n}{\vartheta_0(0,\tau')}$$

indem wir unter $\vartheta_0(v'\tau')$ einen beliebigen Repräsentanten verstehen wollen. Mit Benutzung des Hermite'schen Princips erfolgt dann:

$$\frac{\vartheta_0(v'\tau')}{\vartheta_0^n(v,\tau)} \cdot \frac{\vartheta_0^n}{\vartheta_0(v,\tau')} = c_1 + c_2 \frac{\vartheta_1^2(v,\tau)}{\vartheta_0^2(v,\tau)} + \ldots$$

Bestimmt man die Coefficienten nach bekannten Methoden, so ist klar, dass dieselben sich rational durch die ursprünglichen und transformirten Moduln darstellen werden. Um weiter die transformirten Moduln auf die zu Grunde gelegten Formen zu bringen, machen wir Gebrauch von den Beziehungen [2])

$$\sqrt{c} = (\sqrt{k})^n \left\{ \frac{\operatorname{cn}\left(m\frac{\omega}{n}\right) . \operatorname{cn}\left(2m\frac{\omega}{n}\right) \ldots \operatorname{cn}\left(\frac{n-1}{2}\, m\, \frac{\omega}{n}\right)}{\operatorname{dn}\left(m\frac{\omega}{n}\right) \operatorname{dn}\left(2m\frac{\omega}{n}\right) \ldots \operatorname{dn}\left(\frac{n-1}{2}\, m\, \frac{\omega}{n}\right)} \right\}^2$$

$$\sqrt{c_1} = (\sqrt{k_1})^n \frac{1}{\operatorname{dn}^2\left(m\frac{\omega}{n}\right) \operatorname{dn}^2\left(2m\frac{\omega}{n}\right) \ldots \operatorname{dn}^2\left(\frac{n-1}{2}\, m\, \frac{\omega}{n}\right)}$$

So sind wir im Stande, die Ausdrücke:

$$\frac{\vartheta_0^n}{\vartheta_0^n\left(\frac{m+m_1\tau}{n}\right)}$$

---

1) cf. Jacobi. pag. 511.

2) cf. Königsberger: die Transformation, die Multiplication und die Modulargleichungen der elliptischen Functionen. pag. 79.

sowie die analogen, die von diesen nur durch die Indices verschieden sind, in die gewünschten Grössen überzuführen.

3) Was schliesslich die Quotienten der Nullwerte betrifft, so brauchen wir nur zu beachten, dass z. B. ist:

$$\frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_0^2} = \frac{\vartheta_3^2(n\,.\,{}^1/_n)}{\vartheta_0^2(n\,.\,{}^1/_n)}.$$

Die Anwendung des Multiplicationstheorems führt dann zum Ziel.

§ 3.

Der Fall $n = 3$.

Bestimmung der Constanten. Gewinnung von Thetarelationen.

Wir erhalten für diesen Fall aus B) das Gleichungssystem:

$$\frac{\vartheta_0^3(v+\frac{1}{3})}{\vartheta_0(v)^3}.\mathrm{dn}^3\left(u+\frac{2K}{3}\right) = c_1\,\mathrm{dn}^3(u) + c_2\,\mathrm{du}(u)\,\mathrm{cn}^2(u)\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}$$
$$+ c_3\,\mathrm{sn}(u)\,\mathrm{cn}(u)\frac{\vartheta_0^2\vartheta_2^2}{\vartheta_3^4}$$

$$-\frac{\vartheta_0^3(v+\frac{1}{3})}{\vartheta_0(v)^3}\mathrm{cn}^3\left(u+\frac{2K}{3}\right) = c_1\,\mathrm{cn}^3(u) + c_2\,\mathrm{cn}(u)\,\mathrm{dn}^2(u)\frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^2}$$
$$- c_3\,\mathrm{sn}(u)\,\mathrm{dn}(u)\frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_2^2}$$

$$\frac{\vartheta_0^3(v+\frac{1}{3})}{\vartheta_0(v)^3} = c_1 + c_2\,\mathrm{sn}^2(u)\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2} - c_3\,\mathrm{sn}(u)\,\mathrm{cn}(u)\,\mathrm{dn}(u)\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_0^2}$$

$$-\frac{\vartheta_0^3(v+\frac{1}{3})}{\vartheta_0(v)^3}\mathrm{sn}^3\left(u+\frac{2K}{3}\right) = c_1\,\mathrm{sn}^3(u) + c_2\,\mathrm{sn}(u)\frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^2}$$
$$+ c_3\,\mathrm{cn}(u)\,\mathrm{dn}(u)\frac{\vartheta_3^4}{\vartheta_0^2\vartheta_2^2}$$

Führen wir die Reihenentwicklungen der elliptischen Functionen ein, so ergeben sich bei Gleichsetzen der Coefficienten gleich hoher Potenzen von u die Gleichungen:

$$1)\ c_1 = \frac{\vartheta_0^3(\frac{1}{3})}{\vartheta_0^3}; \qquad 2)\ c_3 = -\frac{\vartheta_1^3(\frac{1}{3})}{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}$$

$$3)\ y_1 = -c_3\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_0^2}; \qquad 4)\ y_2 = c_2\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}.$$

$$5)\ c_1 + c_2\frac{\vartheta_1^2}{\vartheta_3^2} = \frac{\vartheta_3^3(\frac{1}{3})}{\vartheta_3^3}, \qquad 6)\ c_1 + c_2\frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^2} = -\frac{\vartheta_2^3(\frac{1}{3})}{\vartheta_2^3}$$

7) $y_1 \vartheta_0 \vartheta_3^2 \vartheta_0^3(\tfrac{1}{3}) + 3\vartheta_0^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_1^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_2(\tfrac{1}{3})\vartheta_3(\tfrac{1}{3}) = -c_2 \vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_0^3(\tfrac{1}{3})$

8) $y_1 \vartheta_0^3 \vartheta_3^2 \vartheta_3^3(\tfrac{1}{3}) - 3\vartheta_2^2 \vartheta_0^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_3^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_1(\tfrac{1}{3})\vartheta_2(\tfrac{1}{3}) = c_3 \vartheta_0^2 \vartheta_2^2 \vartheta_3 \vartheta_0^3(\tfrac{1}{3})$

9) $y_1 \vartheta_0^3 \vartheta_2^3(\tfrac{1}{3}) - 3\vartheta_0^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_2^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_1(\tfrac{1}{3})\vartheta_3(\tfrac{1}{3}) = c_3 \vartheta_0^2 \vartheta_2 . \vartheta_0^3(\tfrac{1}{3})$

10) $\vartheta_2 \vartheta_3^2 \vartheta_0^4(\tfrac{1}{3}) \{3c_1 \vartheta_2^2 \vartheta_3^2 + c_2(\vartheta_0^4 + 3\vartheta_2^4)\} = 2y_2 \vartheta_0^3 \vartheta_3^4 \vartheta_0(\tfrac{1}{3})\vartheta_2^3(\tfrac{1}{3})$
$- 6y_1 \vartheta_0^3 \vartheta_3^4 \vartheta_1(\tfrac{1}{3})\vartheta_3(\tfrac{1}{3})\vartheta_2^2(\tfrac{1}{3}) + 3\vartheta_0^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_2(\tfrac{1}{3}) \{2\vartheta_3^4 \vartheta_1^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_3^2(\tfrac{1}{3})$
$- 2\vartheta_0^2 \vartheta_2^2 \vartheta_2^4(\tfrac{1}{3}) + \vartheta_0^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_2^2(\tfrac{1}{3})(\vartheta_2^4 - \vartheta_0^4\}$

11) $- \vartheta_2^2 \vartheta_3 \vartheta_0^4(\tfrac{1}{3}) \{3c_1 \vartheta_2^2 \vartheta_3^2 - c_2(\vartheta_0^4 - 3\vartheta_3^4)\} = 2y_2 \vartheta_0^3 \vartheta_3^4 \vartheta_0(\tfrac{1}{3})\vartheta_3^3(\tfrac{1}{3})$
$- 6y_1 \vartheta_0^3 \vartheta_2^2 \vartheta_3^2 \vartheta_1(\tfrac{1}{3})\vartheta_2(\tfrac{1}{3})\vartheta_3^2(\tfrac{1}{3}) + 3\vartheta_0^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_3(\tfrac{1}{3}) \{2\vartheta_2^4 \vartheta_1^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_2^2(\tfrac{1}{3})$
$- 2\vartheta_0^2 \vartheta_3^2 \vartheta_3^4(\tfrac{1}{3}) + \vartheta_0^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_3^2(\tfrac{1}{3})(\vartheta_0^4 + \vartheta_3^4)\}$

12) $: c_3 \vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_0^4(\tfrac{1}{3})(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4) = 2y_2 \vartheta_0^3 \vartheta_3^4 \vartheta_0(\tfrac{1}{3})\vartheta_1^3(\tfrac{1}{3})$
$6y_1 \vartheta_0^5 \vartheta_3^2 \vartheta_1^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_2(\tfrac{1}{3})\vartheta_3(\tfrac{1}{3}) + 3\vartheta_0^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_1(\tfrac{1}{3}) \{2\vartheta_0^4 \vartheta_2^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_3^2(\tfrac{1}{3})$
$+ 2\vartheta_2^2 \vartheta_3^2 \vartheta_1^4(\tfrac{1}{3}) - \vartheta_0^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_1^2(\tfrac{1}{3})(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)\}$

etc.

Diese 12 Gleichungen werden schon genügen, uns zu einer Reihe von Relationen zwischen ϑ_α und $\vartheta_\alpha(\tfrac{1}{3})$ zu führen.

Durch Combination von (1) mit (5) und (6) erhalten wir das System:

$$\begin{aligned} -c_2 \vartheta_0^4 \vartheta_2 \vartheta_3 &= \vartheta_2^3 \vartheta_3^3(\tfrac{1}{3}) + \vartheta_3^3 \vartheta_2^3(\tfrac{1}{3}) \\ -c_2 \vartheta_0^3 \vartheta_2 \vartheta_3^2 &= \vartheta_0^3 \vartheta_2^3(\tfrac{1}{3}) + \vartheta_2^3 \vartheta_0^3(\tfrac{1}{3}) \\ c_2 \vartheta_0^3 \vartheta_2^2 \vartheta_3 &= \vartheta_0^3 \vartheta_3^3(\tfrac{1}{3}) - \vartheta_3^3 \vartheta_0^3(\tfrac{1}{3}) \end{aligned}$$

aus dem die Gleichungen resultiren:

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3} &= \frac{\vartheta_2^3 \vartheta_3^3(\tfrac{1}{3}) + \vartheta_3^3 \vartheta_2^3(\tfrac{1}{3})}{\vartheta_0^3 \vartheta_2^3(\tfrac{1}{3}) + \vartheta_2^3 \vartheta_0^3(\tfrac{1}{3})} \\ \frac{\vartheta_0}{\vartheta_2} &= \frac{\vartheta_2^3 \vartheta_3^3(\tfrac{1}{3}) + \vartheta_3^3 \vartheta_2^3(\tfrac{1}{3})}{\vartheta_3^3 \vartheta_0^3(\tfrac{1}{3}) - \vartheta_0^3 \vartheta_3^3(\tfrac{1}{3})} \qquad \text{(A)} \\ \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2} &= \frac{\vartheta_0^3 \vartheta_2^3(\tfrac{1}{3}) + \vartheta_2^3 \vartheta_0^3(\tfrac{1}{3})}{\vartheta_3^3 \vartheta_0^3(\tfrac{1}{3}) - \vartheta_0^3 \vartheta_3^3(\tfrac{1}{3})} \end{aligned}$$

die indessen vermöge der Gleichung:

$$\vartheta_3^4 = \vartheta_0^4 + \vartheta_2^4$$

übergehen in:

$$\vartheta_0 \vartheta_0^3(\tfrac{1}{3}) = \vartheta_2 \vartheta_2^3(\tfrac{1}{3}) + \vartheta_3 \vartheta_3^3(\tfrac{1}{3}); \qquad \text{(A')}$$

Durch Ersetzen der den Grössen y_1 und c_2 zukommenden Werte erhält man weiter aus (7):

(B)

$$\vartheta_0^3(\tfrac{1}{3})\{\vartheta_2^3\vartheta_3^3(\tfrac{1}{3})+\vartheta_3^3\vartheta_2^3(\tfrac{1}{3})\}=\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_1^6(\tfrac{1}{3})+3\vartheta_0^3\vartheta_0^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_1^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_2(\tfrac{1}{3})\vartheta_3(\tfrac{1}{3})$$

$$\vartheta_3^3(\tfrac{1}{3})\{\vartheta_0^3\vartheta_2^3(\tfrac{1}{3})+\vartheta_2^3\vartheta_0^3(\tfrac{1}{3})\}=\vartheta_2\vartheta_3^2\vartheta_1^6(\tfrac{1}{3})+3\vartheta_0^2\vartheta_3\vartheta_0^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_1^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_2(\tfrac{1}{3})\vartheta_3(\tfrac{1}{3})$$

$$\vartheta_0^3(\tfrac{1}{3})\{\vartheta_3^3\vartheta_0^3(\tfrac{1}{3})-\vartheta_0^3\vartheta_3^3(\tfrac{1}{3})\}=\vartheta_2^2\vartheta_3\vartheta_1^6(\tfrac{1}{3})+3\vartheta_0^2\vartheta_2\vartheta_0^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_1^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_2(\tfrac{1}{3})\vartheta_3(\tfrac{1}{3})$$

während aus (8) und (9) in Verbindung mit (2) und (3) hervorgeht:

$$\vartheta_0\vartheta_0^3(\tfrac{1}{3})+\vartheta_3\vartheta_3^3(\tfrac{1}{3})=3\vartheta_2\,\frac{\vartheta_2(\tfrac{1}{3})\vartheta_0^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_3^2(\tfrac{1}{3})}{\vartheta_1^2(\tfrac{1}{3})}$$

$$\vartheta_0\vartheta_0^3(\tfrac{1}{3})+\vartheta_2\vartheta_2^3(\tfrac{1}{3})=3\vartheta_3\,\frac{\vartheta_3(\tfrac{1}{3})\vartheta_0^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_2^2(\tfrac{1}{3})}{\vartheta_1^2(\tfrac{1}{3})} \qquad \text{(C)}$$

$$\vartheta_3\vartheta_3^3(\tfrac{1}{3})-\vartheta_2\vartheta_2^3(\tfrac{1}{3})=3\vartheta_0\,\frac{\vartheta_0(\tfrac{1}{3})\vartheta_2^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_3^2(\tfrac{1}{3})}{\vartheta_1^2(\tfrac{1}{3})}$$

Mit Rücksicht auf (A′) liefert dies System sofort:

$$\vartheta_0^2\vartheta_0^6(\tfrac{1}{3})-\vartheta_3^2\vartheta_3^6(\tfrac{1}{3})=3\vartheta_2^2\,\frac{\vartheta_0^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_2^4(\tfrac{1}{3})\vartheta_3^2(\tfrac{1}{3})}{\vartheta_1^2(\tfrac{1}{3})}$$

$$\vartheta_0^2\vartheta_0^6(\tfrac{1}{3})-\vartheta_2^2\vartheta_2^6(\tfrac{1}{3})=3\vartheta_3^2\,\frac{\vartheta_0^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_2^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_3^4(\tfrac{1}{3})}{\vartheta_1^2(\tfrac{1}{3})} \qquad \text{(D)}$$

$$\vartheta_3^2\vartheta_3^6(\tfrac{1}{3})-\vartheta_2^2\vartheta_2^6(\tfrac{1}{3})=3\vartheta_0^2\,\frac{\vartheta_0^4(\tfrac{1}{3})\vartheta_2^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_3^2(\tfrac{1}{3})}{\vartheta_1^2(\tfrac{1}{3})}$$

Combiniren wir aber die 3 Gleichungen von (C) mit einander, so finden wir durch Multiplication aller 3:

$$\vartheta_0^3\vartheta_0^5(\tfrac{1}{3})-\vartheta_2^3\vartheta_2^5(\tfrac{1}{3})+\vartheta_3^3\vartheta_3^5(\tfrac{1}{3})=18.\frac{\vartheta_0^4(\tfrac{1}{3})\vartheta_2^4(\tfrac{1}{3})\vartheta_3^4(\tfrac{1}{3})}{\vartheta_1^4(\tfrac{1}{3})} \qquad \text{(E)}$$

und durch Addition resp. Subtraction die bekannten, direct aus dem Additionstheorem abzuleitenden Formeln:

$$\vartheta_2\vartheta_3(\tfrac{1}{3})+\vartheta_3\vartheta_2(\tfrac{1}{3})=\vartheta_0\,\vartheta_0(\tfrac{1}{3})\,\frac{\vartheta_1^2(\tfrac{1}{3})}{\vartheta_2(\tfrac{1}{3})\,\vartheta_3(\tfrac{1}{3})}$$

$$\vartheta_0\vartheta_2(\tfrac{1}{3})+\vartheta_2\vartheta_0(\tfrac{1}{3})=\vartheta_3\vartheta_3(\tfrac{1}{3})\,\frac{\vartheta_1^2(\tfrac{1}{3})}{\vartheta_0(\tfrac{1}{3})\,\vartheta_2(\tfrac{1}{3})} \qquad \text{(F)}$$

$$\vartheta_3\vartheta_0(\tfrac{1}{3})-\vartheta_0\vartheta_3(\tfrac{1}{3})=\vartheta_2\vartheta_2(\tfrac{1}{3})\,\frac{\vartheta_1^2(\tfrac{1}{3})}{\vartheta_0(\tfrac{1}{3})\vartheta_3(\tfrac{1}{3})}$$

$$\vartheta_0\,\vartheta_3(\tfrac{1}{3})+\vartheta_3\vartheta_0(\tfrac{1}{3})=\vartheta_2\,\frac{\vartheta_0(\tfrac{1}{3})\vartheta_3(\tfrac{1}{3})}{\vartheta_2(\tfrac{1}{3})}$$

Zur Gewinnung weiterer Relationen wollen wir aus (10) ... (12) die Unbekannten *c* und *y* eliminiren. Verwerten wir dabei (F) sowie die im vorigen Paragraphen bereits erwähnten für jeden Wert des Arguments geltenden Beziehungen, so erfolgen die beiden Systeme:

$$
\begin{aligned}
&\vartheta_3^4(\vartheta_1^4(\tfrac13)\vartheta_3^4(\tfrac13)-\vartheta_0^4(\tfrac13)\vartheta_2^4(\vartheta_2^4(\tfrac13))=2\vartheta_0^2\vartheta_2^2\vartheta_0^2(\tfrac13)\vartheta_2^2(\tfrac13)(\vartheta_0^4(\tfrac13)+\vartheta_2^4(\tfrac13))\\
&\vartheta_2^4(\vartheta_1^4(\tfrac13)\vartheta_2^4(\tfrac13)-\vartheta_0^4(\tfrac13)\vartheta_3^4(\tfrac13))=2\vartheta_0^2\vartheta_3^2\vartheta_0^2(\tfrac13)\vartheta_3^2(\tfrac13)(\vartheta_3^4(\tfrac13)-\vartheta_0^4(\tfrac13)) \quad \text{(G)}\\
&\vartheta_0^4(\vartheta_0^4(\tfrac13)\vartheta_1^4(\tfrac13)-\vartheta_2^4(\tfrac13)\vartheta_3^4(\tfrac13))=2\vartheta_2^2\vartheta_3^2\vartheta_2^2(\tfrac13)\vartheta_3^2(\tfrac13)(\vartheta_3^4(\tfrac13)-\vartheta_2^4(\tfrac13))
\end{aligned}
$$

und:

(H)

$$
\begin{aligned}
&\vartheta_3^2(\vartheta_1^4(\tfrac13)\vartheta_3^4(\tfrac13)+\vartheta_0^4(\tfrac13)\vartheta_2^4(\tfrac13))=2\vartheta_0^2(\tfrac13)\vartheta_2^2(\tfrac13)\vartheta_3^2(\tfrac13)(\vartheta_0^2\vartheta_2^2(\tfrac13)+\vartheta_2^2\vartheta_0^2(\tfrac13))\\
&\vartheta_2^2(\vartheta_1^4(\tfrac13)\vartheta_2^4(\tfrac13)+\vartheta_0^4(\tfrac13)\vartheta_3^4(\tfrac13))=2\vartheta_0^2(\tfrac13)\vartheta_2^2(\tfrac13)\vartheta_3^2(\tfrac13)(\vartheta_0^2\vartheta_3^2(\tfrac13)+\vartheta_3^2\vartheta_0^2(\tfrac13))\\
&\vartheta_0^2(\vartheta_0^4(\tfrac13)\vartheta_1^4(\tfrac13)+\vartheta_2^4(\tfrac13)\vartheta_3^4(\tfrac13))=2\vartheta_0^2(\tfrac13)\vartheta_2^2(\tfrac13)\vartheta_3^2(\tfrac13)(\vartheta_2^2\vartheta_3^2(\tfrac13)+\vartheta_3^2\vartheta_2^2(\tfrac13))
\end{aligned}
$$

deren letztes noch in die einfachere Form gebracht werden kann:

$$
\begin{aligned}
\frac{2\vartheta_2^2}{\vartheta_0\vartheta_3} &= \frac{\vartheta_3^4(\tfrac13)-\vartheta_0^4(\tfrac13)}{\vartheta_0(\tfrac13)\vartheta_3(\tfrac13)\vartheta_2^2(\tfrac13)}\\
\frac{2\vartheta_0^2}{\vartheta_2\vartheta_3} &= \frac{\vartheta_3^4(\tfrac13)-\vartheta_2^4(\tfrac13)}{\vartheta_2(\tfrac13)\vartheta_3(\tfrac13)\vartheta_0^2(\tfrac13)} \qquad \text{(J)}\\
\frac{2\vartheta_3^2}{\vartheta_0\vartheta_2} &= \frac{\vartheta_0^4(\tfrac13)+\vartheta_2^4(\tfrac13)}{\vartheta_0(\tfrac13)\vartheta_2(\tfrac13)\vartheta_3^2(\tfrac13)}
\end{aligned}
$$

Diese 3 Gleichungen lassen sich nun auf eine einzige reduciren mit Hinzunahme von:

$$
\begin{aligned}
\vartheta_3^3\vartheta_3(\tfrac13) &= \vartheta_0^4(\tfrac13)+\vartheta_2^4(\tfrac13)\\
\vartheta_2^3\vartheta_2(\tfrac13) &= \vartheta_3^4(\tfrac13)-\vartheta_0^4(\tfrac13)\\
\vartheta_0^3\vartheta_0(\tfrac13) &= \vartheta_3^4(\tfrac13)-\vartheta_2^4(\tfrac13)
\end{aligned}
$$

Es erfolgt dann:

$$
\vartheta_0\,\vartheta_2\,\vartheta_3 = 2\vartheta_0(\tfrac13)\,\vartheta_2(\tfrac13)\,\vartheta_3(\tfrac13) \qquad \text{(K)}
$$

welche Formel auch unmittelbar aus dem Additionstheorem fliesst.

Mit Hülfe der soeben benutzten Gleichungen kann man ferner (G) in eine andere Form kleiden. Wir wollen aber die 3 Gleichungen (G) unter einander combiniren, um zu erhalten:

$$
\begin{aligned}
\frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}\,\frac{\vartheta_0(\tfrac13)}{\vartheta_2(\tfrac13)} &= \sqrt{\frac{\vartheta_1^4(\tfrac13)\vartheta_2^4(\tfrac13)+3\vartheta_0^4(\tfrac13)\vartheta_3^4(\tfrac13)}{\vartheta_0^4(\tfrac13)\vartheta_1^4(\tfrac13)+3\vartheta_2^4(\tfrac13)\vartheta_3^4(\tfrac13)}}\\
\frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}\,\frac{\vartheta_0(\tfrac13)}{\vartheta_3(\tfrac13)} &= \sqrt{\frac{\vartheta_1^4(\tfrac13)\vartheta_3^3(\tfrac13)+3\vartheta_0^4(\tfrac13)\vartheta_2^4(\tfrac13)}{\vartheta_0^4(\tfrac13)\vartheta_1^4(\tfrac13)+3\vartheta_2^4(\tfrac13)\vartheta_3^4(\tfrac13)}} \qquad \text{(L)}\\
\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\,\frac{\vartheta_2(\tfrac13)}{\vartheta_3(\tfrac13)} &= \sqrt{\frac{\vartheta_1^4(\tfrac13)\vartheta_3^4(\tfrac13)+3\vartheta_0^4(\tfrac13)\vartheta_2^4(\tfrac13)}{\vartheta_1^4(\tfrac13)\vartheta_2^4(\tfrac13)+3\vartheta_0^4(\tfrac13)\vartheta_3^4(\tfrac13)}}
\end{aligned}
$$

Schliesslich mögen noch 2 Gleichungssysteme hervorgehoben we deren eins:

(M)

$$\vartheta_3^2(\vartheta_1^4(\tfrac{1}{3})\vartheta_3^4(\tfrac{1}{3})-3\vartheta_0^4(\tfrac{1}{3})\vartheta_2^4(\tfrac{1}{3}))=2\vartheta_0^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_1^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_2^2(\tfrac{1}{3})(\vartheta_0^2\vartheta_0^2(\tfrac{1}{3})-\vartheta_2^2\vartheta_2^2(\tfrac{1}{3}))$$

$$\vartheta_2^2(\vartheta_1^4(\tfrac{1}{3})\vartheta_2^4(\tfrac{1}{3})-3\vartheta_0^4(\tfrac{1}{3})\vartheta_3^4(\tfrac{1}{3}))=-2\vartheta_0^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_1^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_3^2(\tfrac{1}{3})(\vartheta_0^2\vartheta_0^2(\tfrac{1}{3})+\vartheta_3^2\vartheta_3^2(\tfrac{1}{3}))$$

$$\vartheta_0^2(\vartheta_0^4(\tfrac{1}{3})\vartheta_1^4(\tfrac{1}{3})-3\vartheta_2^4(\tfrac{1}{3})\vartheta_3^4(\tfrac{1}{3}))=2\vartheta_1^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_2^2(\tfrac{1}{3})\vartheta_3^2(\tfrac{1}{3})(\vartheta_2^2\vartheta_2^2(\tfrac{1}{3})+\vartheta_3^2\vartheta_3^2(\tfrac{1}{3}))$$

leicht aus (H) abzuleiten ist, während das andere:

$$\vartheta_2^3\vartheta_3^3(\tfrac{1}{3})+\vartheta_3^3\vartheta_2^3(\tfrac{1}{3})=\vartheta_2(\tfrac{1}{3})\,\vartheta_3(\tfrac{1}{3})\,\frac{\vartheta_1^2(\tfrac{1}{3})}{\vartheta_0^2(\tfrac{1}{3})}\,(3\vartheta_0^4(\tfrac{1}{3})-\vartheta_1^4(\tfrac{1}{3}))$$

$$\vartheta_0^3\vartheta_2^3(\tfrac{1}{3})+\vartheta_2^3\vartheta_0^3(\tfrac{1}{3})=\vartheta_0(\tfrac{1}{3})\vartheta_2(\tfrac{1}{3})\frac{\vartheta_1^2(\tfrac{1}{3})}{\vartheta_3^2(\tfrac{1}{3})}\,(3\vartheta_3^4(\tfrac{1}{3})+\vartheta_1^4(\tfrac{1}{3})) \qquad \text{(N)}$$

$$\vartheta_0^3\vartheta_3^3(\tfrac{1}{3})-\vartheta_3^3\vartheta_0^3(\tfrac{1}{3})=\vartheta_0(\tfrac{1}{3})\vartheta_3(\tfrac{1}{3})\frac{\vartheta_1^2(\tfrac{1}{3})}{\vartheta_2^2(\tfrac{1}{3})}\,(3\vartheta_2^4(\tfrac{1}{3})-\vartheta_1^4(\tfrac{1}{3}))$$

durch Transformation von (B) mit Anwendung von (J) hervorgeht.

In analoger Weise können wir nun, um neue Beziehungen zu erhalten, auf andere Thetafunctionen dritter Ordnung unsere Methode anwenden.

Hr. Krazer hat in seiner Arbeit pag. 445. und ff. 21 solcher Thetafunctionen angegeben. Wir sehen indessen davon ab, mit ihrer Hülfe neue Systeme aufzubauen.

§ 4.

Parameterdarstellung für den Fall $n = 3$.

Die in § 2. angedeuteten Bemerkungen mögen für diesen Fall näher durchgeführt werden, doch nur insofern, als sie sich auf die Reduction der Constanten beziehen, da die der veränderlichen Thetaquotienten unmittelbar zu erledigen ist.

1) Ausgehend von den Formeln

$$\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{\vartheta_0^2}\;\frac{\vartheta_1\left(\frac{\tau\pm1}{3}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\tau\pm1}{3}\right)}$$

$$=\pm\frac{\dfrac{\vartheta_1(\frac{1}{3})}{\vartheta_0(\frac{1}{3})}\;\dfrac{\vartheta_2(\tau/_3)}{\vartheta_0(\tau/_3)}\;\dfrac{\vartheta_3(\tau/_3)}{\vartheta_0(\tau/_3)}+\dfrac{\vartheta_3(\frac{1}{3})}{\vartheta_0(\frac{1}{3})}\;\dfrac{\vartheta_2(\frac{1}{3})}{\vartheta_0(\frac{1}{3})}\;\dfrac{\vartheta_1(\tau/_3)}{\vartheta_0(\tau/_3)}}{1-\dfrac{\vartheta_1^2(\frac{1}{3})}{\vartheta_0^2(\frac{1}{3})}\;\dfrac{\vartheta_1^2(\tau/_3)}{\vartheta_0^2(\tau/_3)}}$$

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_0}\frac{\vartheta_2\left(\frac{\tau\pm1}{3}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\tau\pm1}{3}\right)}=\frac{\frac{\vartheta_2(\frac13)}{\vartheta_0(\frac13)}\frac{\vartheta_2(\tau/_3)}{\vartheta_0(\tau/_3)}\mp\frac{\vartheta_1(\frac13)}{\vartheta_0(\frac13)}\frac{\vartheta_3(\frac13)}{\vartheta_0(\frac13)}\frac{\vartheta_1(\tau/_3)}{\vartheta_0(\tau/_3)}\frac{\vartheta_3(\tau/_3)}{\vartheta_0(\tau/_3)}}{1-\frac{\vartheta_1^2(\frac13)}{\vartheta_0^2(\frac13)}\frac{\vartheta_1^2(\tau/_3)}{\vartheta_0^2(\tau/_3)}}$$

$$\frac{\vartheta_3}{\vartheta_0}\frac{\vartheta_3\left(\frac{\tau\pm1}{3}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\tau\pm1}{3}\right)}=\frac{\frac{\vartheta_3(\frac13)}{\vartheta_0(\frac13)}\frac{\vartheta_3(\tau/_3)}{\vartheta_0(\tau/_3)}\mp\frac{\vartheta_1(\frac13)}{\vartheta_0(\frac13)}\frac{\vartheta_2(\frac13)}{\vartheta_0(\frac13)}\frac{\vartheta_1(\tau/_3)}{\vartheta_0(\tau/_3)}\frac{\vartheta_2(\tau/_3)}{\vartheta_0(\tau/_3)}}{1-\frac{\vartheta_1^2(\frac13)}{\vartheta_0^2(\frac13)}\frac{\vartheta_1^2(\tau/_3)}{\vartheta_0^2(\tau/_3)}}$$

sieht man, dass die Ausdrücke:

$$\frac{\vartheta_\alpha\left(\frac{\tau\pm1}{3}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\tau\pm1}{3}\right)};\quad \alpha=1,\ 2,\ 3$$

durch die beiden Quotienten:

$$\frac{\vartheta_\alpha(\frac13)}{\vartheta_0(\frac13)}\quad\text{und}\quad\frac{\vartheta_\alpha(\tau/_3)}{\vartheta_0(\tau/_3)};\quad \alpha=1,\ 2,\ 3$$

dargestellt sind. Da nun:

$$\frac{\vartheta_1^2(\frac13)}{\vartheta_0^2(\frac13)}=\frac{\frac{\vartheta_3^2\vartheta_1^2(\frac13)}{\vartheta_0^2\ \vartheta_3^2(\frac13)}}{1+\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_0^2}\frac{\vartheta_1^2(\frac13)}{\vartheta_3^2(\frac13)}}$$

$$\frac{\vartheta_2^2(\frac13)}{\vartheta_0^2(\frac13)}=\frac{\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_0^2}-\frac{\vartheta_1^2(\frac13)}{\vartheta_3^2(\frac13)}}{1+\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_0^2}\frac{\vartheta_1^2(\frac13)}{\vartheta_3^2(\frac13)}}$$

$$\frac{\vartheta_3^2(\frac13)}{\vartheta_0^2(\frac13)}=\frac{1}{\frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_3^2}+\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\frac{\vartheta_1^2(\frac13)}{\vartheta_3^2(\frac13)}}$$

welche Beziehungen für das Argument $\tau/_3$ dieselbe Form behalten, so sind damit alle auf den rechten Seiten in den 3 vorigen Gleichungen auftretenden Quotienten zurückgeführt auf

$$\frac{\vartheta_1^2(\frac13)}{\vartheta_3^2(\frac13)}\quad\text{und}\quad\frac{\vartheta_1^2(\tau/_3)}{\vartheta_3^2(\tau/_3)}$$

wenn wir zunächst noch von den Nullwerten absehen, die wie vorhin so auch hier auftreten.

2) Betrachten wir nun den Ausdruck:

$$\frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0^3(v, \tau)} \frac{\vartheta_0^3}{\vartheta_0(0, \tau')}$$

und greifen, um einen bestimmten Fall vorzuführen, den Repräsentanten: $\vartheta_0(3v, 3\tau)$ heraus, so ergiebt die Anwendung des Hermiteschen Princips die Gleichung:

$$\frac{\vartheta_0(3v, 3\tau)}{\vartheta_0^3(v, \tau)} \frac{\vartheta_0^3}{\vartheta_0(0, 3\tau)} = x_1 + x_2 \frac{\vartheta_1^2(v, \tau)}{\vartheta_0^2(v, \tau)}$$

aus der durch Vermehrung um halbe Perioden erfolgt:

$$\frac{\vartheta_3(3v, 3\tau)}{\vartheta_3^3(v, \tau)} \frac{\vartheta_0^3}{\vartheta_0(0, 3\tau)} = x_1 + x_2 \frac{\vartheta_2^2(v, \tau)}{\vartheta_3^2(v, \tau)}$$

Werden die Constanten in bekannter Weise bestimmt, so erhält man:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = \frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^2}\left(\frac{\vartheta_0^3}{\vartheta_3^3} \frac{\vartheta_3(0, 3\tau)}{\vartheta_0(0, 3\tau)} - 1\right)$$

mithin:

$$\frac{\vartheta_0(3v, 3\tau)}{\vartheta_0^3(v, \tau)} \frac{\vartheta_0^3}{\vartheta_0(0, 3\tau)} = 1 + \frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^2} \frac{\vartheta_1^2(v, \tau)}{\vartheta_0^2(v, \tau)} \left(\frac{\vartheta_0^3 \vartheta_3(0, 3\tau)}{\vartheta_3^3 \vartheta_0(0, 3\tau)} - 1\right)$$

Vermehren wir hierin v um $\frac{1}{3}$, setzen $v = 0$ und erwägen weiter, dass zu Folge der früher angegebenen Beziehungen zwischen den ursprünglichen und transformirten Moduln sein muss:

$$\frac{\vartheta_0(0, 3\tau)}{\vartheta_3(0, 3\tau)} = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3} \frac{\vartheta_0^2(\frac{1}{3})}{\vartheta_3^2(\frac{1}{3})},$$

so folgt:

$$\frac{\vartheta_0^3}{\vartheta_0^3(\frac{1}{3})} = 1 - \frac{\vartheta_1^4(\frac{1}{3})}{\vartheta_0^4(\frac{1}{3})}.$$

Ebenso erhalten wir:

$$-\frac{\vartheta_0^3}{\vartheta_0^3(\tau/_3)} e^{-\pi i \frac{\tau}{3}} = 1 - \frac{\vartheta_1^4(\tau/_3)}{\vartheta_0^4(\tau/_3)}$$

$$-\frac{\vartheta_0^3}{\vartheta_0^3\left(\frac{\tau+1}{3}\right)} e^{-\pi i \left(\frac{\tau-2}{3}\right)} = 1 - \frac{\vartheta_1^4\left(\frac{\tau+1}{3}\right)}{\vartheta_0^4\left(\frac{\tau+1}{3}\right)}$$

$$-\frac{\vartheta_0^3}{\vartheta_0^3\left(\frac{\tau-1}{3}\right)} e^{-\pi i \left(\frac{\tau+2}{3}\right)} = 1 - \frac{\vartheta_1^4\left(\frac{\tau-1}{3}\right)}{\vartheta_0^4\left(\frac{\tau-1}{3}\right)}$$

Ganz dasselbe Verfahren bei Zugrundelegung des Ausdrucks

$$\frac{\vartheta_3(v', \tau')}{\vartheta_3^3(v, \tau)} \; \frac{\vartheta_3^3}{\vartheta_3(0, \tau')}$$

angewandt, liefert die Gleichungen:

$$\frac{\vartheta_3^3}{\vartheta_3^3(\frac{1}{3})} = 1 + \frac{\vartheta_1^4(\frac{1}{3})}{\vartheta_3^4(\frac{1}{3})}$$

$$\frac{\vartheta_3^3}{\vartheta_3^3(\tau/_3)} e^{-\pi i \frac{\tau}{3}} = 1 + \frac{\vartheta_1^4(\tau/_3)}{\vartheta_3^4(\tau/_3)}$$

$$\frac{\vartheta_3^3}{\vartheta_3^3\left(\frac{\tau+1}{3}\right)} e^{-\pi i \left(\frac{\tau-2}{3}\right)} = 1 + \frac{\vartheta_1^4\left(\frac{\tau+1}{3}\right)}{\vartheta_3^4\left(\frac{\tau+1}{3}\right)}$$

$$\frac{\vartheta_3^3}{\vartheta_3^3\left(\frac{\tau-1}{3}\right)} e^{-\pi i \left(\frac{\tau+2}{3}\right)} = 1 + \frac{\vartheta_1^4\left(\frac{\tau-1}{3}\right)}{\vartheta_3^4\left(\frac{\tau-1}{3}\right)} \quad \text{etc.}$$

Wir finden demnach das Resultat, dass die Grössen

$$\frac{\vartheta_0^3}{\vartheta_0^3(\frac{1}{3})}, \quad \cdots \quad \frac{\vartheta_0^3}{\vartheta_0^3\left(\frac{\tau-1}{3}\right)}$$

sowie deren analoge mit Bezug auf (1) sich in die gewünschte Form bringen lassen.

3) Was endlich die Constanten betrifft, deren Argumente gleich null sind, so wollen wir die Transformation nur für einen Quotienten durchführen. Nehmen wir den Quotienten $\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}$, so folgt mit Anwendung des Multiplicationstheorems:

$$\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2} = \frac{\vartheta_2^2(3\,.\,\frac{1}{3})}{\vartheta_3^2(3\,.\,\frac{1}{3})} = \frac{\vartheta_3^2(\frac{1}{3})}{\vartheta_2^2(\frac{1}{3})} \cdot \left\{\frac{\vartheta_2^2(\frac{1}{3})\,\vartheta_0^2(\frac{1}{3}) - \vartheta_3^2(\frac{1}{3})\,\vartheta_1^2(\frac{1}{3})}{\vartheta_3^2(\frac{1}{3})\,\vartheta_0^2(\frac{1}{3}) - \vartheta_2^2(\frac{1}{3})\,\vartheta_1^2(\frac{1}{3})}\right\}^2$$

$$= \frac{\frac{\vartheta_3^2(\frac{1}{3})}{\vartheta_2^2(\frac{1}{3})}\left\{\frac{\vartheta_2^2(\frac{1}{3})}{\vartheta_3^2(\frac{1}{3})} - \frac{\vartheta_1^2(\frac{1}{3})}{\vartheta_0^2(\frac{1}{3})}\right\}^2}{\left\{1 - \frac{\vartheta_1^2(\frac{1}{3})}{\vartheta_2^2(\frac{1}{3})} \cdot \frac{\vartheta_1^2(\frac{1}{3})}{\vartheta_3^2(\frac{1}{3})}\right\}^2}$$

Mit Rücksicht auf jene Gleichungen, die die rechts auftretenden Ausdrücke überführen in $f = \frac{\vartheta_1^2(\frac{1}{3})}{\vartheta_3^2(\frac{1}{3})}$, geht hervor, dass $\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_0^2}$ bestimmt ist aus

$$\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_0^2} - \frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_2^2} = \frac{f^4+6f^2-3}{4f}.$$

Auf diese Weise haben wir die Möglichkeit der Reduction aller Constanten auf deren zwei dargelegt. Ob es nun gerade geeignet ist, die von uns gewählten beiden Ausdrücke zu Grunde zu legen, um die übrigen auf sie zu beziehen, ist nicht weiter untersucht worden.

Jedenfalls aber wird bei wirklicher Durchführung der hier nur im Princip angedeuteten Methode an Beispielen die Wahl jener Ausdrücke auf die Rechnung von wesentlichem Einfluss sein.

§ 5.

Ueberführung der Thetaquotienten in die von Hr. Krazer angegebene Form.

Hr. Krazer hat in der anfangs erwähnten Arbeit die von ihm aufgestellten Thetaquotienten sämtlich durch eine passend gewählte Hülfsvariable Z ausgedrückt, wobei die Constanten als Functionen einer neu eingeführten Grösse z dargestellt sind. Die dann erhaltenen Resultate sind allerdings sehr einfach, dorch dürfte es schon schwer werden, für den Fall $n = 5$ die passenden Grössen aufzufinden, durch die eine Darstellung der Thetaquotienten in analoger Weise ermöglicht würde, während bei unserer Methode unmittelbar klar, wie die Parameterdarstellung vorzunehmen ist. Wir wollen nun versuchen, auch von unserem Verfahren aus zu jenen von Hrn. Krazer entwickelten Formen zu gelangen. Dazu wählen wir die 3 Quotienten:

$$\frac{\vartheta\{0\}(v)^3}{\vartheta\{0 \mid \alpha \mid -\alpha\}(v)}; \quad \frac{\vartheta\{\alpha\}(v)^3}{\vartheta\{0 \mid \alpha \mid -\alpha\}(v)}; \quad \frac{\vartheta\{-\alpha\}(v)^3}{\vartheta\{0 \mid \alpha \mid -\alpha\}(v)}.$$

Um diese Thetaquotienten in unsere Form zu übertragen, verweisen wir auf die Bezeichnungen, deren Hr. Krazer sich in seinen Untersuchungen bedient hat. Er setzt allgemein:

$$\begin{bmatrix}\eta\\ \eta_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\eta\end{bmatrix}$$

und bezeichnet dann:

$$\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha\end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\beta\\ \beta_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\beta\end{bmatrix};$$

$$e^{{}^2/_3\pi i\eta\eta_1} = \tau^{|\eta|}; \quad e^{{}^2/_3\pi i(k\eta_1-\eta k_1)} = \tau^{k|\eta}$$

Weiter führt er zur Abkürzung ein:

$$\vartheta[\eta](v)\,\vartheta[\eta+\beta](v)\,\vartheta[\eta-\beta](v)\,\tau^{|\eta|} = \vartheta\{\eta \mid \eta+\beta \mid \eta-\beta\}(v);$$

$$\vartheta[\eta](0)\,\vartheta[\eta+\beta](0)\,\vartheta[\eta-\beta](0)\,\tau^{|\eta|} = (\eta \mid \eta+\beta \mid \eta-\beta);$$

$$\vartheta[\eta](v)^3\,\tau^{|\eta|} = \vartheta\{\eta\}(v)^3, \qquad \vartheta[\eta](0)^3\,\tau^{|\eta|} = (\eta)^3.$$

Alsdann werden jene Ausdrücke übergehen in resp.:

$$\frac{\vartheta_3(v)^3}{e^{2\pi i\tau/_9}\,\vartheta_3(v)\,\vartheta_3(v+\tau/_3)\,\vartheta_3(v-\tau/_3)}$$

$$\frac{\vartheta_3(v+\tau/_3)^3\,e^{\pi i(2v+\tau/_3)}}{e^{2\pi i\tau/_9}\,\vartheta_3(v)\,\vartheta_3(v+\tau/_3)\,\vartheta_3(v-\tau/_3)}$$

$$\frac{\vartheta_3(v-\tau/_3)^3\,e^{\pi i(-2v+\tau/_3)}}{e^{2\pi i\tau/_9}\,\vartheta_3(v)\,\vartheta_3(v+\tau/_3)\,\vartheta_3(v-\tau/_3)}$$

Wir betrachten nun die Thetafunctionen einzeln, indem wir auf jede das Hermite'sche Princip anwenden. Es folgt:

$$\begin{aligned}
\vartheta_3(v\pm\tau/_3)^3\,e^{\pi i(\pm 2v+\tau/_3)} &= c_1\vartheta_3(v)^3+c_2\vartheta_3(v)\vartheta_2(v)^2+c_3\vartheta_0(v)\vartheta_1(v)\vartheta_2(v)\\
\vartheta_2(v\pm\tau/_3)^3 \quad \text{,,} \quad &= c_1\vartheta_2(v)^3+c_2\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)^2-c_3\vartheta_0(v)\vartheta_1(v)\vartheta_3(v)\\
-\vartheta_0(v\pm\tau/_3)^3 \quad \text{,,} \quad &= c_1\vartheta_0(v)^3+c_2\vartheta_0(v)\vartheta_1(v)^2-c_3\vartheta_1(v)\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)\\
-\vartheta_1(v\pm\tau/_3)^3 \quad \text{,,} \quad &= c_1\vartheta_1(v)^3+c_2\vartheta_1(v)\vartheta_0(v)^2+c_3\vartheta_0(v)\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)
\end{aligned}$$

wobei sich für die Constanten die Werte ergeben:

$$c_1 = -\frac{\vartheta_0^3(\tau/_3)}{\vartheta_0^3}\,e^{\pi i\tau/_3}; \quad c_3 = \mp\frac{\vartheta_1^3(\tau/_3)}{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}\,e^{\pi i\tau/_3};$$

$$c_2 = \frac{\vartheta_0^3\,\vartheta_3^3(\tau/_3)+\vartheta_3^3\,\vartheta_0^3(\tau/_3)}{\vartheta_0^3\,\vartheta_3\,\vartheta_2^2}\,e^{\pi i\tau/_3};$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_3(v+\tau/_3)\,\vartheta_3(v-\tau/_3)\,e^{2\pi i\tau/_9} &= c_1\,\vartheta_3(v)^2+c_2\,\vartheta_2(v)^2\\
\vartheta_2(v+\tau/_3)\,\vartheta_2(v-\tau/_3) \quad \text{,,} \quad &= c_1\,\vartheta_2(v)^2+c_2\,\vartheta_3(v)^2\\
\vartheta_0(v+\tau/_3)\,\vartheta_0(v-\tau/_3) \quad \text{,,} \quad &= c_1\,\vartheta_0(v)^2+c_2\,\vartheta_1(v)^2\\
\vartheta_1(v+\tau/_3)\,\vartheta_1(v-\tau/_3) \quad \text{,,} \quad &= c_1\,\vartheta_1(v)^2
\end{aligned}$$

$$c_1 = \frac{\vartheta_0^2(\tau/_3)}{\vartheta_0^2}\, e^{2\pi i\tau/_9}; \qquad c_2 = -\frac{\vartheta_1^2(\tau/_3)}{\vartheta_0^2}\, e^{2\pi i\tau/_9}$$

Mithin erhalten wir:

$$1)\qquad \frac{\vartheta\{0\}(v)^3}{\vartheta\{0\,|\,\alpha\,|\,-\alpha\}(v)} = \frac{e^{-2\pi i\tau/_9}}{\dfrac{\vartheta_0^2(\tau/_3)}{\vartheta_0^2} - \dfrac{\vartheta_2^2(v)}{\vartheta_3^2(v)}\cdot\dfrac{\vartheta_1^2(\tau/_3)}{\vartheta_0^2}}$$

$$2)\qquad \frac{\vartheta\{\alpha\}(v)^3}{\vartheta\{0\,|\,\alpha\,|\,-\alpha\}(v)} = \frac{e^{\pi i\tau/_9}}{\dfrac{\vartheta_0^2(\tau/_3)}{\vartheta_0^2} - \dfrac{\vartheta_2^2(v)}{\vartheta_3^2(v)}\cdot\dfrac{\vartheta_1^2(\tau/_3)}{\vartheta_0^2}}$$

$$\Big\{-\frac{\vartheta_0^3(\tau/_3)}{\vartheta_0^3} + \frac{\vartheta_2^2(v)}{\vartheta_3^2(v)}\cdot\frac{\vartheta_0^3\vartheta_3^3(\tau/_3)+\vartheta_3^3.\vartheta_0^3(\tau/_3)}{\vartheta_0^3\vartheta_3\vartheta_2^2} - \frac{\vartheta_0(v)\vartheta_1(v)\vartheta_2(v)}{\vartheta_3^3(v)}\cdot\frac{\vartheta_1^3(\tau/_3)}{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}\Big\}$$

$$3)\qquad \frac{\vartheta\{-\alpha\}(v)^3}{\vartheta\{0\,|\,\alpha\,|\,-\alpha\}(v)} = \frac{e^{\pi i\tau/_9}}{\dfrac{\vartheta_0^2(\tau/_3)}{\vartheta_0^2} - \dfrac{\vartheta_2^2(v)}{\vartheta_3^2(v)}\,\dfrac{\vartheta_1^2(\tau/_3)}{\vartheta_0^2}}$$

$$\Big\{-\frac{\vartheta_0^3(\tau/_3)}{\vartheta_0^3} + \frac{\vartheta_2^2(v)}{\vartheta_3^2(v)}\cdot\frac{\vartheta_0^3\vartheta_3^3(\tau/_3)+\vartheta_3^3\vartheta_0^3(\tau/_3)}{\vartheta_0^3\vartheta_3\vartheta_2^2} + \frac{\vartheta_0(v)\vartheta_1(v)\vartheta_2(v)}{\vartheta_3^3(v)}\,\frac{\vartheta_1^3(\tau/_3)}{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}\Big\}$$

Ferner ist:

$$2Z = \frac{\vartheta_3(v+\frac{1}{3})\vartheta_3\left(v+\frac{\tau+1}{3}\right)\vartheta_3\left(v-\frac{\tau-1}{3}\right)}{\vartheta_3(v)\vartheta_3(v+\tau/_3)\vartheta_3(v-\tau/_3)} + \frac{\vartheta_3(v-\frac{1}{3})\vartheta_3\left(v-\frac{\tau+1}{3}\right)\vartheta_3\left(v+\frac{\tau-1}{3}\right)}{\vartheta_3(v)\vartheta_3(v+\tau/_3)\vartheta_3(v-\tau/_3)}$$

und die von Z abhängige Grösse $\sqrt{R'}$:

$$2\sqrt{R} = \frac{\vartheta_3(v+\frac{1}{3})\vartheta_3\left(v+\frac{\tau+1}{3}\right)\vartheta_3\left(v-\frac{\tau-1}{3}\right)}{\vartheta_3(v)\vartheta_3(v+\tau/_3)\vartheta_3(v-\tau/_3)} - \frac{\vartheta_3(v-\frac{1}{3})\vartheta_3\left(v-\frac{\tau+1}{3}\right)\vartheta_3\left(v+\frac{\tau-1}{3}\right)}{\vartheta_3(v)\vartheta_3(v+\tau/_3)\vartheta_3(v-\tau/_3)}$$

oder es lassen sich beide Grössen in die Form bringen:

$$Z = \frac{\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\vartheta_0(\frac{1}{3})\vartheta_0\left(\frac{\tau+1}{3}\right)\vartheta_0\left(\frac{\tau-1}{3}\right)}{\vartheta_0^3} + \dfrac{\vartheta_2^2(v)}{\vartheta_3^2(v)}\,\dfrac{1}{\vartheta_0^3\vartheta_3\vartheta_2^2}\times \\ \left(\vartheta_0^3\vartheta_3(\frac{1}{3})\vartheta_3\left(\frac{\tau+1}{3}\right)\vartheta_3\left(\frac{\tau-1}{3}\right) - \vartheta_3^3\vartheta_0(\frac{1}{3})\vartheta_0\left(\frac{\tau+1}{3}\right)\vartheta_0\left(\frac{\tau-1}{3}\right)\right)\end{array}\right\}}{\dfrac{\vartheta_0^2(\tau/_3)}{\vartheta_0^2} - \dfrac{\vartheta_2^2(v)}{\vartheta_3^2(v)}\,\dfrac{\vartheta_1^2(\tau/_3)}{\vartheta_0^2}}$$

$$\sqrt{R} = \frac{\vartheta_0(v)\,\vartheta_1(v)\,\vartheta_2(v)}{\vartheta_3^3(v)}\;\frac{\vartheta_1(\frac{1}{3})\vartheta_1\left(\frac{\tau+1}{3}\right)\vartheta_1\left(\frac{\tau-1}{3}\right)}{\vartheta_0\,\vartheta_2\,\vartheta_3}$$

Es handelt sich nun zunächst darum, die Gleichungen (R_0) cf. Krazer pag. 437 herzustellen. Und zwar werden wir versuchen, den 2ten Teil dieser Beziehungen abzuleiten, da, wenn dieser bekannt, auch sofort die 4 ersten Beziehungen gefunden sind. Ein Blick auf jenen Teil der Gleichungen nun, die die 3ten Potenzen

$$\frac{(\beta)^3}{(0)^3};\quad \frac{(\alpha)^3}{(0)^3};\quad \frac{(\beta+\alpha)^3}{(0)^3};\quad \frac{(\beta-\alpha)^3}{(0)^3}$$

durch die Grösse z darstellen, zeigt, dass, wenn wir einen dieser 4 Quotienten als gegeben ansehen, die 3 übrigen sich als Wurzeln einer kubischen Gleichung darstellen lassen müssen. Diese kubische Gleichung können wir uns aber leicht dadurch herstellen, dass wir die Teilungsgleichung der elliptischen Functionen, die vom 4ten Grade ist, durch Elimination einer der Wurzeln auf eine Gleichung 3ten Grades reduciren. Um indessen die auftretenden Wurzelgrössen zu vermeiden, wollen wir direct von der Teilungsgleichung ausgehen.

Dieselbe lautet bekanntlich:

$$k^4z^4 - 6k^2z^2 + 4(1+k^2)z - 3 = 0;$$

ihre Wurzeln sind:

$$z_1 = \frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^2}\,\frac{\vartheta_1^2(\frac{1}{3})}{\vartheta_0^2(\frac{1}{3})};\quad \ldots\quad z_4 = \frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^2}\,\frac{\vartheta_1^2\left(\frac{\tau-1}{3}\right)}{\vartheta_0^2\left(\frac{\tau-1}{3}\right)}$$

Beachten wir dann, dass die Grössen

$$\frac{(\beta)^3}{(0)^3};\quad \ldots\quad \frac{(\beta-\alpha)^3}{(0)^3}$$

in unserer Form lauten:

$$\frac{(\beta)^3}{(0)^3} = \frac{\vartheta_3^3(\frac{1}{3})}{\vartheta_3^3}; \quad \frac{(\alpha)^3}{(0)^3} = \frac{\vartheta_3^3(\tau/_3)}{\vartheta_3^3} e^{\pi i\tau/_3}$$

$$\frac{(\beta+\alpha)^3}{(0)^3} = \frac{\vartheta_3^3\left(\frac{\tau+1}{3}\right)}{\vartheta_3^3} e^{\pi i\left(\frac{\tau-2}{3}\right)}$$

$$\frac{(\beta-\alpha)^3}{(0)^3} = \frac{\vartheta_3^3\left(\frac{\tau-1}{3}\right)}{\vartheta_3^3} e^{\pi i\left(\frac{\tau+2}{3}\right)}$$

und erinnern wir ferner an die im vorigen Paragraphen gewonnenen Beziehungen:

$$\frac{\vartheta_1^4(\frac{1}{3})}{\vartheta_3^4(\frac{1}{3})} = \frac{\vartheta_3^3}{\vartheta_3^3(\frac{1}{3})} - 1; \quad \frac{\vartheta_1^4(\tau/_3)}{\vartheta_3^4(\tau/_3)} = \frac{\vartheta_3^3}{\vartheta_3^3(\tau/_3)} e^{-\pi i\tau/_3} - 1$$

$$\frac{\vartheta_1^4\left(\frac{\tau+1}{3}\right)}{\vartheta_3^4\left(\frac{\tau+1}{3}\right)} = \frac{\vartheta_3^3}{\vartheta_3^3\left(\frac{\tau+1}{3}\right)} e^{-\pi i/_3(\tau-2)} - 1$$

$$\frac{\vartheta_1^4\left(\frac{\tau-1}{3}\right)}{\vartheta_3^4\left(\frac{\tau-1}{3}\right)} = \frac{\vartheta_3^3}{\vartheta_3^3\left(\frac{\tau-1}{3}\right)} e^{-\pi i/_3(\tau+2)} - 1$$

zu Folge deren wir erhalten:

$$\frac{(0)^3}{(\beta)^3} = 1 + \frac{\vartheta_1^4(\frac{1}{3})}{\vartheta_3^4(\frac{1}{3})}; \quad \frac{(0)^3}{(\alpha)^3} = 1 + \frac{\vartheta_1^4(\tau/_3)}{\vartheta_3^4(\tau/_3)}$$

$$\frac{(0)^3}{(\beta-\alpha)^3} = 1 + \frac{\vartheta_1^4\left(\frac{\tau+1}{3}\right)}{\vartheta_3^4\left(\frac{\tau+1}{3}\right)}; \quad \frac{(0)^3}{(\beta-\alpha)^3} = 1 + \frac{\vartheta_1^4\left(\frac{\tau-1}{3}\right)}{\vartheta_3^4\left(\frac{\tau-1}{3}\right)}$$

so kommt die Untersuchung darauf hinaus, die Wurzeln jener Gleichung durch die Bezeichnungsweisen des Hrn. Krazer auszudrücken. Das gelingt aber leicht, sobald wir die Teilungsgleichung so umgewandelt haben, dass ihre Wurzeln, von Nullwerten abgesehen, sind:

$$\frac{\vartheta_1^4(\frac{1}{3})}{\vartheta_3^4(\frac{1}{3})}, \quad \cdots \quad \frac{\vartheta_1^4\left(\frac{\tau-1}{3}\right)}{\vartheta_3^4\left(\frac{\tau-1}{3}\right)}$$

Dazu nehmen wir in der Teilungsgleichung die Substitution vor:

$$x = 1 - k^2 z$$

und erhalten:

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2(1-k^2) - 4x(1-k^2)^2 + (1-k^2)^2 = 0$$

wobei:

$$x_1 = \frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_3^2}\frac{\vartheta_3^2(\frac{1}{3})}{\vartheta_0^2(\frac{1}{3})}; \quad \dots \quad x_4 = \frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_3^2}\frac{\vartheta_3^2\left(\frac{\tau-1}{3}\right)}{\vartheta_0^2\left(\frac{\tau-1}{3}\right)}$$

Mit Hülfe der Theorie der symmetrischen Functionen kann man hieraus zunächst ableiten

$$y^4 + y^2\frac{6}{k^2(1-k^2)} + y\frac{4(1-2k^2)}{k^4(1-k^2)^2} - \frac{3}{k^4(1-k^2)^2} = 0$$

$$y_1 = \frac{\vartheta_3^4}{\vartheta_0^2\vartheta_2^2}\frac{\vartheta_1^2(\frac{1}{3})}{\vartheta_3^2(\frac{1}{3})}; \quad \dots \quad y_4 = \frac{\vartheta_3^4}{\vartheta_0^2\vartheta_2^2}\frac{\vartheta_1^2\left(\frac{\tau-1}{3}\right)}{\vartheta_3^2\left(\frac{\tau-1}{3}\right)}$$

und weiter:

$$u^4 + u^3\frac{12}{k^2(1-k^2)} + u^2\frac{30}{k^4(1-k^2)^2} - u\frac{4(4-7k^2+7k^4)}{k^8(1-k^2)^4} + \frac{9}{k^8(1-k^2)^4} = 0$$

deren Wurzeln gerade die Quadrate der vorhergehenden sind, also nunmehr die gewünschte Form haben:

$$u_1 = \frac{\vartheta_3^8}{\vartheta_0^4\vartheta_2^4}\frac{\vartheta_1^4(\frac{1}{3})}{\vartheta_3^4(\frac{1}{3})}; \quad \dots \quad u_4 = \frac{\vartheta_3^8}{\vartheta_0^4\vartheta_2^4}\frac{\vartheta_1^4\left(\frac{\tau-1}{3}\right)}{\vartheta_3^4\left(\frac{\tau-1}{3}\right)}$$

Treffen wir nun die völlig willkürliche Annahme, dass

$$\frac{(0)^3}{(\alpha)^3} = \frac{1+8z^3}{1-z^3}$$

sein möge, so erhalten wir — wegen der zwischen den Coefficienten und Wurzeln einer Gleichung bestehenden Relationen —

$$\frac{(0)^3}{(\beta)^3} + \frac{(0)^3}{(\beta+\alpha)^3} + \frac{(0)^3}{(\beta-\alpha)^3} = -\frac{9}{1-z^3}$$

$$\frac{(0)^3}{(\beta)^3}\frac{(0)^3}{(\beta+\alpha)^3} + \frac{(0)^3}{(\beta)^3}\frac{(0)^3}{(\beta-\alpha)^3} + \frac{(0)^3}{(\beta+\alpha)^3}\frac{(0)^3}{(\beta-\alpha)^3} = \frac{9(1+8z^3)}{(1-z^3)^2}$$

$$\frac{(0)^3}{(\beta)^3}\frac{(0)^3}{(\beta+\alpha)^3}\frac{(0)^3}{(\beta-\alpha)^3} = \frac{1}{z^3}\frac{(1+8z^3)^2}{(1-z^3)^2}$$

Aus diesen Gleichungen bestimmen sich aber die 3 G

$$\frac{(0)^3}{(\beta)^3},\quad \frac{(0)^3}{(\beta+\alpha)^3}\quad \frac{(0)^3}{(\beta-\alpha)^3}$$

genau so wie bei Hrn. Krazer, nämlich:

$$\frac{(0)^3}{(\beta)^3} = \frac{1}{z}\,\frac{1+8z^3}{1-z^3}\,\frac{1-z}{1+2z}$$

$$(\mathrm{R}_0)\qquad \frac{(0)^3}{(\beta+\alpha)^3} = \frac{1}{e^{2/_3\pi i}z}\,\frac{1+8z^3}{1-z^3}\,\frac{1-e^{2/_3\pi i}z}{1+2e^{2/_3\pi i}z}$$

$$\frac{(0)^3}{(\beta-\alpha)^3} = \frac{1}{e^{-2/_3\pi i}z}\,\frac{1+8z^3}{1-z^3}\,\frac{1-e^{-2/_3\pi i}z}{1+2e^{-2/_3\pi i}z}$$

Demnach sind die ursprünglichen Quotienten dargestellt durch:

$$\frac{\vartheta_1^4(\frac{1}{3})}{\vartheta_3^4(\frac{1}{3})} = \frac{(1-z)^4}{z(1-z^3)};\quad \frac{\vartheta_1^4(\tau/_3)}{\vartheta_3^4(\tau/_3)} = \frac{9z^3}{1-z^3}$$

$$\frac{\vartheta_1^4\left(\frac{\tau+1}{3}\right)}{\vartheta_3^4\left(\frac{\tau+1}{3}\right)} = \frac{e^{-2/_3\pi i}(1-e^{2/_3\pi i}z)^4}{z(1-z^3)};\quad \frac{\vartheta_1^4\left(\frac{\tau-1}{3}\right)}{\vartheta_3^4\left(\frac{\tau-1}{3}\right)} = \frac{e^{2/_3\pi i}(1-e^{-2/_3\pi i}z)^4}{z(1-z^3)}$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen sind dann auch die 4 ersten Beziehungen in (R_0) gefunden:

$$\frac{\vartheta_3(\frac{1}{3})\,\vartheta_3\left(\frac{\tau+1}{3}\right)\vartheta_3\left(\frac{\tau-1}{3}\right)}{\vartheta_3\vartheta_3^2(\tau/_3)} = z;$$

$$\frac{\vartheta_3(\tau/_3)\,\vartheta_3\left(\frac{\tau+1}{3}\right)\vartheta_3\left(\frac{\tau-1}{3}\right)}{\vartheta_3\vartheta_3^2(\frac{1}{3})}\,e^{\pi i\tau/_3} = \frac{1-z}{1+2z};$$

$$(\mathrm{R}_0)\qquad \frac{\vartheta_3(\frac{1}{3})\,\vartheta_3(\tau/_3)\vartheta_3\left(\frac{\tau-1}{3}\right)}{\vartheta_3\,\vartheta_3^2\left(\frac{\tau+1}{3}\right)} = \frac{1-e^{2/_3\pi i}z}{1+2e^{2/_3\pi i}z};$$

$$\frac{\vartheta_3(\frac{1}{3})\,\vartheta_3(\tau/_3)\,\vartheta_3\left(\frac{\tau+1}{3}\right)}{\vartheta_3\,\vartheta_3^2\left(\frac{\tau-1}{3}\right)} = \frac{1-e^{-2/_3\pi i}z}{1+2e^{-2/_3\pi i}z}$$

Nachdem wir so die Gleichungen (R_0) entwickelt haben, wollen wir auf die Darstellung der Thetaquotienten eingehen. Wir bringen dieselben dazu auf die Form:

$$a + bz + c\sqrt{R}$$

wodurch wir zur Bestimmung der Constanten a, b, c gewisse Gleichungen erhalten. In denselben treten aber nicht allein Ausdrücke der vorhin betrachteten Art auf, sondern überhaupt Ausdrücke von der Form, wie wir sie in § 4 behandelt haben. Dieselben wären nun naturgemäss sämtlich durch die Grösse z auszudrücken. Ohne Schwierigkeiten lässt sich dies durchführen; indessen wollen wir in den gewählten Beispielen zeigen, wie man auch mit Hülfe einiger Relationen einfach zum Ziel kommt.

Beispiel 1:

Wir bringen den Thetaquotienten auf die Form:

$$a + bZ$$

und erhalten für a und b die Bestimmungsgleichungen:

$$e^{-2\pi i \tau/_9} = a \frac{\vartheta_0^2(\tau/_3)}{\vartheta_0^2} + b \frac{\vartheta_0(\frac{1}{3})\, \vartheta_0\left(\frac{\tau+1}{3}\right) \vartheta_0\left(\frac{\tau-1}{3}\right)}{\vartheta_0^3}$$

$$0 = -a \frac{\vartheta_1^2(\tau/_3)}{\vartheta_0^2} + \frac{b}{\vartheta_0^3 \vartheta_3 \vartheta_2^2}\Big(\vartheta_0^3 \vartheta_3(\tfrac{1}{3}) \vartheta_3\left(\frac{\tau+1}{3}\right) \vartheta_3\left(\frac{\tau-1}{3}\right)$$
$$- \vartheta_3^3 \vartheta_0(\tfrac{1}{3}) \vartheta_0\left(\frac{\tau+1}{3}\right) \vartheta_0\left(\frac{\tau-1}{3}\right)\Big)$$

Mithin:

$$b = \frac{e^{-2\pi i \tau/_9}\, \vartheta_0 \vartheta_3 \vartheta_2^2 \vartheta_1^2(\tau/_3)}{\vartheta_0 \vartheta_3(\frac{1}{3}) \vartheta_3\left(\frac{\tau+1}{3}\right) \vartheta_3\left(\frac{\tau-1}{3}\right) \vartheta_0^2(\tau/_3) - \vartheta_3 \vartheta_0(\frac{1}{3}) \vartheta_0\left(\frac{\tau+1}{3}\right) \vartheta_0\left(\frac{\tau-1}{3}\right) \vartheta_3^2(\tau/_3)}$$

In Berücksichtigung der Gleichungen (R_0), zu denen wir weiter hinzufügen:

$$\frac{\vartheta_0(\frac{1}{3})}{\vartheta_3(\frac{1}{3})} \frac{\vartheta_0(\tau/_3)}{\vartheta_3(\tau/_3)} \frac{\vartheta_0\left(\frac{\tau+1}{3}\right)}{\vartheta_3\left(\frac{\tau+1}{3}\right)} \frac{\vartheta_0\left(\frac{\tau-1}{3}\right)}{\vartheta_3\left(\frac{\tau-1}{3}\right)} = 1;$$

$$\vartheta_0 \vartheta_0^3(\tau/_3) - \vartheta_3 \vartheta_3^3(\tau/_3) = \frac{3\vartheta_2 \vartheta_2(\tau/_3) \vartheta_0^2(\tau/_3) \vartheta_3^2(\tau/_3)}{\vartheta_1^2(\tau/_3)}$$

$$\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 = 2e^{\pi i\tau/_3}\vartheta_0(\tau/_3)\vartheta_2(\tau/_3)\vartheta_3(\tau/_3)$$

finden wir dann:

$$b = \frac{2}{3z}e^{\pi i\tau/_9}\frac{\vartheta_1^4(\tau/_3)}{\vartheta_3^4(\tau/_3)}\frac{\vartheta_3(\tau/_3)}{\vartheta_3}$$

$$b = 6z^2\sqrt[3]{\frac{1}{(1-z^3)^2(1+8z^3)}}$$

Substituiren wir diesen Wert von b in die 2te der Bestimmungsgleichungen und nehmen die Formeln hinzu:

$$\vartheta_0^3\vartheta_0(\tau/_3)-\vartheta_3^3\vartheta_3(\tau/_3) = -e^{\pi i\tau/_3}(\vartheta_0^4(\tau/_3)+\vartheta_3^4(\tau/_3))$$

$$\vartheta_0\vartheta_2^2\vartheta_0(\tau/_3) = -e^{\pi i\tau/_3}(\vartheta_0^2(\tau/_3)\vartheta_2^2(\tau/_3)+\vartheta_1^2(\tau/_3)\vartheta_3^2(\tau/_3))$$

die uns das Additionstheorem unmittelbar liefert, so ergiebt sich:

$$a = \sqrt[3]{\frac{1}{(1-z^3)^2(1+8z^3)}}\,6z^3\frac{\vartheta_3^2(\tau/_3)}{\vartheta_1^2(\tau/_3)}\frac{\vartheta_0^4(\tau/_3)+\vartheta_3^4(\tau/_3)}{\vartheta_0^2(\tau/_3)\vartheta_2^2(\tau/_3)+\vartheta_1^2(\tau/_3)\vartheta_3^2(\tau/_3)}$$

Den von z unabhängigen Factor können wir aber leicht durch $\frac{\vartheta_1^4(\tau/_3)}{\vartheta_3^4(\tau/_3)}$ ausdrücken und zwar in der Form:

$$2\frac{\vartheta_3^2(\tau/_3)}{\vartheta_1^2(\tau/_3)}\frac{\vartheta_0^4(\tau/_3)+\vartheta_3^4(\tau/_3)}{\vartheta_0^2(\tau/_3)\vartheta_2^2(\tau/_3)+\vartheta_1^2(\tau/_3)\vartheta_3^2(\tau/_3)} = 1+3\frac{\vartheta_3^4(\tau/_3)}{\vartheta_1^4(\tau/_3)}$$

also wird:

$$a = (1+2z^3)\sqrt[3]{\frac{1}{(1-z^3)^2(1+8z^3)}}$$

Beispiel 2:

Wir geben dem Quotienten die Form:

$$a-bz+c\sqrt{R}$$

dann müssen a, b, c sich bestimmen lassen aus.

$$-e^{\pi i\tau/_9}\frac{\vartheta_0^3(\tau/_3)}{\vartheta_0^3} = a\frac{\vartheta_0^2(\tau/_3)}{\vartheta_0^2} - b\frac{\vartheta_0(\frac{1}{3})\vartheta_0\left(\frac{\tau+1}{3}\right)\vartheta_0\left(\frac{\tau-1}{3}\right)}{\vartheta_0^3}$$

$$e^{\pi i\tau/_9}\frac{\vartheta_0^3\vartheta_3^3(\tau/_3)+\vartheta_3^3\vartheta_0^3(\tau/_3)}{\vartheta_0^3\vartheta_3\vartheta_2^2} = -a\frac{\vartheta_1^2(\tau/_3)}{\vartheta_0^2}$$

$$-\frac{b}{\vartheta_0^3\vartheta_3\vartheta_2^2}\left(\vartheta_0^3\vartheta_3(\tfrac{1}{3})\vartheta_3\left(\frac{\tau+1}{3}\right)\vartheta_3\left(\frac{\tau-1}{3}\right)-\vartheta_3^3\vartheta_0(\tfrac{1}{3})\vartheta_0\left(\frac{\tau+1}{3}\right)\vartheta_0\left(\frac{\tau-1}{3}\right)\right)$$

$$-e^{\pi i\tau/_9}\vartheta_1^3(\tau/_3)=c\,\vartheta_1(\tfrac{1}{3})\,\vartheta_1\left(\frac{\tau+1}{3}\right)\vartheta_1\left(\frac{\tau-1}{3}\right)$$

Die beiden ersten Gleichungen geben uns:

$$-bz(\vartheta_0\vartheta_0^3(\tau/_3)-\vartheta_3\vartheta_3^3(\tau/_3))\vartheta_3=e^{\pi i\tau/_9}\vartheta_0^3(\tau/_3)(\vartheta_0\vartheta_3(\tau/_3)+\vartheta_3\vartheta_0(\tau/_3))$$

Mit Benutzung der vorhin erwähnten Relationen, die noch vermehrt werden mögen um

$$\vartheta_0\vartheta_2(\tau/_3)\vartheta_3(\tau/_3)=\vartheta_2\vartheta_0(\tau/_3)\vartheta_3(\tau/_3)+\vartheta_3\vartheta_0(\tau/_3)\vartheta_2(\tau/_3)$$
$$\vartheta_3^2\vartheta_0^2(\tau/_3)=\vartheta_0^2\vartheta_3^2(\tau/_3)+\vartheta_2^2\vartheta_1^2(\tau/_3)$$

geht nach Multiplication beider Seiten mit

$$\vartheta_0\vartheta_3(\tau/_3)-\vartheta_3\vartheta_0(\tau/_3)$$

hervor:

$$b=e^{\pi i\tau/_9}\frac{1}{3z}\frac{\vartheta_3(\tau/_3)}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_1^4(\tau/_3)}{\vartheta_3^4(\tau/_3)}$$

oder:

$$b=\frac{3z^2}{\sqrt[3]{(1-z^3)^2(1+8z^3)}}$$

Dieser Wert von b in die erste Gleichung substituirt, giebt:

$$a=-\frac{e^{\pi i\tau/_9}(\vartheta_0^4(\tau/_3)+\vartheta_3^4(\tau/_3))}{\vartheta_0\vartheta_0^3(\tau/_3)-\vartheta_3\vartheta_3^3(\tau/_3)}$$

$$=\frac{e^{2\pi i\tau/_9}(\vartheta_0^3\vartheta_0(\tau/_3)-\vartheta_3\vartheta_3^3(\tau/_3))}{\vartheta_0\vartheta_0^3(\tau/_3)-\vartheta_3\vartheta_3^3(\tau/_3)}$$

Zu genau demselben Ausdruck für a wäre man im ersten Beispiel gelangt, wenn man den dort erhaltenen Wert von b in die erste der Bestimmungsgleichungen eingesetzt hätte. Demnach resultirt wiederum für a:

$$a=\frac{1+2z^3}{\sqrt[3]{(1-z^3)^2(1+8z^3)}}$$

Was schliesslich c anlangt, so erinnern wir an die 3te Form, in die wir die Teilungsgleichung übergeführt hatten. Aus ihr folgt nämlich:

$$\frac{\vartheta_1(\frac{1}{3})}{\vartheta_3(\frac{1}{3})}\frac{\vartheta_1(\tau/_3)}{\vartheta_3(\tau/_3)}\frac{\vartheta_1\left(\frac{\tau+1}{3}\right)}{\vartheta_3\left(\frac{\tau+1}{3}\right)}\frac{\vartheta_1\left(\frac{\tau-1}{3}\right)}{\vartheta_3\left(\frac{\tau-1}{3}\right)}=\sqrt{3}$$

so dass uns die 3te Bestimmungsgleichung für c liefert:

$$c = -\frac{e^{\pi i \tau/_9}}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{x}\,\frac{\vartheta_1^4(\tau/_3)}{\vartheta_3^4(\tau/_3)}\,\frac{\vartheta_3(\tau/_3)}{\vartheta_3}$$

oder:

$$c = \frac{3x^2\left(e^{-{}^2/_3\pi i} - e^{{}^2/_3\pi i}\right)}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2(1+8x^3)}}$$

Mit der Bestimmung der Constanten im 2ten Beispiel ist zugleich die der Constanten im 3ten Beispiel gegeben. Stellen wir die Resultate zusammen, so haben wir also:

$$\frac{\vartheta\{0\}(v)^3}{\vartheta\{0 \mid \alpha \mid -\alpha\}(v)} = \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2(1+8x^3)}}(1+2x^3+6x^2Z)$$

$$\frac{\vartheta\{\alpha\}(v)^3}{\vartheta\{0 \mid \alpha \mid -\alpha\}(v)} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3)^2(1+8x^3)}}(1+2x^3-3x^2Z + \left(e^{-{}^2/_3\pi i} - e^{{}^2/_3\pi i}\right)3x^2\sqrt{R})$$

$$\frac{\vartheta\{-\alpha\}(v)^3}{\vartheta\{0 \mid \alpha \mid -\alpha\}(v)} = \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2(1+8x^3)}}(1+2x^3-3x^2Z - \left(e^{-{}^2/_3\pi i} - e^{{}^2/_3\pi i}\right)3x^2\sqrt{R})$$

d. h. genau dieselben Formen, die Hr. Krazer in seiner Arbeit pag. 447 für unsere 3 Quotienten aufgestellt hat.

§ 6

Der Fall $n = 5$.

Für diesen Fall nimmt das System (B) in § 1 die Gestalt an:

$$\frac{\vartheta_0(v+{}^1/_5)^5}{\vartheta_0(v)^5}\,\mathrm{dn}^5\left(u+\frac{2K}{5}\right) = c_1\,\mathrm{dn}^5(u) + c_2\,\mathrm{dn}^3(u)\,\mathrm{cn}^2(u)\,\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}$$
$$+ c_3\,\mathrm{dn}(u)\,\mathrm{cn}^4(u)\,\frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} + c_4\,\mathrm{sn}(u)\,\mathrm{cn}(u)\,\mathrm{dn}^2(u)\,\frac{\vartheta_0^2\vartheta_2^2}{\vartheta_3^4} + c_5\,\mathrm{sn}(u)\,\mathrm{cn}^3(u)\,\frac{\vartheta_0^2\vartheta_2^2}{\vartheta_2^6}$$

$$-\frac{\vartheta_0(v+{}^1/_5)^5}{\vartheta_0(v)^5}\,\mathrm{cn}^5\left(u+\frac{2K}{5}\right) = c_1\,\mathrm{cn}^5(u) + c_2\,\mathrm{cn}^3(u)\,\mathrm{dn}^2(u)\,\frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^2}$$
$$+ c_3\,\mathrm{cn}(u)\,\mathrm{dn}^4(u)\,\frac{\vartheta_3^4}{\vartheta_2^4} - c_4\,\mathrm{sn}(u)\,\mathrm{dn}(u)\,\mathrm{cn}^2(u)\,\frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_2^2} - c_5\,\mathrm{sn}(u)\,\mathrm{cn}^3(u)\,\frac{\vartheta_0^2\vartheta_3^2}{\vartheta_2^4}$$

[redacted]

$$\frac{\vartheta_0(v+{}^1/_5)^5}{\vartheta_0(v)^5} = c_1 + c_2\,\mathrm{sn}^2(u)\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2} + c_3\,\mathrm{sn}^4(u)\frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4}$$

$$-\,c_4\,\mathrm{sn}(u)\,\mathrm{cn}(u)\,\mathrm{dn}(u)\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_0^2} - c_5\,\mathrm{cn}(u)\,\mathrm{dn}(u)\,\mathrm{sn}^3(u)\frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_0^2\vartheta_3^2}$$

$$-\frac{\vartheta_0(v+{}^1/_5)^5}{\vartheta_0(v)^5}\,\mathrm{sn}^5\!\left(u+\frac{2K}{5}\right) = c_1\,\mathrm{sn}^5(u) + c_2\,\mathrm{sn}^3(u)\frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^2} + c_3\,\mathrm{sn}(u)\frac{\vartheta_3^4}{\vartheta_2^4}$$

$$+\,c_4\,\mathrm{cn}(u)\,\mathrm{dn}(u)\,\mathrm{sn}^2(u)\frac{\vartheta_3^4}{\vartheta_0^2\vartheta_2^2} + c_5\,\mathrm{cn}(u)\,\mathrm{dn}(u)\frac{\vartheta_3^6}{\vartheta_0^2\vartheta_2^4}$$

Führen wir wiederum für die elliptischen Functionen die Reihenentwicklungen ein und setzen die Coefficienten derjenigen Glieder einander gleich, die gleich hohe Potenzen in u enthalten, so resultiren die Gleichungen:

1) $c_1 = \dfrac{\vartheta_0^5({}^1/_5)}{\vartheta_0^5}$; 2) $y_1 = -c_4\dfrac{\vartheta_2^2}{\vartheta_0^2}$;

3) $y = c_2\dfrac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}$; 4) $c_5 = -\dfrac{\vartheta_1^5({}^1/_5)}{\vartheta_0^3\vartheta_2\vartheta_3}$:

5) $\vartheta_3^5({}^1/_5) = \vartheta_3(c_1\vartheta_3^4 + c_2\vartheta_2^2\vartheta_3^2 + c_3\vartheta_2^4)$

6) $\vartheta_2^5({}^1/_5) = -\vartheta_2(c_1\vartheta_2^4 + c_2\vartheta_2^2\vartheta_3^2 + c_3\vartheta_3^4)$

7) $-5\vartheta_2^2\vartheta_0^4({}^1/_5)\vartheta_1({}^1/_5)\vartheta_2({}^1/_5)\vartheta_3^4({}^1/_5) + y_1\vartheta_0^5\vartheta_3^2\vartheta_3^5({}^1/_5)$
$= \vartheta_0^2\vartheta_2^2\vartheta_3\vartheta_0^5({}^1/_5)(c_4\vartheta_3^2 + c_5\vartheta_2^2)$

8) $-5\vartheta_0^4({}^1/_5)\vartheta_1({}^1/_5)\vartheta_2^4({}^1/_5)\vartheta_3({}^1/_5) + y_1\vartheta_0^5\vartheta_2^5({}^1/_5)$
$= \vartheta_0^2\vartheta_2\vartheta_0^5({}^1/_5)(c_4\vartheta_2^2 + c_5\vartheta_3^2)$

9) $5\vartheta_0^4({}^1/_5)\vartheta_1^4({}^1/_5)\vartheta_2({}^1/_5)\vartheta_3({}^1/_5) + y_1\vartheta_0^3\vartheta_3^2\vartheta_1^5({}^1/_5)$
$= -c_3\vartheta_0^3\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0^5({}^1/_5)$

10) $-\vartheta_2^2\vartheta_3\vartheta_0^6({}^1/_5)\{5c_1\vartheta_2^2\vartheta_3^2 + c_2\vartheta_3^2(2\vartheta_3^4 + 3\vartheta_2^4) + c_3\vartheta_2^2(\vartheta_2^4 + 4\vartheta_3^4)\}$
$= 2y_2\vartheta_0^5\vartheta_3^4\vartheta_0({}^1/_5)\vartheta_3^5({}^1/_5) - 10y_1\vartheta_0^5\vartheta_2^2\vartheta_3^2\vartheta_1({}^1/_5)\vartheta_2({}^1/_5)\vartheta_3^4({}^1/_5)$
$+ 5\vartheta_0^4({}^1/_5)\vartheta_3^3({}^1/_5)\{\vartheta_0^2({}^1/_5)\vartheta_3^2({}^1/_5)(\vartheta_0^4 + \vartheta_3^4) - 2\vartheta_0^2\vartheta_3^2\vartheta_3^4({}^1/_5)$
$+ 4\vartheta_2^4\vartheta_1^2({}^1/_5)\vartheta_2^2({}^1/_5)\}$

11) $\vartheta_2\vartheta_3^2\vartheta_0^6({}^1/_5)\{5c_1\vartheta_2^4\vartheta_3^2 + c_2\vartheta_2^2(2\vartheta_2^4 + 3\vartheta_3^4) + c_3\vartheta_3^2(\vartheta_3^4 + 4\vartheta_2^4)\}$
$= 2y_2\vartheta_0^5\vartheta_3^4\vartheta_0({}^1/_5)\vartheta_2^5({}^1/_5) - 10y_1\vartheta_0^5\vartheta_3^4\vartheta_1({}^1/_5)\vartheta_3({}^1/_5)\vartheta_2^4({}^1/_5)$
$+ 5\vartheta_0^4({}^1/_5)\vartheta_2^3({}^1/_5)\{\vartheta_0^2({}^1/_5)\vartheta_2^2({}^1/_5)(\vartheta_2^4 - \vartheta_0^4) - 2\vartheta_0^2\vartheta_2^2\vartheta_2^4({}^1/_5)$
$+ 4\vartheta_3^4\vartheta_1^2({}^1/_5)\vartheta_3^2({}^1/_5)\}$

$$12)\quad -\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0^3\vartheta_0^6(1/5)\{2c_4\vartheta_2^2\vartheta_3^2-c_5(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)\}$$
$$=2y_2\vartheta_0^5\vartheta_3^4\vartheta_0(1/5)\vartheta_1^5(1/5)+10y_1\vartheta_0^7\vartheta_3^2\vartheta_1^4(1/5)\vartheta_2(1/5)\vartheta_3(1/5)$$
$$+5\vartheta_0^4(1/5)\vartheta_1^3(1/5)\{-\vartheta_0^2(1/5)\vartheta_1^2(1/5)(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)+2\vartheta_2^2\vartheta_3^2\vartheta_1^4(1/5)$$
$$+4\vartheta_0^4\vartheta_2^2(1/5)\vartheta_3^2(1/5)\}$$

etc.

Wir bestimmen die Werte von c_2, c_3, c_4 und erhalten:

c_2, c_3 aus (5) und (6) mit Hülfe von (1):

$$-c_3\vartheta_0^5\vartheta_2\vartheta_3=\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3^5(1/5)+\vartheta_0\vartheta_3\vartheta_2^5(1/5)-\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0^5(1/5)$$
$$c_2\vartheta_0^5\vartheta_2^2\vartheta_3^2=\vartheta_0\vartheta_2^3\vartheta_2^5(1/5)+\vartheta_0\vartheta_3^3\vartheta_3^5(1/5)-\vartheta_0^5(1/5)(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)$$

c_4 einerseits aus (7) und (8) mit Benutzung von (4):

$$\text{I:}\quad 5\vartheta_0\vartheta_0^4(1/5)\vartheta_1(1/5)\vartheta_2(1/5)\vartheta_3^4(1/5)-\vartheta_2\vartheta_0^5(1/5)\vartheta_1^5(1/5)$$
$$=-c_4\vartheta_0^3\vartheta_3^2(\vartheta_0\vartheta_3^5(1/5)+\vartheta_3\vartheta_0^5(1/5))$$

$$\text{II:}\quad 5\vartheta_0\vartheta_0^4(1/5)\vartheta_1(1/5)\vartheta_2^4(1/5)\vartheta_3(1/5)-\vartheta_3\vartheta_0^5(1/5)\vartheta_1^5(1/5)$$
$$=-c_4\vartheta_0^3\vartheta_2^2(\vartheta_2\vartheta_0^5(1/5)+\vartheta_0\vartheta_2^5(1/5))$$

andererseits aus (9), indem wir c_3 durch den gefundenen Wert ersetzen:

$$\text{III:}\quad 5\vartheta_0^2\vartheta_0^4(1/5)\vartheta_1^4(1/5)\vartheta_2(1/5)\vartheta_3(1/5)-\vartheta_0^5(1/5)(\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3^5(1/5)+\vartheta_0\vartheta_3\vartheta_2^5(1/5)$$
$$-\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0^5(1/5))=c_4\vartheta_0^3\vartheta_2^2\vartheta_3^2\vartheta_1^5(1/5)$$

Eliminiren wir gleichfalls in den 3 übrigen Gleichungen die Unbekannten mit Ausnahme von c_4, so finden wir weiter:

$$\text{IV:}\quad \vartheta_0\vartheta_0(1/5)\vartheta_3^5(1/5)(\vartheta_3^3\vartheta_3^5(1/5)+\vartheta_2^3\vartheta_2^5(1/5))-\vartheta_3^3\vartheta_0^6(1/5)(\vartheta_0^3\vartheta_0^5(1/5)$$
$$+\vartheta_2^3\vartheta_2^5(1/5))+2\vartheta_2^4\vartheta_0^4(1/5)\vartheta_3^3(1/5)(\vartheta_0^2(1/5)\vartheta_3^2(1/5)+5\vartheta_1^2(1/5)\vartheta_2^2(1/5))$$
$$-5\vartheta_0^2\vartheta_2^2\vartheta_0^4(1/5)\vartheta_2^2(1/5)\vartheta_3^5(1/5)=-5c_4\vartheta_0^3\vartheta_2^4\vartheta_3^2\vartheta_1(1/5)\vartheta_2(1/5)\vartheta_3^4(1/5))$$

$$\text{V:}\quad \vartheta_0\vartheta_0(1/5)\vartheta_2^5(1/5)(\vartheta_2^3\vartheta_2^5(1/5)+\vartheta_3^3\vartheta_3^5(1/5)+\vartheta_2\vartheta_0^6(1/5)(\vartheta_0^3\vartheta_0^5(1/5)$$
$$-\vartheta_3^3\vartheta_3^5(1/5))+2\vartheta_3^4\vartheta_0^4(1/5)\vartheta_2^3(1/5)(\vartheta_0^2(1/5)\vartheta_2^2(1/5)+5\vartheta_1^2(1/5)\vartheta_3^2(1/5))$$
$$-5\vartheta_0^2\vartheta_3^2\vartheta_0^4(1/5)\vartheta_2^5(1/5)\vartheta_3^2(1/5)=-5c_4\vartheta_0^3\vartheta_2^2\vartheta_3^4\vartheta_1(1/5)\vartheta_2^4(1/5)\vartheta_3(1/5)$$

$$\text{VI:}\quad \vartheta_0\vartheta_0(1/5)\vartheta_1^5(1/5)(\vartheta_2^3\vartheta_2^5(1/5)+\vartheta_3^3\vartheta_3^5(1/5))-3\vartheta_0^6(1/5)\vartheta_1^5(1/5)(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)$$
$$+5\vartheta_0^4(1/5)\vartheta_1^3(1/5)(\vartheta_2^2\vartheta_3^2\vartheta_1^4(1/5)+2\vartheta_0^4\vartheta_2^2(1/5)\vartheta_3^2(1/5))$$
$$=-c_4\vartheta_0^3\vartheta_2^2\vartheta_3^2(\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0^6(1/5)-5\vartheta_0^2\vartheta_1^4(1/5)\vartheta_2(1/5)\vartheta_3(1/5))$$

Aus diesen 6 Gleichungen, die nur die Unbekannte c_4 enthalten, kann man eine Reihe von Relationen herleiten. Da dieselben aber teilweise zu complicirt sind, wollen wir uns auf die Angabe einiger derselben beschränken. Die beiden ersten Gleichungen ergeben:

$$\frac{5\vartheta_0\vartheta_2(^1/_5)\vartheta_2^4(^1/_5)-\vartheta_2\vartheta_0(^1/_5)\,\vartheta_1^4(^1/_5)}{5\vartheta_0\vartheta_2^4(^1/_5)\vartheta_3(^1/_5)-\vartheta_3\vartheta_0(^1/_5)\vartheta_1^4(^1/_5)}=\frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^2}\,\frac{\vartheta_0\vartheta_3^5(^1/_5)+\vartheta_3\vartheta_0^5(^1/_5)}{\vartheta_2\vartheta_0^5(^1/_5)+\vartheta_0\vartheta_2^5(^1/_5)} \qquad \text{(A)}$$

Vermöge der Gleichung:

$$\vartheta_3^2\vartheta_3^2(^1/_5)-\vartheta_2^2\vartheta_2^2(^1/_5)=\vartheta_0^2\vartheta_0^2(^1/_5)$$

und bei Einführung der Bezeichnungsweise

$$\vartheta_0^4(^1/_5)\,\vartheta_1^4(^1/_5)-5\vartheta_2^4(^1/_5)\,\vartheta_3^4(^1/_5)=\theta_{01}'(^1/_5)$$
$$\vartheta_1^4(^1/_5)\,\vartheta_3^4(^1/_5)-5\vartheta_0^4(^1/_5)\,\vartheta_2^4(^1/_5)=\theta_{13}'(^1/_5)$$

etc.

geht (A) über in

$$\vartheta_0^3\vartheta_0(^1/_5)\,\theta_{01}'(^1/_5)+\vartheta_3^3\vartheta_3(^1/_5)\,\theta_{13}'(^1/_5)=\vartheta_2^3\vartheta_2(^1/_5)\,\theta_{12}'(^1/_5) \qquad \text{(A')}$$

Combiniren wir dann III mit I und II, so folgt:

$$\begin{aligned}&\vartheta_0\vartheta_3^2\vartheta_0(^1/_5)\vartheta_2(^1/_5)\,\theta_{02}'(^1/_5)+\vartheta_0^2\vartheta_3\vartheta_2(^1/_5)\vartheta_3(^1/_5)\,\theta_{23}'(^1/_5)\\&\qquad=\vartheta_2(\vartheta_3^2\vartheta_0^{10}(^1/_5)-\vartheta_0^2\vartheta_3^{10}(^1/_5)-\vartheta_2^2\vartheta_1^{10}(^1/_5))\\&\vartheta_0\vartheta_2^2\vartheta_0(^1/_5)\vartheta_3(^1/_5)\,\theta_{03}'(^1/_5)+\vartheta_0^2\vartheta_2\vartheta_2(^1/_5)\vartheta_3(^1/_5)\,\theta_{23}'(^1/_5)\\&\qquad=\vartheta_3(\vartheta_2^2\vartheta_0^{10}(^1/_5)-\vartheta_0^2\vartheta_2^{10}(^1/_5)-\vartheta_3^2\vartheta_1^{10}(^1/_5))\end{aligned} \qquad \text{(B)}$$

Ferner erhalten wir aus IV und V:

$$\begin{aligned}&\vartheta_0^3\vartheta_3^3\vartheta_2^3(^1/_5)(\vartheta_0^8(^1/_5)-\vartheta_3^8(^1/_5))+\vartheta_0^3\vartheta_2^3\vartheta_3^3(^1/_5)(\vartheta_0^8(^1/_5)-\vartheta_2^8(^1/_5))\\&\qquad+\vartheta_2^3\vartheta_3^3\vartheta_0^3(^1/_5)(\vartheta_2^8(^1/_5)-\vartheta_3^8(^1/_5))\\&\qquad=8\vartheta_0^2\vartheta_2^2\vartheta_3^2\vartheta_0^3(^1/_5)\vartheta_1^2(^1/_5)\vartheta_2^3(^1/_5)\vartheta_3^3(^1/_5)\end{aligned}$$

etc.

Zu neuen Beziehungen gelangen wir, wenn wir die Function betrachten:

$$\vartheta_3(v)\,\vartheta_3(v+{}^1/_5)\,\vartheta_3(v+{}^2/_5)\,\vartheta_3(v+{}^3/_5)\,\vartheta_3(v+{}^4/_5)$$

indem wir dieselbe genau so behandeln wie $\vartheta_3(v+{}^1/_5)^5$.

Die sich ergebenden Beziehungen stellen wir gleich zusammen. Dieselben sind, wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$\vartheta_2^4(^1/_5)-\vartheta_1^4(^1/_5)=\theta_{21}(^1/_5)$$
$$\vartheta_3^4(^1/_5)-\vartheta_2^4(^1/_5)=\theta_{32}(^1/_5)$$

. . .

dagegen: $\qquad \vartheta_1^4(^1/_5)+\vartheta_3^4(^1/_5)=\theta_{32}(^1/_5)$

$$\begin{aligned}&\vartheta_2^6\vartheta_3^6\vartheta_0^2(^1/_5)\,\theta_{32}^2(^1/_5)+\vartheta_0^6\vartheta_3^6\vartheta_2^2(^1/_5)\,\theta_{21}^2(^1/_5)-\vartheta_0^6\vartheta_2^6\vartheta_3^2(^1/_5)\,\theta_{13}^2(^1/_5)\\&\qquad=4\vartheta_0^4\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_0^2(^1/_5)\vartheta_2^2(^1/_5)\vartheta_3^2(^1/_5)\vartheta_1^4(^1/_5)\end{aligned} \qquad \text{(D)}$$

$$\frac{\vartheta_0^6\vartheta_2^2(1/5)\,\theta_{21}^2(1/5)+\vartheta_2^6\vartheta_0^2(1/5)\,\theta_{32}^2(1/5)}{\vartheta_0^6\vartheta_3^2(1/5)\,\theta_{13}^2(1/5)-\vartheta_3^6\vartheta_0^2(1/5)\,\theta_{32}^2(1/5)}=\frac{\vartheta_2^7}{\vartheta_3^7}\,\frac{\vartheta_3(1/5)}{\vartheta_2(1/5)}\,\frac{\theta_{13}(1/5)}{\theta_{21}(1/5)}$$

$$\frac{\vartheta_2^6\vartheta_0^2(1/5)\,\theta_{32}^2(1/5)+\vartheta_0^6\vartheta_2^2(1/5)\,\theta_{21}^2(1/5)}{\vartheta_2^6\vartheta_3^2(1/5)\,\theta_{13}^2(1/5)-\vartheta_3^6\vartheta_2^2(1/5)\,\theta_{21}^2(1/5)}=\frac{\vartheta_0^7}{\vartheta_3^7}\,\frac{\vartheta_3(1/5)}{\vartheta_0(1/5)}\,\frac{\theta_{13}(1/5)}{\theta_{32}(1/5)} \tag{E}$$

$$\frac{\vartheta_2^6\vartheta_3^2(1/5)\,\theta_{13}^2(1/5)-\vartheta_3^6\vartheta_2^2(1/5)\,\theta_{21}^2(1/5)}{\vartheta_0^6\vartheta_3^2(1/5)\,\theta_{13}^2(1/5)-\vartheta_3^6\vartheta_0^2(1/5)\,\theta_{32}^2(1/5)}=\frac{\vartheta_2^7}{\vartheta_0^7}\,\frac{\vartheta_0(1/5)}{\vartheta_2(1/5)}\,\frac{\theta_{32}(1/5)}{\theta_{21}(1/5)}$$

und:

(F)

$$\frac{\vartheta_2^8\theta_{32}^2(1/5)\theta_{13}^2(1/5)-4\vartheta_0^4\vartheta_3^4\vartheta_1^4(1/5)\vartheta_2^4(1/5)\theta_{21}^2(1/5)}{\vartheta_3^8\theta_{32}^2(1/5)\theta_{21}^2(1/5)-4\vartheta_0^4\vartheta_2^4\vartheta_1^4(1/5)\vartheta_3^4(1/5)\,\theta_{13}^2(1/5)}=\frac{\vartheta_2^3}{\vartheta_3^3}\,\frac{\vartheta_2(1/5)}{\vartheta_3(1/5)}\,\frac{\theta_{13}(1/5)}{\theta_{21}(1/5)}$$

$$\frac{\vartheta_0^8\theta_{21}^2(1/5)\theta_{13}^2(1/5)-4\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_0^4(1/5)\vartheta_1^4(1/5)\theta_{32}^2(1/5)}{\vartheta_3^8\theta_{32}^2(1/5)\theta_{21}^2(1/5)-4\vartheta_0^4\vartheta_2^4\vartheta_1^4(1/5)\vartheta_3^4(1/5)\theta_{13}^2(1/5)}=\frac{\vartheta_0^3}{\vartheta_3^3}\,\frac{\vartheta_0(1/5)}{\vartheta_3(1/5)}\,\frac{\theta_{13}(1/5)}{\theta_{32}(1/5)}$$

$$\frac{\vartheta_2^8\theta_{32}^2(1/5)\theta_{13}^2(1/5)-4\vartheta_0^4\vartheta_3^4\vartheta_1^4(1/5)\vartheta_2^4(1/5)\theta_{21}^2(1/5)}{\vartheta_0^8\theta_{21}^2(1/5)\theta_{13}^2(1/5)-4\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_0^4(1/5)\vartheta_1^4(1/5)\theta_{32}^2(1/5)}=\frac{\vartheta_2^3}{\vartheta_0^3}\,\frac{\vartheta_2(1/5)}{\vartheta_0(1/5)}\,\frac{\theta_{32}(1/5)}{\theta_{21}(1/5)}$$

etc.

Die Parameterdarstellung ist dem vorigen Fall analog durchzuführen. — Dieser Fall $n=5$ hat sich für die Algebra von schwerwiegender Bedeutung gezeigt. Hr. Kronecker hat mit seiner Hülfe die Auflösung der allgemeinen Gleichung 5ten Grades gegeben.

cf.: Sur la résolution de l'équation du cinquième degré. Comptes rendus des séances de l'Académie de Paris 1858:

§ 7.

Methoden zur Herstellung allgemeiner Thetabeziehungen.

Ebenso wie in der Transformationstheorie können wir hier ganz allgemein die Frage stellen: Es sollen die allgemeinsten Beziehungen zwischen den Thetafunctionen $n$ter Ordnung entwickelt werden, die sich aus den Thetafunctionen bilden lassen, deren Charakteristiken gebrochene Zahlen sind. Es ist klar, dass zwischen je $n+1$ solcher Functionen, als Thetafunctionen $n$ter Ordnung betrachtet, die dieselbe Charakteristik besitzen, mindestens eine lineare Relation bestehen muss, dass ferner dies Resultat sich noch vereinfacht, wenn alle Functionen entweder gerade oder ungerade sind. Die Bestimmung der Constanten ist vermöge der im ersten Paragraphen angestellten Betrachtungen leicht durchzuführen.

[redacted]

Für die Aufstellung solcher allgemeinen Relationen sind folgende 2 Sätze von grosser Bedeutung:

1) Wenn eine Function von v den Bedingungen Genüge leistet:

$$f(v+{}^1/_n, \tau) = f(v, \tau)$$
$$f(v+\tau, \tau) = f(v, \tau)\, e^{-n\pi i(2v+\tau)}$$

so ist sie bis auf eine Constante bestimmt.

2) Dasselbe gilt, wenn sie den Gleichungen genügt:

$$f(v+{}^1/_n, \tau) = \alpha f(v, \tau)$$
$$f(v+\tau, \tau) = f(v, \tau)\, e^{-n\pi i(2v+\tau)}$$
$$\alpha = e^{2\pi i p/n}$$

In beiden Fällen sind die Functionen, von constanten Factoren abgesehen, resp. gleich $\vartheta_3(nv, n\tau)$ und $e^{2\pi i p v}\vartheta_3(nv+p\tau, n\tau)$ d. h. gleich Ausdrücken, die in der gewöhnlichen Transformationstheorie eine fundamentale Rolle spielen. — In Bezug auf die zweite Bemerkung verweisen wir auf pag. 284 sequ. des 32ten Bandes des Crelleschen Journals. Bilden wir nun solche Functionen, die jenen Gleichungen genügen, so erhalten wir z. B.:

$$(3)\quad \prod_0^{n-1}{}_{r_1} \vartheta\begin{bmatrix}\eta+0\\ \eta_1+r_1\end{bmatrix}(v) = c_1 \sum_0^{n-1}{}_{r_1} e^{-\frac{2}{n}\pi i\eta r_1} \prod_0^{n-1}{}_{r} \vartheta\begin{bmatrix}\zeta+r\\ \zeta_1+r_1\end{bmatrix}(v)$$

$$(4)\quad \prod_0^{n-1}{}_{r_1} \vartheta\begin{bmatrix}\eta+0\\ \eta_1+r_1\end{bmatrix}(v) = c_2 \sum_0^{n-1}{}_{r_1} e^{-\frac{2}{n}\pi i\eta r_1} \vartheta\begin{bmatrix}\zeta+0\\ \zeta_1+r_1\end{bmatrix}(v)^n$$

$$(5)\quad \sum_0^{n-1}{}_{r_1} e^{\frac{2}{n}\pi i(\eta+\zeta)r_1} \vartheta\begin{bmatrix}\eta+0\\ \eta_1+r_1\end{bmatrix}(v)^n = c_3 \sum_0^{n-1}{}_{r_1} e^{\frac{2}{n}\pi i(\eta+\zeta)r_1} \vartheta\begin{bmatrix}\zeta+0\\ \zeta_1+r_1\end{bmatrix}(v)^n$$

Hierin werden die Constanten bestimmt, indem man dem Argument v einen bestimmten Wert beilegt. Weiter folgt, dass wenn 2 Funtionen $n$ter Ordnung, die denselben Bedingungen genügen, für n

von einander verschiedene Teilwerte der Perioden einander gleich sind, dieselben dann überhaupt gleich sein müssen. Nehmen wir z. B. die Functionen:

$$e^{\frac{2}{n}\pi i\eta(\zeta_1 - v\eta_1)} \sum_{0}^{n-1} r_1 \vartheta\begin{bmatrix}\eta + v \\ \eta_1 + r_1\end{bmatrix}(0)^n \vartheta\begin{bmatrix}\eta + 0 \\ \eta_1 + r_1\end{bmatrix}(v)^n e^{-\frac{2}{n}\pi i(\zeta+\eta)r_1}$$

und

$$e^{\frac{2}{n}\pi i\zeta(\eta_1 - \zeta_1)} \sum_{0}^{n-1} r_1 \vartheta\begin{bmatrix}\zeta + 0 \\ \zeta_1 + r_1\end{bmatrix}(0)^n \vartheta\begin{bmatrix}\zeta + 0 \\ \zeta_1 + r_1\end{bmatrix}(v)^n e^{-\frac{2}{n}\pi i(\zeta+\eta)r_1}$$

so stimmen dieselben mit einander überein für die Werte:

$$-(\eta+\zeta)\frac{\tau}{n} - \frac{(\eta_1+\zeta_1)}{n}; \quad -(\eta+\zeta)\frac{\tau}{n} - \frac{\eta_1+\zeta_1-1}{n}; \quad \ldots$$
$$-(\eta+\zeta)\frac{\tau}{n} - \frac{\eta_1+\zeta_1-n+1}{n}$$

Mithin resultirt die Gleichung:

$$e^{\frac{2}{n}\pi i\eta(\zeta_1 - \eta_1)} \sum_{0}^{n-1} r_1 \vartheta\begin{bmatrix}\eta + 0 \\ \eta_1 + r_1\end{bmatrix}(0)^n \vartheta\begin{bmatrix}\eta + 0 \\ \eta_1 + r_1\end{bmatrix}(v)^n e^{-\frac{2}{n}\pi i(\zeta+\eta)r_1}$$

(6)

$$= e^{\frac{2}{n}\pi i\zeta(\eta_1 - \zeta_1)} \sum^{n-1} r_1 \vartheta\begin{bmatrix}\zeta + 0 \\ \zeta_1 + r_1\end{bmatrix}(0)^n \vartheta\begin{bmatrix}\zeta + 0 \\ \zeta_1 + {}_1r\end{bmatrix}(v)^n e^{-\frac{2}{n}\pi i(\zeta+\eta)r_1}$$

Ebenso ist:

$$e^{\frac{2}{n}\pi i\eta(\zeta_1 - \eta_1)} \sum_{0}^{n-1} r \vartheta\begin{bmatrix}\eta + r \\ \eta_1 + 0\end{bmatrix}(0)^n \vartheta\begin{bmatrix}\eta + r \\ \eta_1 + 0\end{bmatrix}(v)^n e^{\frac{2}{n}\pi i(\zeta_1 - \eta_1)r}$$

(7)

$$= e^{\frac{2}{n}\pi i\zeta(\eta_1 - \zeta_1)} \sum_{0}^{n-1} r \vartheta\begin{bmatrix}\zeta + r \\ \zeta_1 + 0\end{bmatrix}(\theta)^n \vartheta\begin{bmatrix}\zeta + r \\ \zeta_1 + 0\end{bmatrix}(v)^n e^{\frac{2}{n}\pi i(\eta_1 - \zeta_1)r}$$

da beide Seiten einander gleich sind für die n verschiedenen Werte:

$$-(\eta+\zeta)\frac{\tau}{n}-\frac{\eta_1+\zeta_1}{n};\quad -(\eta+\zeta-1)-\frac{\eta_1+\zeta_1}{n};\quad \ldots$$

$$\ldots-(\eta+\zeta-n+1)\frac{\tau}{n}-\frac{\eta_1+\zeta_1}{n}$$

Die hier aufgestellten Beziehungen, deren Anzahl wir noch beliebig vermehren können, lassen sich durch Substitution von $n$tel Perioden in bedeutend allgemeinerer Form darstellen.

Wir haben dieselben so gewählt, dass für den Fall $n=3$ aus ihnen jene 4 Gleichungen (A), ... (D) fliessen, die Hr. Krazer pag. 432. seiner Arbeit angeführt hat. In der Tat. Gehen wir von den beiden ersten Gleichungen aus und vermehren das Argument v um $\frac{k\tau}{n}+\frac{k_1}{n}$, so gehen dieselben mit Rücksicht auf die in § 1. angegebenen Fundamentaleigenschaften über in:

$$\prod_{0}^{2} r_1 \vartheta\begin{bmatrix} k+\eta+0 \\ k_1+\eta_1+r_1\end{bmatrix}(v)e^{-2\pi i\frac{k}{q}(\eta_1+r_1)}$$

$$= c_1 \sum_{0} r_1 e^{-{}^2/_3\pi i\eta r_1} \prod_{0}^{2} r\,\vartheta\begin{bmatrix} k+\zeta+r \\ k_1+\zeta_1+r_1\end{bmatrix} v)e^{-2\pi i\frac{k}{q}(\zeta_1+r_1)}$$

$$\prod_{0}^{2} r_1 \vartheta\begin{bmatrix} k+\eta+0 \\ k_1+\eta_1+r_1\end{bmatrix}(v)e^{-2\pi i\frac{k}{q}(\eta_1+r_1)}$$

$$= c_2 \Sigma r_1 e^{-{}^2/_3\pi i\eta r_1} e^{-2\pi i\frac{k}{3}(\zeta_1+r_1)} \vartheta\begin{bmatrix} k+\zeta+0 \\ k_1+\zeta_1+r_1\end{bmatrix}(v)^3$$

oder:

$$e^{{}^2/_3\pi i\eta}\, e^{-{}^2/_3\pi ik\eta_1}\vartheta[k+\eta](v)\,\vartheta[k+\eta+\beta](v)\,\vartheta[k+\eta-\beta](v) =$$

$$e^{-{}^2/_3\pi ik\zeta_1} c_1\{\vartheta[k+\zeta](v)\,\vartheta[k+\zeta+\alpha](v)\,\vartheta[k+\zeta-\alpha](v)$$

$$+e^{-{}^2/_3\pi i(\eta+k)}\vartheta[k+\zeta+\beta](v)\,\vartheta[k+\zeta+\beta+\alpha](v)\,\vartheta[k+\zeta+\beta-\alpha](v)$$

$$+e^{{}^2/_3\pi i(\eta+k)}\vartheta[k+\zeta-\beta](v)\,\vartheta[k+\zeta-\beta+\alpha](v)\,\vartheta[k+\zeta-\beta-\alpha](v)\}$$

und:

$$e^{{}^2/_3\pi i\eta}\, e^{-{}^2/_3\pi ik\eta_1}\vartheta[k+\eta](v)\,\vartheta[k+\eta+\beta](v)\,\vartheta k+\eta-\beta](v) =$$

$$e^{-{}^2/_3\pi i\zeta_1} c_2\{\vartheta[k+\zeta](v)^3+e^{-{}^2/_3\pi i(\eta+k)}\vartheta[k+\zeta+\beta](v)^3$$

$$+e^{{}^2/_3\pi i(\eta+k)}\vartheta[k+\zeta-\beta)(v)^3\}$$

Bedienen wir uns nun der zu Anfang des § 5. angeführten Abkürzungen und ziehen die auftretenden Exponentialfactoren in die Constante hinein, so können wir beide Gleichungen auch schreiben:

$$\tau^{k\,|\,\eta}\vartheta\{k+\eta \mid k+\eta+\beta \mid k+\eta-\beta\}(v) = c_1[\tau^{k+\zeta}\vartheta\{k+\zeta \mid k+\zeta+\alpha \mid k+\zeta-\alpha\}(v)$$
$$+\tau^{k\,|\,\zeta+\beta}\tau^{\beta\,|\,\zeta+\eta}\vartheta\{k+\zeta+\beta \mid k+\zeta+\beta+\alpha \mid k+\zeta+\beta-\alpha\}(v)$$
$$+\tau^{k\,|\,\zeta-\beta}\tau^{\zeta+\eta\,|\,\beta}\vartheta\{k+\zeta-\beta \mid k+\zeta-\beta+\alpha \mid k+\zeta-\beta-\alpha\}(v)]$$

und:

$$\tau^{k\,|\,\eta}\vartheta\{k+\eta \mid k+\eta+\beta \mid k+\eta-\beta\}(v) = c_2[\tau^{k\,|\,\zeta}\vartheta\{k+\zeta\}(v)^3$$
$$+\tau^{k\,|\,\zeta+\beta}\tau^{\beta\,|\,\zeta+\eta}\vartheta\{k+\zeta+\beta\}(v)^3+\tau^{k\,|\,\zeta-\beta}\tau^{\zeta+\eta\,|\,\beta}\vartheta\{k+\zeta-\beta\}(v)^3]$$

oder, wenn die Bestimmung der Constanten in der Weise erfolgt, dass $v=0$ und $[k]=-[\eta+\zeta]$ gesetzt wird:

$$\text{(A)}\quad \tau^{k\,|\,\eta}[(\eta \mid \eta+\alpha \mid \eta-\alpha)+\tau^{\beta\,|\,\zeta+\eta}(\eta+\beta \mid \eta+\beta+\alpha \mid \eta+\beta-\alpha)$$
$$+\tau^{\zeta+\eta\,|\,\beta}(\eta-\beta \mid \eta-\beta+\alpha \mid \eta-\beta-\alpha)]\times$$
$$\times\vartheta\{k+\eta \mid k+\eta+\beta \mid k+\eta-\beta\}(v)$$
$$=\tau^{\zeta\,|\,\eta}(\zeta \mid \zeta+\beta \mid \zeta-\beta)[\tau^{k\,|\,\zeta}\vartheta\{k+\zeta \mid k+\zeta+\alpha \mid k+\zeta-\alpha\}(v)$$
$$+\tau^{\beta\,|\,\zeta+\eta}\tau^{k\,|\,\zeta+\beta}\vartheta\{k+\zeta+\beta \mid k+\zeta+\beta+\alpha \mid k+\zeta+\beta-\alpha\}(v)$$
$$+\tau^{\zeta+\eta\,|\,\beta}\tau^{k\,|\,\zeta-\beta}\vartheta\{k+\zeta-\beta \mid k+-\beta+\alpha \mid k+\zeta-\beta-\alpha\}(v)]$$

$$\text{(C)}\quad \tau^{k\,|\,\eta}[(\eta)^3+\tau^{\beta\,|\,\zeta+\eta}(\eta+\beta)^3+\tau^{\zeta+\eta\,|\,\beta}(\eta-\beta)^3]\times$$
$$\times\vartheta\{k+\eta \mid k+\eta+\beta \mid k+\eta-\beta\}(v)$$
$$=\tau^{\zeta\,|\,\eta}(\zeta \mid \zeta+\beta \mid \zeta-\beta)[\tau^{k\,|\,\zeta}\vartheta\{k+\zeta\}(v)^3$$
$$+\tau^{k\,|\,\zeta+\beta}\tau^{\beta\,|\,\zeta+\eta}\vartheta\{k+\zeta+\beta\}(v)^3$$
$$+\tau^{k\,|\,\zeta-\beta}\tau^{\zeta+\eta\,|\,\beta}\vartheta\{k+\zeta-\beta\}(v)^3]$$

Die Gleichung (5) liefert uns, wenn wir die Constante in der Art bestimmen, dass wir $v=0$ und $\eta=\zeta=0$ setzen:

$$\text{(D)}\quad \vartheta\{\eta\}(v)^3+\tau^{\zeta\,|\,\beta}\vartheta\{\eta+\beta\}(v)^3+\tau^{\beta\,|\,\zeta}\vartheta\{\eta-\beta\}(v)^3$$
$$=\tau^{\eta\,|\,\zeta}[\vartheta\{\zeta\}(v)^3+\tau^{\eta\,|\,\beta}\vartheta\{\zeta+\beta\}(v)^3+\tau^{\beta\,|\,\eta}\vartheta\{\zeta-\beta\}(v)^3]$$

Die 3 gefundenen Gleichungen entsprechen den Gleichungen (A), (C) und (D) bei Hr. Krazer. Während wir aber unter $|\,\alpha\,|$ und $|\,\beta\,|$ ganz bestimmte Charakteristiken verstehen, so bezeichnet Hr. Krazer für diese Gleichungen mit $|\,\alpha\,|$ eine beliebige von $|\,0\,|$ verschiedene Charakteristik und mit $|\,\beta\,|$ eine solche, die keiner der 3 Charakteristiken $[0]$, $[\alpha]$, $[-\alpha]$ congruent ist. Erwägen wir aber, dass für die übrigen Repräsentanten analoge Sätze wie für $\vartheta_3(nv, n\tau)$ entwickelt werden können, so ergiebt sich leicht mit deren Anwendung, dass auch unsere 3 Gleichungen unter den von Hrn. Krazer getroffenen Annahmen gelten, nachdem noch in den beiden letzteren für $|\,\beta\,|$ die Charakteristik $|\,\alpha\,|$ getreten ist.

Durch Vermehrung des Arguments v um $\frac{k\tau}{n}+\frac{k_1}{n}$ lassen sich endlich aus (6) und (7) die Gleichungen herstellen:

$$\text{(B)}\quad \tau^{k\,|\,\eta}(\eta)^3\vartheta\{k+\eta\}(v)^3+\tau^{\beta\,|\,\zeta}\tau^{k\,|\,\eta+\beta}(\eta+\beta)^3\vartheta\{k+\eta+\beta\}(v)^3$$
$$+\tau^{\zeta\,|\,\beta}\tau^{k\,|\,\eta-\beta}(\eta-\beta)^3\vartheta\{k+\eta-\beta\}(v)^3$$
$$=\tau^{\zeta\,|\,\eta}\tau^{k\,|\,\zeta}(\zeta)^3\vartheta\{k+\zeta\}(v)^3+\tau^{\zeta+\beta\,|\,\eta}\tau^{k\,|\,\zeta+\beta}(\zeta+\beta)^3\vartheta\{k+\zeta+\beta\}(v)_3$$
$$+\tau^{\zeta-\beta\,|\,\eta}\tau^{k\,|\,\zeta-\beta}(\zeta-\beta)^3\vartheta\{k+\zeta-\beta\}(v)^3$$

und:

$$\text{(B}_1\text{)}\quad \tau^{k\,|\,\eta}(\eta)^3\vartheta\{k+\eta\}(v)^3+\tau^{\alpha\,|\,\zeta}\tau^{k\,|\,\eta+\alpha}(\eta+\alpha)^3\vartheta\{k+\eta+\alpha\}(v)^3$$
$$+\tau^{\zeta\,|\,\alpha}\tau^{k\,|\,\eta-\alpha}(\eta-\alpha)^3\vartheta\{k+\eta-\alpha\}(v)^3$$
$$=\tau^{\zeta\,|\,\eta}\tau^{k\,|\,\zeta}(\zeta)^3\vartheta\{k+\zeta\}(v)^3+\tau^{\zeta+\alpha\,|\,\eta}\tau^{k\,|\,\zeta+\alpha}(\zeta+\alpha)^3\vartheta\{k+\zeta+\alpha\}(v)^3$$
$$+\tau^{\zeta-\alpha\,|\,\eta}\tau^{k\,|\,\zeta-\alpha}(\zeta-\alpha)^3\vartheta\{k+\zeta-\alpha\}(v)^3$$

Aehnlich gebaute Beziehungen können wir aber nach Analogie der Betrachtungen, die uns auf (6) und (7) geführt haben, in solcher Anzahl gewinnen, dass das Resultat ausgesprochen werden darf: Die Gleichung (B_1) gilt unter den allgemeinen Voraussetzungen, wie sie für die Charakteristiken $|\,\alpha\,|$ und $|\,\beta\,|$ vorhin gegeben sind.

So sind wir von einem ganz neuen Verfahren aus zu denselben Resultaten gelangt, die Hr. Krazer auf Grund der Prym'schen Thetaformeln abgeleitet hat.

Für $n = 5$ kann man in ähnlicher Weise allgemeine Thetarelationen aufstellen. Wir wollen uns aber für diesen Fall der Kategorie der quadratischen Gleichungen zuwenden, deren Ableitung in genau derselben Weise erfolgen soll, die Hr. Bianchi pag. 251 seiner Arbeit gegeben hat.

Wir definiren dazu die 5 Grössen $x_0(v), \dots x_4(v)$ durch

$$
8)\qquad
\begin{aligned}
x_0(v) &= \prod_0^4{}_k \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\0\end{bmatrix}(v)\\
x_1(v) &= \prod_0^4{}_k \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\1\end{bmatrix}(v)\\
x_2(v) &= \prod_0^4{}_k \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\2\end{bmatrix}(v)\\
x_3(v) &= \prod_0^4{}_k \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\3\end{bmatrix}(v)\\
x_4(v) &= \prod_0^4{}_k \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\4\end{bmatrix}(v)
\end{aligned}
$$

Für diese Producte, die uns Thetafunctionen 5ter Ordnung repräsentiren, bestehen mit Rücksicht auf

$$
(9)\qquad
\begin{aligned}
\vartheta_1\begin{bmatrix}k \pm 5\\k_1\end{bmatrix}(v) &= \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}(v)\\
\vartheta_1\begin{bmatrix}k\\k_1 \pm 5\end{bmatrix}(v) &= \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}(v)\, e^{\pm \frac{2}{5}\pi i k}\\
\vartheta_1\begin{bmatrix}k\\k_1\end{bmatrix}(-v) &= -\vartheta_1\begin{bmatrix}-k\\-k_1\end{bmatrix}(v)
\end{aligned}
$$

folgende Gleichungen:

$$
(10)\qquad
\begin{gathered}
x_0(-v) = -x_0(v);\quad x_1(-v) = -x_4(v);\quad x_2(-v) = -x_3(v);\\
x_3(-v) = -x_2(v);\quad x_4(-v) = -x_1(v);\\
x_s(v + {}^1/_5) = x_{s+1}(v);\quad x_s(v + \tau/_5) = x_s(v)\, e^{-\frac{2\pi i s}{5}}\, e^{-\pi i(2v + \tau/_5)}
\end{gathered}
$$

Von den 15 Producten, die sich zu je zwei in den Grössen x bilden lassen, sind nun nach dem Hermite'schen Princip 10 von einander linear unabhängig, so dass sich die übrigen 5 durch diese darstellen müssen. Zur Gewinnung dieser 5 Gleichungen bemerken wir, dass eine lineare Relation von der Form:

$$\Sigma a_{ik}\, x_i x_k = 0$$

zwischen den 10 Producten $x_i x_k$ nicht bestehen kann. Denn aus der Existenz derselben würden bei Vermehrung des Arguments um $\tau/_5$ nach einander 5 Gleichungen folgen, die vermöge

$$1+e^{\frac{2\pi i}{5}}+e^{-\frac{2\pi i}{5}}+e^{\frac{4\pi i}{5}}+e^{-\frac{4\pi i}{5}}=0;$$

sich ersetzen liessen durch

$$(11)\qquad \begin{aligned} a_{14}x_1x_4+a_{23}x_2x_3&=0\\ a_{01}x_0x_1+a_{24}x_2x_4&=0\\ a_{02}x_0x_2+a_{34}x_3x_4&=0\\ a_{03}x_0x_3+a_{12}x_1x_2&=0\\ a_{04}x_0x_4+a_{13}x_1x_3&=0 \end{aligned}$$

Das Bestehen dieser 5 Gleichungen ist aber unmöglich, da z. B. für $x_2=0$ nicht notwendig x_1 oder x_3 zu verschwinden brauchen. — Demnach müssen in den 5 gesuchten Beziehungen die Quadrate $x_0^2, \dots x_4^2$ durch die Producte $x_i x_k$ linear ausgedrückt sein. Und zwar wird dabei die Gleichung in x_0^2 nur solche $x_i x_k$ enthalten können, die bei der Substitution $v+\tau/_5$ ungeändert bleiben, d. h. sie wird die Form haben:

$$x_0^2+ax_2x_3+bx_1x_4=0$$

Die Vermehrung des Arguments um $^1/_5$ führt dann zu den 4 weiteren Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1^2+ax_3x_4+bx_2x_0&=0\\ x_2^2+ax_4x_0+bx_3x_1&=0\\ x_3^2+ax_0x_1+bx_4x_2&=0\\ x_4^2+ax_1x_2+bx_0x_3&=0 \end{aligned}$$

Dabei ergeben sich, wenn wir für v resp. $-^1/_5$ und $-^2/_5$ setzen, für die Constanten a, b die Werte:

$$a=-\frac{x_0^2(-^1/_5)}{x_2(-^1/_5)\,x_3(-^1/_5)};\quad b=-\frac{x_0^2(-^1/_5}{x_2(-^1/_5)\,x_4(-^1/_5)};$$

oder mit Hülfe von (10):

$$a=-\frac{x_1(0)}{x_2(0)};\quad b=-\frac{x_3^2(0)}{x_2(0)\,x_4(0)}=\frac{x_2(0)}{x_1(0)}$$

so dass zwischen a und b die Gleichung besteht

$$b = -\frac{1}{a}$$

Mithin lauten die 5 quadratischen Gleichungen nach Ersetzung der x durch die Thetaproducte:

$$\prod_0^4{}_k \vartheta_1^2\begin{bmatrix}k\\0\end{bmatrix}(v) - \frac{\prod_0^4{}_k \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\1\end{bmatrix}(0)}{\prod_0^4{}_k \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\2\end{bmatrix}(0)} \prod_0^4{}_k \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\2\end{bmatrix}(v) \prod_0^4{}_k \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\3\end{bmatrix}(v)$$

$$+ \frac{\prod_0^4{}_k \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\2\end{bmatrix}(0)}{\prod_0^4{}_k \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\1\end{bmatrix}(0)} \prod_0^4{}_k \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\1\end{bmatrix}(v) \prod_0^4{}_k \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\4\end{bmatrix}(v) = 0$$

$$\Pi \vartheta_1^2\begin{bmatrix}k\\1\end{bmatrix}(v) - \frac{\Pi \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\1\end{bmatrix}(0)}{\Pi \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\2\end{bmatrix}(0)} \Pi \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\3\end{bmatrix}(v)\, \Pi \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\4\end{bmatrix}(v)$$

$$+ \frac{\Pi \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\2\end{bmatrix}(0)}{\Pi \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\1\end{bmatrix}(0)} \Pi \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\2\end{bmatrix}(v)\, \Pi \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\0\end{bmatrix}(v) = 0$$

$$\Pi \vartheta_1^2\begin{bmatrix}k\\2\end{bmatrix}(v) - \frac{\Pi \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\1\end{bmatrix}(0)}{\Pi \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\2\end{bmatrix}(0)} \Pi \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\0\end{bmatrix}(v)\, \Pi \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\4\end{bmatrix}(v)$$

$$+ \frac{\Pi \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\2\end{bmatrix}(0)}{\Pi \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\1\end{bmatrix}(0)} \Pi \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\1\end{bmatrix}(v)\, \Pi \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\3\end{bmatrix}(v) = 0$$

$$\Pi \vartheta_1^2\begin{bmatrix}k\\3\end{bmatrix}(v) - \frac{\Pi \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\1\end{bmatrix}(0)}{\Pi \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\2\end{bmatrix}(0)} \Pi \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\0\end{bmatrix}(v)\, \Pi \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\1\end{bmatrix}(v)$$

$$+ \frac{\Pi \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\2\end{bmatrix}(0)}{\Pi \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\1\end{bmatrix}(0)} \Pi \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\2\end{bmatrix}(v)\, \Pi \vartheta_1\begin{bmatrix}k\\4\end{bmatrix}(v) = 0$$

$$\Pi\vartheta_1{}^2\begin{bmatrix}k\\4\end{bmatrix}(v)-\frac{\Pi\vartheta_1\begin{bmatrix}k\\1\end{bmatrix}(0)}{\Pi\vartheta_1\begin{bmatrix}k\\2\end{bmatrix}(0)}\Pi\vartheta_1\begin{bmatrix}k\\1\end{bmatrix}(v)\,\Pi\vartheta_1\begin{bmatrix}k\\2\end{bmatrix}(v)$$

$$+\frac{\Pi\vartheta_1\begin{bmatrix}k\\2\end{bmatrix}(0)}{\Pi\vartheta_1\begin{bmatrix}k\\1\end{bmatrix}(0)}\Pi\vartheta_1\begin{bmatrix}k\\0\end{bmatrix}(v)\,\Pi\vartheta_1\begin{bmatrix}k\\3\end{bmatrix}(v)=0$$

Ueber die Ableitung der quadratischen Gleichungen für den allgemeinen Fall verweisen wir auf: Klein, elliptische Functionen $n$ter Stufe pag. 81.

§ 8.

Beweis der Prym'schen Thetaformeln.

Wir setzen:

$$nu_1=(1-n)v_1+v_2+\ldots+v_{2n}$$
$$nu_2=v_1+(1-n)v_2+\ldots+v_{2n}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$nu_{2n}=v_1+v_2+\ldots+(1-n)v_{2n}$$

und versuchen zwei Ausdrücke zu bestimmen, die jene Bedingungen erfüllen, wie wir sie zu Anfang unserer Betrachtungen bei den neu eingeführten Thetafunctionen aufstellten.

Ein solcher Ausdruck ist nun:

$$\prod_1^{2n}{}_i\,\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(v_i)=f(v_i)\quad(1)$$

da er als Function von v angesehen, die Gleichungen befriedigt:

$$f(v_i+1)=f(v_i)$$
$$f(v_i+\tau)=f(v_i)e^{-\pi i(2v_i+\tau)}$$

Durch diese beiden Gleichungen ist unser Product (1) bis auf eine von v_i unabhängige Constante bestimmt.

Bilden wir weiter das Product:

$$\prod_1^{2n}{}_i\,\vartheta\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}(u_i)\,e^{-2/n\,\pi igh}\quad(2)$$

wobei g, h alle Werte von 0 bis $n-1$ annehmen sollen, so geht das-

selbe, als Function von u aufgefasst, bei der Vermehrung von v_i um die Einheit über in:

$$\prod_1^{2n}{}_i\, \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h+1 \end{bmatrix}(u_i)\, e^{-2/n\,\pi i g(h+1)}$$

Da wir aber unbeschadet der Richtigkeit annehmen können, dass auch $h+1$ alle Werte von 0 bis $n-1$ durchläuft, so finden wir also, dass bei der Vermehrung von v_i um 1 das Product (2) ungeändert bleibt. Ganz dasselbe gilt ferner von der Summe:

$$\sum_0^{n-1}{}_{gh} \prod_1^{2n}{}_i\, \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u_i)\, e^{-2/n\,\pi i g h} \quad (3)$$

Diese Summe erfüllt aber, wenn sie als Function von v betrachtet, mit $\varphi(v_i)$ bezeichnet wird, die weitere Bedingung:

$$\varphi(v_i+\tau) = \varphi(v_i)\, e^{-\pi i(2v_i+\tau)}$$

So haben wir zwei Ausdrücke: (1) und (3) der verlangten Art gefunden. Wir erhalten demnach:

$$\prod_1^{2n}{}_i\, \vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(v_i) = c \sum_0^{n-1}{}_{gh} \prod_1^{2n}{}_i\, \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u_i)\, e^{-2/n\,\pi i g h}$$

Die Constante c ist jedenfalls unabhängig von v. Sie hängt aber auch nicht von τ ab. Denn bezeichnen wir die linke Seite mit F, bilden die Differentialquotienten von F nach v und τ, so erfolgt:

$$\sum_1^{2n}{}_i \frac{\partial^2 F}{\partial v_i^2} = 4\pi i \frac{\partial F}{\partial \tau}.$$

Derselben Bedingung genügt die rechte Seite, so dass die Constante auch von τ unabhängig sein muss. Zu ihrer Bestimmung die Thetafunctionen durch die Fourrier'schen Reihenentwicklungen ersetzt, ergiebt:

$$1 = cn$$

oder es ist:

$$n \prod_1^{2n}{}_i\, \vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(v_i) = \sum_0^{n-1}{}_{g,h} \prod_1^{2n}{}_i\, \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u_i)\, e^{-2/n\,\pi i g h}$$

Das ist die Gleichung (θ_2), wie sie von Herrn Prym aufgestellt ist — specialisirt für den Fall einer Veränderlichen. Die Entwicklung der Formel (θ_1) erfolgt in analoger Weise.

XV.

Miscellen.

1.

Ueber Refractionscurven.

Ein Lichtstrahl, welcher aus einem Medium in ein anderes übertritt, erleidet an der Grenzfläche beider bekanntlich eine Ablenkung, in Folge deren Punkte, Linien und Flächen verschoben erscheinen, wenn die von ihnen ausgehenden Strahlen gebrochen in's Auge gelangen. Diese Refraction hängt wesentlich vom Brechungsexponenten beider Mittel ab, und mit Hülfe des bekannten Brechungsgesetzes ist die scheinbare Abweichung der betrachteten Objecte analytisch bestimmbar, wenn ihre Grenzflächen und Curven gesetzmässig verlaufen

Da die allgemeine Behandlung des Problems für den Durchgang eines Strahls durch n Medien nicht leicht ist, so beschränken wir uns auf den einfachen Fall, die Gleichung der ebenen scheinbaren Bildcurve aus der gegebenen betrachteten abzuleiten. Einzelne daraus resultirende Ergebnisse werden vielleicht neu sein.

Zunächst soll der Ort angegeben werden, in welchem ein Punkt der betrachteten Curve oder Fläche erscheint.

Wir lassen von dem Punkte P einen Strahl PA ausgehen, welcher mit der Verticalen PH zur Grenzfläche HA den Winkel β einschliesst, diesem entspricht an der Durchgangsstelle in A ein zweiter α, nach welchem gemäss des Brechungsgesetzes $\sin\alpha = n\sin\beta$ der Strahl in der Richtung AC in das Auge tritt.

Wir lassen ferner einen zweiten, dem ersten unendlich nahen Strahl von P ausgehen und in's Auge eintreten. Da das Auge nur

in geraden Linien sieht, so wird es den Punkt P im Convergenzpunkt P' der austretenden Strahlen erblicken.

Die Normale vom Auge zur Trennungsfläche beider Medien sei a. Sie sei zugleich die XAchse, und die Gerade, in welcher jene Fläche durch eine durch a und P gelegte Ebene geschnitten wird, sei die YAchse. P ist demnach durch die Coordinaten xy bestimmt. Der ihm entsprechende Bildpunkt P' habe die Coordinaten XY. Die Aufgabe besteht darin, letztere als Functionen der erstern darzustellen. Wir bezeichnen die Projection von $P'A$ und PP' auf die YAchse bezüglich durch v und f.

Demnach hat man folgende Relationen

$$\sin\alpha = n\sin\beta,$$
$$X = v\cot\alpha,$$
$$v+f = x\operatorname{tg}\beta.$$

Aus der ersten folgt durch Differentiation

$$\cos\alpha\, d\alpha = n\cos\beta\, d\beta,$$

aus der zweiten mit Berücksichtigung, dass X constant ist,

$$O = -\frac{v}{\sin\alpha^2}d\alpha + \cot\alpha\,.\,dv,$$

aus der dritten

$$dv = \frac{x\,d\beta}{\cos\beta^2}.$$

Hieraus findet man

$$\frac{v}{\sin\alpha^2} = \cot\alpha\frac{\cos\alpha}{\cos\beta^3}\frac{x}{n},$$

oder

$$v = \frac{x}{n}\frac{\sin\alpha\cos\alpha^2}{\cos\beta^3},$$

und

$$X = \frac{x}{n}\frac{\cos\alpha^3}{\cos\beta^3}.$$

Wird hierin α durch β und darauf β durch x und v ausgedrückt, so resultirt

$$nx^2X = \sqrt{(x^2-(v+f)^2m^2)^3}, \quad n^2-1 = m^2.$$

Aus

$$v = \frac{x}{n}\frac{\sin\alpha\cos\alpha^2}{\cos\beta^3}$$

erhält man

$$fx^2 = m^2(v+f)^3,$$

und ferner wegen $v+f = y-Y$ die bekannte Gleichung der Evolute eines Kegelschnitts

I. $$(nX)^{\frac{2}{3}}+m^{\frac{2}{3}}(y-Y)^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{2}{3}}.$$

Ersetzen wir in

$$X=\frac{x}{n}\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right)^3$$

β durch α und tg α durch $\frac{Y}{a+X}$, indem wir den cos durch durch tg ausdrücken, so kommt schliesslich

II. $$Y^2=\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{(X+a)^2}{X^{\frac{2}{3}}}\,\frac{x^{\frac{2}{3}}-(nX)^{\frac{2}{3}}}{m^{\frac{2}{3}}}.$$

Da aber

$$\frac{x^{\frac{2}{3}}-(nX)^{\frac{2}{3}}}{m^{\frac{2}{3}}}=(y-Y)^{\frac{2}{3}}$$

so folgt für

$$U=\frac{(X+a)^2}{X^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$Y^2=(y-Y)^{\frac{2}{3}}\,U,$$

oder

$$y=Y\left(1+\frac{Y^2}{U^{\frac{3}{2}}}\right),$$

also

$$y^2=\frac{x^{\frac{2}{3}}-(nX)^{\frac{2}{3}}}{m^{\frac{2}{3}}}\,U\left(1+\frac{x^{\frac{2}{3}}-(nX)^{\frac{2}{3}}}{m^{\frac{2}{3}}\,U^{\frac{1}{2}}}\right)^2,$$

woraus endlich durch Einsetzen von U die Beziehung

III. $$y^2=\left(x^{\frac{2}{3}}-(nX)^{\frac{2}{3}}\right)\frac{\left(a\,n^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}X^{\frac{1}{3}}\right)^2}{m^2X^{\frac{4}{3}}}$$

hervorgeht.

Die I. bis III. gegebenen Formeln enthalten die Auflösung der Aufgabe. Mit ihrer Hülfe kann man die Coordinaten xy des betrachteten Punktes P durch die Coordinaten XY des Bildpunktes darstellen:

IV. $$x=nX\left(1+\frac{m^2}{n^2}\,\frac{Y^2}{(X+a)^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$y=Y\left(1+\frac{m^2}{n^2}\,\frac{XY^2}{(X+a)^3}\right).$$

Liegt nun eine Gleichung zwischen xy vor, so resultirt durch Einsetzen der hier für xy gegebenen Ausdrücke in dieselbe die Gleichung der Bildcurve. Denkt man sich beide um die X Achse gedreht, so erhält man entsprechende Rotationsflächen, die gesetzmässig von einander abhangen. Nehmen wir an, dass das Auge unmittelbar über der Trennungsfläche beider Medien sich befindet, so wird a = null und die obigen Gleichungen werden

$$x = nX\left(1+\frac{m^2}{n^2}\frac{Y^2}{X^2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$y = Y\left(1+\frac{m^2}{n^2}\frac{Y^2}{X^2}\right),$$

woraus

$$\frac{Y^3}{X^2} = \frac{n^2 y^3}{x^2}.$$

Die Einfachheit dieses Ausdrucks lässt eine Anwendung auf die Parabelevolute zu, deren Gleichung $y^3 = kx^2$ ist.

Denken wir uns diese Curve oder deren entsprechende Rotationsfläche von einem Auge in oben angegebener Lage betrachtet, so ergibt sich aus der Formel

$$Y^3 = kn^2X^2,$$

dass die Gleichung der Bildcurve oder Fläche ebenfalls durch eine Parabelevolute charakterisirt wird.

Aus der Beziehung

$$\frac{ny}{x} = \frac{1}{\sqrt{\frac{X^2}{Y^2}+\frac{m^2}{n^2}}}$$

folgt, dass für $a = 0$ das Bild der Geraden $y = kx$ gleichfalls eine Gerade sein wird. Wird in der letzten Formel $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\beta$, $\frac{Y}{X} = \operatorname{tg}\alpha$ gesetzt, so folgt $\sin\alpha = n\sin\beta$. Ist $\sin\beta = \frac{1}{n}$, so tritt totale Reflexion ein.

Im Nachfolgenden wollen wir einige Anwendungen des vorhin Entwickelten geben, welche durch Beobachtungen von Refractionen im Wasser leicht bewahrheitet werden können. Es möge die Bildcurve einer horizontalen Geraden gesucht werden, welche in der XYEbene liegt und die Entfernung h von der YAchse hat. Demnach ist $x = h$ die Gleichung der Horizontalen. Vermöge IV. hat man sofort die gesuchte Bildcurve

$$X^{\frac{2}{3}}\left(1+\frac{m^2}{n^2}\frac{Y^2}{(X+a)^2}\right) = \left(\frac{h}{n}\right)^{\frac{2}{3}},$$

oder

$$Y^2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2(X+a)^2\left(\left(\frac{h}{nX}\right)^{\frac{2}{3}}-1\right)$$

Da für $X = 0$ Y unendlich wird, so nähert sich die Curve der YAchse, also der Trennungsgeraden asymptotisch. Eine Horizontalebene scheint sich demnach im weitern Verlauf der Oberfläche zu

nähern, ohne sie je zu erreichen. Je kleiner a ist, um so mehr nähert sich die Gerade der Trennungsebene und scheint darin zu schweben, wenn a zu null wird. In dieser Grenzlage machen vermöge der Formel $\sin\beta = \frac{1}{n}$ die austretenden Strahlen mit dem Einfallslot einen rechten Winkel. Das Auge sieht den Gegenstand nach horizontaler Richtung in der YAchse. Man kann die Verhältnisse auch aus einer andern Formel ableiten und erweitern, wenn wir etwa X vermittelst einer Function von xy ausdrücken. Bezeichnen wir $\left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{2}{3}}$ durch f, $\frac{m}{n}y$ durch g, so hängt die Bestimmung von X von folgender Gleichung ab

$$(X^{\frac{1}{3}})^4 + \frac{2a}{f}(X^{\frac{1}{3}})^3 + \left(\frac{a^2+g^2}{f^2} - f\right)(X^{\frac{1}{3}})^2 - 2a(X^{\frac{1}{3}}) - \frac{a^2}{f} = 0.$$

Ist hieraus X berechnet, so ist auch nach früherem Y bekannt: Nähert sich das Auge der Oberfläche, wird also a kleiner, so folgt aus der Formel

$$X = \sqrt{\frac{1}{n}\left(h^{\frac{2}{3}} - \frac{m^2y^2}{h^{\frac{4}{3}}}\right)^3}$$

beim Sehen in verticaler Richtung nach der XAchse, dass keine Strahlen mehr ins Auge dringen, wenn

$$h^{\frac{2}{3}} < \frac{m^2y^2}{m^{\frac{4}{3}}} \quad \text{oder} \quad h < my$$

ist, wenn also die Grenzlage der totalen Reflexion überschritten wird. Soll umgekehrt die Bildcurve oder Fläche zur horizontalen Geraden oder Fläche werden, so ist $x =$ Const. zu setzen und die Gleichung der gesuchten Curve wird

$$m^2y^2 = (x^{\frac{2}{3}} - h^{\frac{2}{3}})\left(x^{\frac{2}{3}} + \frac{an}{h^{\frac{1}{3}}}\right)^2.$$

Diese Linie ist um so stärker gekrümmt, je grösser der Brechungsexponent ist. Die ihr entsprechende Rotationsfläche, welche dem betrachtenden in der Achse befindlichem Auge die convexe Seite zukehrt, scheint sich demnach in einer Ebene auszudehnen. Setzt man ferner voraus, dass die Relation der Geraden

$$Y = (X+a)\operatorname{tg}\beta$$

für die gebrochenen Strahlen bestehe, so erhält man

$$x = nX\left(1 + \frac{m^2}{n^2}\operatorname{tg}\beta^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$y = a\,\mathrm{tg}\,\varepsilon + \left(\mathrm{tg}\,\beta + \frac{m^2}{n^2}\right) X,$$

woraus ebenfalls eine Gerade

$$y = a\,\mathrm{tg}\,\beta + n\,\frac{\left(\mathrm{tg}\,\beta + \frac{m^2}{n^2}\right) x}{\left(1 + \frac{m^2}{n^2}\,\mathrm{tg}\,\beta^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

hervorgeht.

Schliesslich wollen wir noch die Gleichung der Bildcurve einer zur Trennungsebene senkrechten Geraden aufsuchen. Demnach ist zu setzen $y = \mathrm{Const} = b$, so dass die Bildcurve durch folgende Gleichung repräsentirt wird:

$$Y + \frac{m^2}{n^2}\,\frac{XY^3}{(X+a)^3} = b.$$

Auch hier ist die betrachtete Gerade die Asymptote der Bildcurve, welch letztere für $X = \frac{a}{2}$ ihre grösste Ausbiegung erreicht, wie aus dem Differentialquotienten

$$\frac{dY}{dX} = \frac{m^2}{n^2}\,\frac{Y^3}{(X+a)}\,\frac{2X-a}{(X+a)^3 + 3\frac{m^2}{n^2}XY^2} = \mathrm{tg}\,\tau$$

hervorgeht. Man kann diesen Fall wie die vorhergehenden in der Natur leicht studiren, wenn man bekannte Refractionserscheinungen im Wasser in oben angegebener Form zum Ausdruck bringt.

Emmerich, im November 1884.

Emil Oekinghaus.

2.

Ueber Producte aus ganzen Zahlen.

Fortsetzung von Nr. XI.

6. Wie wir sahen, existirt in bezug auf ein Product von 4 Factoren eine Fülle von Relationen, welche dasselbe durch ein Quadrat zu einem Quadrat ergänzen. Dies legt die Vermutung nahe, dass auch in bezug auf mehr Factoren solche Relationen Geltung haben, und in der Tat finden wir ohne Schwierigkeit, dass dies z. B. für 6 Factoren der Fall ist. Gehen wir nämlich wie bei A) von dem Producte $(p^2-\alpha^2)(q^2-\beta^2)(r^2-\gamma^2)$ aus, so finden wir, dass die Relation

$$(p^2-\alpha^2)(q^2-\beta^2)(r^2-\gamma^2)+\{\alpha\beta\gamma+\alpha qr+\beta pr+\gamma pq\}^2$$
$$=\{pqr+\beta\gamma p+\alpha\gamma q+\alpha\beta r\}^2$$

giltig ist.

Da es unmöglich ist die aus dieser Relation resultirenden Formen auch nur annähernd zu fixiren, so wollen wir uns auf einen speciellen Fall beschränken, auf den Fall nämlich, wo $p=q=r$ ist. Hier ergiebt sich uns die Relation:

XXVII. $$(p^2-\alpha^2)(p^2-\beta^2)(p^2-\gamma^2)+(\alpha\beta\gamma+p^2(\alpha+\beta+\gamma))^2$$
$$=\{p^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma\}^2p^2$$

Sei nun ferner hier z. B.: $\alpha+\beta+\gamma=0$, so folgt sofort, dass

$$(p^2-\alpha^2)(p^2-\beta^2)(p^2-(\alpha+\beta)^2)+\alpha^2\beta^2\gamma^2$$

stets ein Quadrat ist. So erhalten wir z. B. folgende Quadrate, wenn wir alle Factoren um $\alpha+\beta$ vergrössern:

XXVIII.
$$\left\{\begin{array}{ll} p(p+1)(p+2)(p+4)(p+5)(p+6)+36 & (\alpha=1,\ \beta=2)\\ p(p+1)(p+3)(p+5)(p+7)(p+8)+144 & (\alpha=1,\ \beta=3)\\ p(p+2)(p+2)(p+4)(p+4)(p+6)+256 & (\alpha=2,\ \beta=2)\\ p(p+1)(p+4)(p+6)(p+9)(p+10)+400 & (\alpha=1,\ \beta=4)\\ p(p+2)(p+3)(p+7)(p+8)(p+10)+900 & (\alpha=2,\ \beta=3)\\ p(p+1)(p+5)(p+7)(p+11)(p+12)+2916 & (\alpha=1,\ \beta=5)\\ \ldots\ldots\ldots & \end{array}\right.$$

7. Wenden wir ferner die Relation XXVII. auf das aus 6 aufeinanderfolgenden Zahlen an, so finden wir ferner, dass

XXIX.
$$\left\{\begin{array}{l} p(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)(p+5)+\frac{1}{64}(15+(2p+5)^2)^2\\ p(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)(p+5)+\frac{1}{64}(15-7(2p+5)^2)^2\\ p(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)(p+5)+\frac{1}{64}(15-9(2p+5)^2)^2 \end{array}\right.$$

Quadrate ganzer Zahlen sind.

8. Bevor wir das Gebiet der Producte aus 6 ganzzahligen Factoren verlassen, wollen wir noch eine andere Ausnutzung der Gleichung XXVII. andeuten. Schreiben wir die erwähnte Gleichung nämlich in der Form:

XXX. $$p^2(p^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)^2-(p^2-\alpha^2)(p^2-\beta^2)(p^2-\gamma^2)=$$
$$(\alpha\beta\gamma+p^2(\alpha+\beta+\gamma))^2,$$

so erhalten wir ebenfalls eine Fülle von Relationen. Wählen wir z. B., α, β und γ so, dass $\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma$ verschwindet, so erhalten wir, wenn wir auch hier anstatt p eine entsprechend vermehrte Zahl einsetzen, z. B. die ganzzahligen Quadrate:

$$
\text{XXXI.}\quad \left\{
\begin{array}{ll}
(p+4)^6-pp(p+3)(p+5)(p+8)(p+8) & (\alpha=\beta=2) \\
(p+16)^6-pp(p+12)(p+20)(p+32)(p+32) & (\alpha=\beta=4) \\
(p+36)^6-pp(p+27)(p+45)(p+72)(p+72) & (\alpha=\beta=6) \\
\quad p^6-(p-2\alpha)(p-2\alpha)(p-\alpha)(p+\alpha)(p+2\alpha)(p+2\alpha) & \\
 & (\alpha=\beta) \\
(p+6)^6-p(p+3)(p+4)(p+8)(p+9)(p+12) & \\
 & (\alpha=3,\ \beta=+6) \\
(p+6)^6-pp(p+3)(p+9)(p+12)(p+12) & (\alpha=3,\ \beta=-6) \\
(p+2)^6-pp(p+1)(p+3)(p+4)(p+4) & (\alpha=2,\ \beta=-1) \\
(p+6)^6-p(p+3)(p+4)(p+8)(p+9)(p+12) & \\
 & (\alpha=3,\ \beta=-2) \\
(p+12)^6-p(p+8)(p+9)(p+15)(p+16)(p+24) & \\
 & (\alpha=4,\ \beta=-3) \\
(p+12)^6-p(p+6)(p+10)(p+14)(p+18)(p+24) & \\
 & (\alpha=12.\ \beta=-4) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}\right.
$$

Zum Schlusse wollen wir noch bemerken, dass die Betrachtungen sich auch auf Producte aus mehr als 6 Zahlen ausdehnen lassen. So gilt z. B. für 8 ganze Zahlen als Factoren der Satz, dass

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+5)(n+6)(n+7)(n+8)+100(n+4)^2$$

stets ein Quadrat ist.

Weingarten, im Nov. 1885. **B. Sporer.**

3.

Zur Figur des Feuerbach'schen Kreises.

Verbindet man einen Punkt des einem gleichseitigen Dreieck umschriebenen Kreises mit den drei Ecken, so ist von den erhaltenen drei Sehnen eine immer gleich der Summe der beiden anderen; man kann sich die Frage stellen, ob es auf dem umbeschriebenen Kreise eines beliebigen Dreiecks Punkte mit ähnlichen Eigenschaften giebt. Es sei ABC ein ungleichseitiges Dreieck, $a < b < c$, so fragen wir nach solchen Punkten P auf der Peripherie des Umkreises, für die von den drei Sehnen PA, PB und PC eine der Summe der beiden anderen gleich wird. Jenachdem der Punkt P auf dem Bogen AB oder BC oder CA liegt, findet nach dem sog. Satze des Ptolemäus eine der drei Gleichungen statt

[redacted]

$$PA.a + PB.b = PC.c$$

oder

$$PB.b + PC.c = PA.a$$

oder

$$PC.c + PA.a = PB.b$$

Gleichzeitig soll aber entweder $PA + PB = PC$ oder $PB + PC = PA$ oder $PC + PA = PB$ sein. Geht man die 9 möglichen Combinationen einzeln durch, so findet man leicht, dass es immer vier Punkte der verlangten Art giebt; P_1 und P_2 auf Bogen AB, P_3 und P_4 auf Bogen CA. Dabei ist:

$$\text{I.}\quad \begin{aligned}
&\frac{P_1A}{c-b} = \frac{P_1B}{c+a} = \frac{P_1C}{b+a} = \lambda_1, \quad P_1A + P_1C = P_1B \\
&\frac{P_2A}{c+b} = \frac{P_2B}{c-a} = \frac{P_2C}{b+a} = \lambda_2, \quad P_2B + P_2C = P_2A \\
&\frac{P_3A}{c+b} = \frac{P_3B}{c+a} = \frac{P_3C}{b-a} = \lambda_3, \quad P_3B + P_3C = P_3A \\
&\frac{P_4A}{c-b} = \frac{P_4B}{c-a} = \frac{P_4C}{b-a} = \lambda_4, \quad P_4A + P_4C = P_4B
\end{aligned}$$

Die Punkte haben auf der Peripherie immer die Reihenfolge:

$$AP_1P_2BCP_3P_4A.$$

Eine Parallele zu AB durch C treffe den Umkreis in C'. Dann ist aus dem Viereck AP_1BC

$$P_1A.a + P_1B.b = P_1C.c$$

und aus Viereck AP_1BC', da $BC' = b$ und $AC' = a$

$$P_1A.b + P_1B.a = P_1C'.c$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$(P_1B - P_1A)(b - a) = (P_1C - P_1C')c$$

oder nach I.

$$P_1C(b - a) = (P_1C - P_1C')c$$

Da sich aber aus Viereck $ABCC'$ ergiebt

$$b^2 - a^2 = CC'.c$$

so erhält man durch Division:

$$\frac{P_1C}{b+a} = \frac{P_1C - P_1C'}{CC'}$$

Auf ähnliche Weise leitet man die folgenden Gleichungen ab:

II.
$$\frac{-P_1A+P_1A'}{AA'}=\frac{P_1B-P_1B'}{BB'}=\frac{P_1C-P_1C'}{CC'}=\lambda_1$$
$$\frac{P_2A-P_2A'}{AA'}=\frac{-P_2B+P_2B'}{BB'}=\frac{-P_2C+P_2C'}{CC'}=\lambda_2$$
$$\frac{-P_3A+P_3A'}{AA'}=\frac{-P_3B+P_3B'}{BB'}=\frac{-P_3C+P_3C'}{CC'}=\lambda_3$$
$$\frac{P_4A+P_4A'}{AA'}=\frac{P_4B+P_4B'}{BB'}=\frac{P_4C+P_4C'}{CC'}=\lambda_4$$

Die Gleichungen I. und II. lassen sich nun in bemerkenswerter Weise weiter geometrisch ausdeuten.

Ein Kreis F, Radius r, werde von einem Kreise K, Radius ϱ, im Punkte P von innen berührt. Eine Sehne AB von Kr. F berühre K in C. Dann ist PC die Halbirungslinie des Winkels APB, nach einem bekannten Satze ist also

$$\frac{PA}{CA}=\frac{PB}{CB}=\frac{PA+PB}{CA+CB}=\frac{PA+PB}{AB}$$

Ist nun D der Schnittpunkt von AP mit Kreis K, so ist

$$\frac{PA^2}{CA^2}=\frac{PA^2}{PA.DA}=\frac{PA}{DA}$$

Da aber P der äussere Aehnlichkeitspunkt beider Kreise ist, so ist

$$\frac{PA}{DA}=\frac{r}{r-\varrho},$$

es ergiebt sich also

$$\frac{PA+PB}{AB}=\sqrt{\frac{r}{r-\varrho}}$$

Sind daher Kreis F und Punkt P fest, A und B aber so beweglich, dass $\frac{PA+PB}{AB}$ constant bleibt, so berührt AB beständig einen und denselben Kreis K, der F in P von innen berührt, und dessen Radius ϱ sich aus

$$\frac{PA+PB}{AB}=\sqrt{\frac{r}{r-\varrho}}$$

ergiebt.

Lässt man in ähnlicher Weise $\frac{PA-PB}{AB}$ constant bleiben, so

umhüllt AB einen Kreis, der F in P von aussen berührt, und dessen Radius durch die Gleichung

$$\frac{PA - PB}{AB} = \sqrt{\frac{r}{r-\varrho}}$$

bestimmt ist.

Wendet man diese Bemerkungen auf die Gleichungen II. an, so lehrt z. B. der erste derselben, dass die Geraden AA', BB', CC' Tangenten eines Kreises K_1 sind, der den ursprünglichen, er heisse von nun an F, in P_1 von aussen berührt. Der Radius ρ_1 von K_1 bestimmt sich aus:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{r}{r-\varrho_1}}$$

Aehnliches ergiebt sich aus den drei übrigen Gleichungen II. Nun sind, wie leicht zu sehen, die Punkte ABC die Mitten der Seiten in dem Dreieck, das von den drei Geraden AA', BB' und CC' gebildet wird. So ergiebt sich also der Feuerbach'sche Satz: **Die vier Kreise, die die Seiten eines Dreiecks berühren, berühren auch denjenigen Kreis, der durch die Mitten der Dreiecksseiten geht.**

Ferner erhellt: **Verbindet man einen der Berührungspunkte auf dem Feuerbach'schen Kreise mit den Mitten der Dreiecksseiten, so ist von den drei Verbindungssehnen allemal eine gleich der Summe der beiden anderen.**

Ueber die Lage der vier Berührungspunkte auf dem Feuerbach-schen Kreise kann man ferner aus den Gleichungen I. einfache Folgerungen ableiten. Die Gerade AB werde von P_1P_2 im Punkte D getroffen; so ist:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{\triangle P_1AP_2}{\triangle P_1BP_2}.$$

Da aber

$$\text{Wkl. } PAP_2 = \text{Wkl. } P_1BP_2,$$

so ist

$$\frac{\triangle P_1AP_2}{\triangle P_1BP_2} = \frac{P_1A \,.\, P_2A}{P_1B_1 \,.\, P_2B}$$

und daher mit Rücksicht auf die beiden ersten Gleichungen I.

$$\frac{AD}{DB} = \frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}$$

Auf dasselbe Verhältniss wird man aber auch geführt, wenn man den Schnittpunkt von AB mit P_3P_4 aufsucht, es schneiden sich also P_1P_2 und P_3P_4 auf AB.

Nennt man das durch die Halbirungspunkte der Seiten eines Dreiecks gebildete Dreieck kurz sein Mittendreieck, so hat man den Satz: Die Diagonalpunkte des Vierecks der Berührungspunkte auf dem Feuerbach'schen Kreise fallen in die Seiten des Mittendreiecks.

Aus den Verhältnissen, nach denen diese Seiten durch die Diagonalpunkte geteilt werden, ergiebt sich: Die Verbindungslinien der Diagonalpunkte mit den gegenüberliegenden Ecken des Mittendreiecks schneiden sich in einem Punkte, und dieser, wie man leicht erkennt, liegt auf dem Feuerbach'schen Kreise.

Noch eine andere geometrische Folgerung kann man aus den Gl. I. ableiten. Auf einem Kreise F mit Radius r liege der Punkt M. Um M sei mit dem Radius m ein Kreis geschlagen. L sei die Potenzlinie der Kreise F und M. Eine Gerade von M aus schneide F und L in P und N. F und L werden in P und N von einem Kreise K berührt, dessen Radius ϱ sei. Liegt nun etwa N ausserhalb des Kreises F, so ist, weil es auf L liegt,

$$NM^2 - m^2 = NM.NP = NM^2 - NM.PM$$

oder

$$m^2 = NM.PM$$

d. h. die Kreise K und M sind orthogonal, und ferner ist

$$\frac{PM^2}{m^2} = \frac{PM^2}{PM.NM} = \frac{PM}{NM} = \frac{r}{r+\varrho}$$

da man P als Aehnlichkeitspunkt von F und K ansehen kann. Hält man also P fest und lässt Punkt und Kreis M variiren, während $\frac{PM}{m}$ constant bleibt, so berührt die Potenzlinie von F und M beständig denselben Kreis K, der F in P berührt, sein Radius ϱ ergiebt sich aus

$$\frac{PM}{m} = \sqrt{\frac{r}{r+\varrho}}.$$

Jenachdem $\frac{PM}{m} > 1$ oder < 1, wird F von K aussen oder innen berührt, was positiven oder negativen Werten von ϱ entspricht.

Wendet man diese Bemerkung z. B. auf die erste der Gl. I. an, so ersieht man aus derselben, dass, wenn um A, B und C Kreise bezüglich mit den Radien $c-b$, $c+a$ und $b+a$ geschlagen werden, die drei Potenzlinien dieser Kreise und des Kreises F den oben mit K_1 bezeichneten Kreis berühren. Man kann die Lagebeziehungen, die

sich hieraus ergeben, auch in folgende Aussage zusammenfassen: Die Berührungskreise eines Dreiecks berühren jede Seite in vier Punkten, die paarweise gleichen Abstand von der Mitte der Seite haben. Schlägt man um die Mitte nun einen Kreis durch zwei dieser Berührungspunkte, so ist die zu ihm oder dem Feuerbach'schen Kreise gehörige Potenzlinie die ausser den drei Dreiecksseiten vorhandene vierte gemeinschaftliche Tangente der entsprechenden Berührungskreise. Dr. W. Godt.

4.

Analytischer Beweis zweier Sätze von regelmässigen Pyramiden und Polyedsrn.

Der erstere Satz lautet:

Die Summe der Projectionen der Seitenkanten einer $n$seitigen regelmässigen Pyramide auf eine beliebige Gerade ist gleich der n-fachen Projection der Höhe.

Projicirt man die Kanten erst auf das Höhenlot und auf 2 dazu orthogonale Axen, dann von da auf die beliebige Gerade, so sind die erstern Projectionen gleich der Höhe, die letztern $= 0$ nach dem Satze, dass die Summe der Sinus oder Cosinus einer arithmetischen Reihe, welche die Periode durchläuft, $= 0$ ist; folglich bleibt nach zweiter Projection nur die $n$fache der Höhe übrig. Obwol hiernach der zu beweisende Satz eine leichte Folge des angewandten Satzes ist, so möchte doch auch der folgende directe Beweis nicht ohne Interesse sein.

Legt man durch die Spitze der Pyramide 3 beliebige orthogonale Axen der x, y, z, so sind die Coordinaten einer Ecke der Grundfläche

$$x = \alpha h + au, \quad y = \beta h + bu, \quad z = \gamma h + cu$$

wo h die Höhe, u der Eckradius der Grundfläche α, β, γ die Richtungscosinus von h, und a, b, c die von u sind. Die Summe über alle Ecken der Grundfläche genommen giebt:

$$\Sigma x = n\alpha h + u\Sigma a; \quad \text{etc.}$$

daher bleibt nur zu beweisen, dass $\Sigma a = 0$ ist. Nun hat man, wenn die benachbarte Ecke durch einen Strich unterschieden wird:

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0; \quad \alpha a' + \beta b + \gamma c' = 0 \tag{1}$$

$$aa' + bb' + cc' = \cos\vartheta$$

wo ϑ den Winkel zwischen u und u' bezeichnet. Eliminirt man c, c', so kommt:

$$aa'+bb'-(\alpha b-\beta a)(\alpha b'-\beta a')=\gamma^2\cos\vartheta \quad (2)$$

Eliminirt man c zwischen (1) und

$$a^2+b^2+c^2=1$$

so findet man:

$$(1-\alpha^2)b^2+2\alpha\beta ab+(1-\beta^2)a^2=c^2$$

oder, aufgelöst nach b:

$$b=\frac{\gamma\varrho-\alpha\beta a}{1-\alpha^2};\quad \varrho^2=1-\alpha^2-a^2$$

woraus:

$$\alpha b-\beta a=\frac{\alpha\gamma\varrho-\beta a}{1-\alpha^2}$$

Dies in Anwendung auf beide Ecken in Gl. (2) eingeführt giebt:

$$aa'+\varrho\varrho'=(1-\alpha^2)\cos\vartheta$$

woraus:

$$(1-\alpha^2-a^2)(1-\alpha^2-a'^2)=\{aa'-(1-\alpha^2)\cos\vartheta\}^2$$

oder

$$(1-\alpha^2)\sin^2\vartheta=a^2+a'^2-2aa'\cos\vartheta$$

und angewandt auf die andere Nachbarecke:

$$(1-\alpha^2)\sin^2\vartheta=a^2+a''^2-2aa''\cos\vartheta$$

Dies subtrahirt giebt nach Division durch $a'-a''$:

$$a'+a''-2a\cos\vartheta=0$$

Nimmt man die Summe über alle Ecken, so kommt:

$$\Sigma a(2-2\cos\vartheta)=0 \quad \text{oder} \quad \Sigma a=0$$

was zu beweisen war.

Aus diesem Satze folgt leicht der zweite:

Die Summe der Projectionen der Eckradien eines regelmässigen Polyeders auf eine beliebige Gerade ist = 0.

Eine Gerade durch den Mittelpunkt normal zu einer Seite gezogen ist gemeinsame Axe einer Anzahl regelmässiger Pyramiden, deren Seitenkanten die Eckradien des Polyeders sind. Das Tetraeder ausgenommen, sind erstlich alle Eckradien einfach in diesen Pyramidenkanten begriffen, ausserdem sind immer 2 Pyramiden von gleicher Seitenzahl so gelegen, dass ihre Höhen gleiche entgegengesetzte Strecken auf jener Axe bilden. Das gleiche gilt dann von

den Projectionen der Höhen auf die beliebige Gerade; für je 2 entsprechende Pyramiden hebt sich das Gleichvielfache der Höhenprojectionen, also nach dem ersten Satze die Summe der Projectionen der Kanten, auf, mithin auch die Summe der Projectionen aller Eckradien. Beim Tetraeder hat man nur 1 dreiseitige Pyramide und einen auf der Axe liegenden Eckradius; dieser ist 3 mal so gross als die Höhe jener und ihr entgegengesetzt, folglich auch hier der Satz zutreffend.

Dieser zweite Satz folgt auch ohne den ersten leicht daraus, dass der Mittelpunkt der Schwerpunkt der gesamten (gleich belasteten) Ecken ist. Denn die Projection des Radius einer Ecke auf eine beliebige Gerade multiplicirt mit dem Gewicht der Ecke ist deren statisches Moment in Bezug auf eine durch den Mittelpunkt normal zur Geraden gelegte Ebene, so dass die Summe null sein muss. Der erstere Beweis lässt erkennen, wie sich der Satz erweitern liesse auf ein Polyeder, das nur die angewandten Eigenschaften hat.

R. Hoppe.

5.

Der Krümmungskreis der Ellipse.

Es ist in neuster Zeit von mehreren Seiten als wünschenswert bezeichnet worden, dass man auf Schulen, wo die Lehre von den Kegelschnitten getrieben wird, auch den Krümmugskreis, namentlich der Ellipse mit in das Bereich dieser Doctrin ziehen könnte. Dabei ist es erklärte Bedingung, dass keine Differentialrechnung, überhaupt kein Uebergang zum Grenzwert in Anwendung kommen darf. Fügt man hinzu, dass auch die analytische Geometrie ausgeschlotsen sein soll, so ist diese Bedingung schon in der ersten mitenthalten, denn analytische Geometrie im correcten Sinne erfordert Differentialrechnung. Dagegen kann es nicht verwehrt sein Coordinaten anzuwenden; denn das würde eine willkürliche Beschränkung im Gebrauche von Hülfslinien sein. Im Grunde dienen dieselben nur zur Vereinfachung des Ausdrucks und leichtern Orientirung, sind aber principiell nicht notwendig.

Alles geforderte wollen wir in der noch weiter gehenden Bedingung vereinigen, dass keine genetische Betrachtung zugezogen werden soll, mit Ausnahme der einen, welche der in Rede stehenden Aufgabe vorausgeht, nämlich der Erzeugung der vorliegenden Curve durch den Punkt. Es soll also nur von unveränderlichen Grössen

und Lagen die Rede sein. Erst bei dieser Consequenz der Beschränkung ist es leicht zu controliren, ob eine versteckte Anwendung von Grenzwerten vorkommt.

Im genannten Sinne ist es nun unsere Aufgabe den Begriff des Krümmungskreises und die zur Construction erforderlichen Bestimmungen herzuleiten.

Beschreibung der Figur.

Eine Ellipse E ist gegeben. Auf ihr liegen die Punkte P, P_1, N, N_1 und zwar P und P_1 zwischen N und N_1. Von P aus ist eine Normale nach innen gezogen; auf ihr liegen die Punkte M und M'. Durch M' und P_1 geht die Gerade $M'Q$. Um M und M' sind Kreise K und K' durch P beschrieben; K' schneidet $M'Q$ in Q.

Zur Ermittelung der Normale ist die Gerade PL gezogen, die dann nicht weiter vorkommt.

Erzeugung der Ellipse.

Die Ellipse E ist der geometrische Ort des Punktes P, dessen Coordinaten die Werte haben

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi \tag{1}$$

Von ihren Halbaxen a, b sei a die grössere. Sei P ein beliebiger bestimmter Punkt auf ihr, P_1 mit den Coordinaten

$$x_1 = a\cos\varphi_1, \qquad y = b\sin\varphi_1 \tag{2}$$

ein zweiter. Von ihm wird die Ellipse beschrieben, indem

$$\varphi_1 \text{ von } \varphi - 2\mathrm{R} \text{ bis } \varphi + 2\mathrm{R} \tag{3}$$

beständig wächst. Dementsprechend ist der diametrale Punkt von P Anfang und Ende der erzeugten Linie. Nachdem dies festgesetzt, kann man sagen:

„Zu grössern Erzeugungswinkeln (φ_1) gehören grössere Ellipsen-„bogen; der Erzeugungswinkel jedes Punkts eines Ellipsenbogens ist „demnach ein Mittel zwischen den Erzeugungswinkeln seiner End-„punkte.“

Bestimmung der Normale.

Die Gerade PL bilde mit der x Axe den Winkel ϑ. Auf ihr begrenze der Punkt L' die Strecke $PL' = u$; dann sind seine Coordinaten

$$x_2 = x + u\cos\vartheta, \qquad y_2 = y + u\sin\vartheta$$

Sei L' ein Punkt auf E und φ_2 sein Erzeugungswinkel; dann ist auch

$$x_2 = a \cos \varphi_2; \qquad y_2 = b \sin \varphi_2$$

daher nach Vergleichung

$$a(\cos \varphi_2 - \cos \varphi) = u \cos \vartheta; \quad b(\sin \varphi_2 - \sin \varphi) = u \sin \vartheta \tag{4}$$

woraus nach Elimination von u:

$$\operatorname{tg} \vartheta = -\frac{b}{a} \cot \frac{\varphi_2 + \varphi}{2} \tag{5}$$

Für gegebenes ϑ entspricht dem nur ein einziger Wert von φ_2. Ist dieser $= \varphi_1$, fällt also L' in P_1, so hat PL ausser P keinen Punkt mit E gemein. Für Kreis und Ellipse ist eine solche Gerade eine Tangente. Ihre Richtung wird nach Gl. (5) bestimmt durch

$$\operatorname{tg} \vartheta = -\frac{b}{a} \cot \varphi$$

Gibt man PL diese Richtung und setzt zur Abkürzung

$$c = \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} \tag{6}$$

so erhält man die Werte:

$$\cos \vartheta = \pm \frac{a}{c} \sin \varphi; \qquad \sin \vartheta = \mp \frac{b}{c} \cos \varphi \tag{7}$$

und kann nach Einsetzung in (4) daraus berechnen:

$$\cos(\varphi_2 - \varphi) = 1 \quad \text{das ist} \quad \varphi_2 = \varphi$$

folglich gibt es in jedem Punkte von E eine Tangente.

Vermehrt man nun die Neigung ϑ um einen Rechten, so geht die Tangente in die Normale über; daher sind

$$x_0 = x - u \sin \vartheta, \qquad y_0 = y + u \cos \vartheta$$

die Coordinaten eines Punkts M' auf der Normale, der auf ihr von P aus die Strecke u begrenzt. Führt man die Werte (7) ein und wählt die unteren Vorzeichen, so wird

$$x_0 = x - \frac{bu}{c} \cos \varphi; \qquad y_0 = y - \frac{au}{c} \sin \varphi \tag{8}$$

und die Strecke ist nach innen zu gerichtet.

Das Vorstehende sollte nur an Bekanntes an
das Folgende nicht nötig zu wissen, dass eine

dass die Gl. (8) die Normale bestimmen, da wir keine Eigenschaften von ihnen anwenden. Wären also Tangente und Normale unbekannt, so würden wir direct durch die Gl. (8) die Gerade bestimmen, auf der M' liegen soll. Wir gehen erst jetzt zu unserer Aufgabe über.

Bestimmung des Krümmugskreises

Wir ziehen die Gerade P_1M'. Sei

$$PM' = u; \qquad P_1M' = u_1$$

dann ist

$$u^2 = (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2: \quad u_1^2 = (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2$$

daher

$$u^2 - u_1^2 = (x_1 - x)(2x_0 - x - x_1) + (y_1 - y)(2y_0 - y - y_1)$$

und nach Einführung der Werte (8) (1) (2)

$$u^2 - u_1^2 = 4\sin^2\frac{\varphi_1 - \varphi}{2} . U \tag{9}$$

wo

$$U = \frac{abu}{c} - c_1^2$$

wenn man, analog (6),

$$c_1 = \sqrt{a^2\sin^2\frac{\varphi_1 + \varphi}{2} + b^2\cos^2\frac{\varphi_1 + \varphi}{2}}$$

setzt. Unter den Werten von u zeichnet sich derjenige aus, für welchen U mit $\varphi_1 - \varphi$ verschwindet; dieser sei ϱ; dann hat man:

$$\varrho = \frac{c^3}{ab}$$

Setzt man nun

$$u = \varrho + \varepsilon$$

so wird

$$U = \frac{ab\varepsilon}{c} - (a^2 - b^2)\sin\frac{\varphi_1 - \varphi}{2}\sin\frac{\varphi_1 + 3\varphi}{2} \tag{10}$$

Ist ε nicht null, so kann man eine positive Grösse

$$\psi < \text{abs.}\ \frac{ab}{a^2 - b^2}\,\frac{\varepsilon}{c}$$

wählen und die Ellipsenpunkte N und N_1, zwischen welchen P_1 liegen soll, durch die Coordinaten

$$\left.\begin{matrix}x_3\\x_4\end{matrix}\right\} = a\cos(\varphi \mp 2\psi), \quad \left.\begin{matrix}y_3\\y_4\end{matrix}\right\} = b\sin(\varphi \mp 2\psi)$$

bestimmen. Dann ist

$$\varphi - 2\psi < \varphi_1 < \varphi + 2\psi \quad \text{oder}$$

$$-\psi < \frac{\varphi_1 - \varphi}{2} < \psi \quad \text{oder}$$

$$\text{abs.}\frac{\varphi_1 - \varphi}{2} < \psi < \text{abs.}\frac{ab}{a^2 - b^2}\frac{\varepsilon}{c}$$

Da nun wegen der Grenzen (3) von φ_1 der abs. W. von $\frac{\varphi_1 - \varphi}{2}$ stets im ersten Quadranten liegt, so ist auch

$$\text{abs.}\left[(a^2 - b^2)\sin\frac{\varphi_1 - \varphi}{2}\sin\frac{\varphi_1 + 3\varphi}{2}\right] \overline{\overline{<}} (a^2 - b^2)\text{abs.}\sin\frac{\varphi_1 - \varphi}{2} < \text{abs.}\frac{ab\varepsilon}{c}$$

folglich hat nach Gl. (10) U, und nach Gl. (9) auch $u^2 - u_1^2$ gleiches Vorzeichen mit $\frac{ab\varepsilon}{c}$, das ist mit ε.

Zieht man demnach um M' durch P, also mit dem Radius $\varrho + \varepsilon$ den Kreis K', welcher die Gerade $M'P_1$ in Q trifft, so ist

$$M'Q = u = \varrho + \varepsilon; \qquad M'P_1 = u_1$$

daher bzhw.

$$M'Q \gtrless M'P_1 \quad \text{für} \quad \varepsilon \gtrless 0$$

und da P_1 jeder Punkt des Ellipsenbogens NPN_1 sein kann, so liegt bzhw. NPN_1 innerhalb oder ausserhalb K'. Dasselbe gilt aber auch vom Kreise K, weil er bzhw. kleinern) oder grössern Radius als K' hat, folglich liegt K' nicht zwischen NPN_1 und K, und kann überhaupt kein Kreisbogen von P aus zwischen ihnen liegen, dessen Mittelpunkt auf der Normale liegt.

Hat ein Kreisbogen von P aus einen Mittelpunkt ausser der Normale, so schneidet er in P die Kreise K und K', letztern sowol für positives als für negatives ε; daher ist der eine Zweig von P an ausserhalb K' für $\varepsilon > 0$, also auch ausserhalb E, der andre innerhalb K' für $\varepsilon < 0$, also auch innerhalb E, folglich liegt der Kreis auf keiner Seite zwischen E und K.

Es hat sich ergeben, dass zwischen E und K von P Kreisbogen möglich ist.

Ist zwischen einer Curve und einem Kreise von einem gemeinsamen Punkte beider aus kein Kreisbogen möglich, so heisst ersterer der **Krümmungskreis** der Curve in diesem Punkte.

Hiernach ist K der Krümmungskreis der Ellipse E in P; er ist dadurch bestimmt, dass sein Mittelpunkt auf der Normale liegt und auf dieser nach innen zu eine Strecke $= \frac{c^3}{ab}$ begrenzt, die seinen Radius darstellt.

R. Hoppe.

6.

Schüler-Aufgabe.

Die nach der Zahlenform des dekadischen Systems geschriebene Gleichung

$$(x\,23)^2 = (x\,5\,x\,29)$$

soll aufgelöst werden.

Wir bekommen:

$$(100x + 23)^2 = 10\,100x + 5029$$

$$20x^2 - 11x = 9$$

$$x = \pm\frac{29}{40} + \frac{11}{40}$$

Für die Antwort kann nur das positive Zeichen gelten. Man erhält $123^2 = 15\,129$.

Wien, November 1886. Emil Hain.

[redacted]

Litterarischer Bericht
XIII.

Lehrbücher.

Die Hauptsätze der Elementar-Mathematik. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten. Bearbeitet von A. F. G. Th. Gauss, Professor am Gymnasium zu Bunzlau. Erster Teil: Arithmetik und Planimetrie. Mit 130 Holzschnitten. — Zweiter Teil: Stereometrie und Trigonometrie. Mit 53 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Zweite, verbesserte Auflage. Bunzlau 1885. G. Kreuschmer. 163 + 67 S.

Die erste Auflage ist im 221. litt. Ber. S. 1. besprochen. Die daran gemachten Ausstellungen sind in 2. Auflage nicht berücksichtigt. Der Logarithmus wird auch hier durchweg als transcendente Function zweier Zahlen behandelt, und es bleibt dem Schüler die Erkenntniss ganz vorenthalten, dass derselbe nur der Quotient zweier Functionswerte je einer Zahl ist. Es mag ja recht nützlich sein die Allgemeingültigkeit der Operationssätze für jede Grundzahl im Bewusstsein zu erhalten; aber dazu ist jene Unkenntniss nicht nötig, es geschieht weit besser durch Herausstellung des Sachverhalts, welcher die Allgemeingültigkeit überall, wo sie stattfindet, als selbstverständlich erscheinen lässt. Einige ausgeführte Verbesserungen sind in der Vorrede genannt. Die Definition von „grösser und kleiner" ist durch eine besser zutreffende ersetzt. Ferner wird der Unterschied zwischen der „constanten" und der „werdenden" Null betont. Vor diesem tropischen Ausdruck, den freilich der Kundige zu deuten weiss, ist sehr zu warnen, und der Satz (S. 19.): „Das Zeichen 0 hat zwei verschiedene Bedeutungen" — zu verwerfen. Die Verschiedenheit der Nullen hat schon Manche · Kopf ver-

dreht und zum Verständniss der Infinitesimaltheorie unfähig gemacht. Jede reelle abstracte Zahl kann nur gleich, grösser oder kleiner sein als eine andere. Dieser Satz darf nicht in Zweifel gestellt und ihm widersprechende Gedanken und Phantasien erregt werden. Der genannte Tropus überträgt ein Attribut auf einen Gegenstand, dem es nicht zukommt (etwa wie „der lederne Handschuhmacher"). Die Null ist eine Constante, keiner Verschiedenheit fähig, kann also nicht werden. Das Werden kommt als Attribut einer Veränderlichen zu, die nur den Wert 0 annehmen kann, in dem Augenblicke aber, wo dies der Fall ist, von keiner Null irgend differirt. Die vom Verfasser gewählte Ausdrucksweise nennt nun die Null werdend statt einer von 0 verschiedenen Grösse, geht noch weiter und lässt statt letzterer die sogen. werdende Null sich von der constanten Null unterscheiden; um die Verwirrung vollständig zu machen, wird dann das Verschiedene durch gleiches Zeichen 0 ausgedrückt. Ersteres charakterisirt die tropische, letzteres die symbolische Ausdrucksweise. Was die Würdigung beider betrifft, so ist erst kürzlich von pädagogischer Seite ein Aufsatz (von Friedr. Meyer) gegen den Gebrauch symbolischer Ausdrücke in der Elementarmathematik aufgetreten, welcher zeigt, dass derselbe unnötig und unnütz ist. Wir stimmen dem Urteil vollkommen bei, besonders in Anwendung auf Grenzwerte und unendliche Grössen, um die es hier handelt, behaupten aber auch ein gleiches von der tropischen Redeweise. Hat man das Nötige correct in eigentlichen Worten ausgesprochen, so ist gar kein Bedürfniss zum Tropus oder Symbol zu greifen. Unschädlich würde der Gebrauch beider sein, wenn er erst eingeführt würde, nachdem der Schüler mit der Sache vorher bekannt und vertraut genug wäre um den eigentlichen Sinn nie zu verfehlen. Hier sehen wir das Gegenteil: der verführerische Tropus soll die Brücke bilden zum Verständniss eines neuen Begriffs. Selbst dann noch könnte die anfängliche Undeutlichkeit wieder gehoben werden, wenn hinreichende Erklärung und Uebung nachfolgte. In der Tat folgen im Buche manche tadellos richtige Angaben, welche zur Erklärung notwendig gehören. Erwägt man aber, dass in der ganzen Arithmetik keine Anwendung davon vorkommt, so kann man nach diesen bloss mitgeteilten, dann nicht wieder erwähnten, also auch nie geübten Sätzen offenbar keine solche Wirkung auf Vertrautheit erwarten, dass sie sogar in tropischer und symbolischer Weise dargestellt noch deutlich wären. Im Buche scheint das Symbol (0 statt der verschwindenden Variabeln) das einzige Motiv für den Tropus zu sein. Man lasse das an jener Stelle ganz müssige Symbol weg, und es fehlt jeder Grund von einer werdenden Null zu reden; für den Satz, dass 0 nicht Divisor sein kann, gibt es dann kein irre machendes Aber. Den Anfänger mit dem Wesen der unendlichen Grössen in der Kürze

bekannt zu machen, was jene Stelle wol beabsichtigt, kann bei correctem Verfahren ganz nützlich sein, doch Teilnehmer an der vulgären Begriffsverwirrung soll er nicht werden. Eben darum sind jene Symbole, welche die Meinung erwecken, dass die Null ein rätselhaftes Doppelwesen sei, als verderblich in jeder Hinsicht zu verwerfen.

Im übrigen ist in der Arithmetik Manches kürzer behandelt, die Lehre von den arithmetischen Reihen höherer Ordnung weggefallen. In der Geometrie und Trigonometrie sind einige wesentliche Vermehrungen und Vereinfachungen im einzelnen genannt. H.

Lehrbuch der kaufmännischen Arithmetik. Zum Gebrauche für Handels-Lehranstalten und für den Selbstunterricht. Von Dr. Ernst Kaulich, Director der Prager Handelsakademie. Vierte, umgearbeitete und vermehrte Auflage. Prag 1885. Jgnaz Fuchs. 378 S.

Das sehr reichhaltige, mit Umsicht und Sorgfalt bearbeitete Lehrbuch besteht aus 2 Teilen, von denen der erste das Rechnen im allgemeinen innerhalb der dem Zwecke angemessenen Grenzen, der zweite das kaufmännische Rechnen umfasst. Jener ist, mit Voraussetzung des Rechnens der Elementarschule, eine Unterweisung im schnellen und sichern Rechnen mit Zusammenstellung aller erforderlichen Einführungen, namentlich in Betreff der Einheiten von Münze, Mass und Gewicht. In der 4. Auflage hat insbesondere die Berechnung der Wechsel und Effecten eine durchgreifende Umarbeitung, die Gold- und Silber- und die Münzrechnung, sowie die Berechnung der Contocorrente eine wesentliche Erweiterung erfahren. Die Uebungsaufgaben sind entsprechend vermehrt. Von den sogenannten Usancen sind nur jene hervorgehoben, welche der Veränderung am wenigsten unterliegen, da ein Lehrbuch es vermeiden muss sich in Einzelheiten von fraglicher Wichtigkeit zu zersplittern. H.

Ebene Geometrie für Schulen. Von Dr. Georg Recknagel, Professor für Physik und technische Mechanik, Rektor der k. Industrieschule zu Kaiserslautern. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. München 1885. Theodor Ackermann. 208 S.

Die 2. Auflage ist im 239. litt. Ber. S. 32 besprochen. In der Vorrede zur dritten entschuldigt der Verfasser durch vorzeitigen Druck der ersten Bogen, dass der angefochtene Beweis für den ˙ rallelensatz seine Correction im Texte noch nicht erhalten ha

befriedigende Erklärung über den Sachverhalt und räumt die Notwendigkeit eines Axioms als Ausdruck der specifischen Eigenschaft der Ebene ein. Befriedigend ist die Erklärung, sofern es sich nur um den vorliegenden Fall handelt; im Interesse allgemeiner exacter Logik möchte noch einiges hinzuzufügen sein. Hat sich gezeigt, dass eine Schlussweise bei weiterer Anwendung zu falschem Resultate führt, so ist sie auch von vornherein nicht evident; es kann dann nicht genügen ihr fernerhin zu misstrauen, sondern es ist, zur Erhaltung wissenschaftlicher Competenz, geboten den begangenen Fehler der Schlussweise zu enthüllen. Im vorliegenden Falle liegt der Irrtum auf der Hand und ist im citirten Berichte kurz ausgesprochen. Winkelebenen und Parallelstreifen sind keine Grössen, wiewol sie in mancher Beziehung den Grössen analog sind. Anwendung von Sätzen über Grössen auf jene Begriffe sind also Analogieschlüsse, womit bekanntlich logische Fehler bezeichnet werden. Die Analogie kann dazu dienen Gesetze aufzufinden, aber nicht zu beweisen. Die Fassung jener Stelle der Vorrede scheint den Anspruch zu enthalten, als solle ein unzureichender Beweis solange für bündig gelten, bis eine falsche Consequenz der Schlussweise entdeckt sei.

Ein zweiter im citirten Berichte erhobener Einwand ist insofern berücksichtigt, als für einen unzureichenden Beweis die als notwendig anerkannte Ergänzung gesucht ist. Der zu beweisende Satz heisst: Man kann die Seitenzahl eines eingeschriebenen Vielecks so vergrössern, dass sich dessen Umfang der Kreislinie als Grenze nähert. Dass derselbe nicht bewiesen werden kann, lässt sich im voraus ersehen, weil die Länge einer krummen Linie keine definirte Grösse ist. Wir wissen nur, dass sie grösser als die Sehne ist, von der Differenz beider aber gar nichts. Der angebliche Beweis beginnt: „Nehmen wir an, es gebe einen grössten Umfang, dem man sich durch Vermehrung der Seitenzahl beliebig nähert.“ Diese Annahme ist dunkel ausgedrückt, jedenfalls ist es eine Annahme, keine Behauptung. Auf dieser Annahme basirt alles folgende und so auch der Schluss auf die Richtigkeit der Thesis. Formell ist also gar kein Beweis beigebracht. Man könnte nun noch fragen, ob die Richtigkeit der Annahme sich begründen lässt. Zunächst ist es strenge Consequenz, dass, wenn der Umfang des eingeschriebenen Vielecks wächst, während er doch immer kleiner bleibt als der Kreis, ein Grenzwert des Umfangs existirt. Da hierzu die Differenz des Umfangs und ihres Grenzwerts bestimmend ist, so ist letzterer als Gerade zu denken. Dass diese Gerade nicht gleich dem Umfang eines inneren Vielecks sein kann, ist aus dem Vorhergehenden klar. Was also „grösster Umfang“ genannt wird, könnte nur eine krumme Linie

sein. Unter welchen Linien jener Umfang die grösste sein soll, ist schlechterdings nicht zu verstehen; vielleicht ist es ein müssiges Beiwort zur Benennung, oder vielleicht soll auch damit angedeutet sein, dass die Linie alle eingeschriebenen Vielecke umspannt. Dass nun irgend eine krumme Linie, die obigen Grenzwert darstellt, im letzteren Sinne existirt, ist völlig unbegründet; denn es gibt unendlich viele geschlossene krumme Linien von jeder gegebenen Länge, die ganz oder zum Teil im Innern der Vielecke liegen. Ist nun aus Vorstehendem ersichtlich, das die vorliegende Betrachtung nicht zum Ziele führen kann, so handelt es sich um einen Correctionsvorschlag. Wir lassen den Lehrsatz als Lehrsatz stehen, müssen dann natürlich voraussetzen, dass die Schüler fähig sind den Sinn zu begreifen Zuerst werde bewiesen, dass bei fortwährender Vermehrung und Verkürzung der Seiten, der Umfang des eingeschriebenen Vielecks sich einer bestimmten Länge als Grenze nähert (was ja hier ohne Ausführung als deutlich betrachtet wird); dann, dass diese Grenze bei jedem Wege der Annäherung dieselbe ist. Letzteres kann leicht geschehen, indem man aus einem n eck der einen Construction und einem m eck der andern durch Verbindung der nächstliegenden Ecken ein $(m+n)$eck bildet, dessen Umfang dann als gemeinsame Fortsetzung beider Annäherungswege erscheint. Nachdem beides bewiesen, definire man die Länge des Kreises als diese (einheitliche) Grenze. Dann ist der Beweis des anfänglichen Satzes vollständig.

Vermehrt ist die Auflage um einige neue Aufgaben im Anhang.

H.

Leitfaden für den Unterricht in der Planimetrie bearbeitet von Dr. K. Uth, Prorektor am Königl. Realgymnasium in Wiesbaden. Mit vielen in den Text gedruckten Figuren. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Cassel und Berlin 1886. Theodor Fischer. 111 S.

Das Lehrbuch ist zunächst für das Kasseler Gymnasium bestimmt; es ward ein neues bearbeitet, weil unter den Lehrern der Mathematik keine Einigung über die Auswahl eines der vorhandenen erzielt werden konnte. Als obersten Gesichtspunkt stellt der Verfasser den logischen Zusammenhang der Sätze auf. Obwol er hier nur von der Einteilung und Anordnung spricht, so lässt sich auch auf Begriffsbestimmung und Deductionsweise davon Anwendung machen. Es ist anzuerkennen, dass sich das Lehrbuch von den meisten traditionellen logischen Mängeln frei erhalten hat. Doch stösst man auch ausnahmsweise auf unerhörte Behauptungen, z. B. ein mathematischer Punkt lasse sich nicht als be- teil

lässt sich doch kein Körper als bewegt denken, ohne dass seine Punkte sich bewegen. Zur Erklärung des Winkels sind die Elemente vollständig gegeben: Darstellung der Richtung — ein Strahl, Darstellung des Richtungsunterschieds — Winkel d. i. Figur bestehend aus 2 Strahlen, Grössenvergleichung der Winkel — durch Deckung, nebenbei Veranschaulichung durch Drehung eines Strahls. Die Zusammenstellung dieser Elemente lässt Deutlichkeit vermissen. Soll der Winkel den Richtungsunterschied oder der Richtungsunterschied den Winkel erklären? Das bleibt nach den Worten des Buches, welches nur eins zum Prädicat des andern macht, fraglich. Die darauf folgende Anwendung deutet auf die letztere, falsche Meinung und verleitet zur Unklarheit. Da Richtungen keine Grössen sind, sich also nicht subtrahiren lassen, so ist der Richtungsunterschied das, was Erklärung fordert, die Winkelfigur das Mittel, wodurch wir die qualitative Verschiedenheit der Richtungen quantitativ fixiren. Der Vortrag im Buche wendet sich mehr und mehr zur Verkehrung der Sache und lässt es scheinen, als begründete der Richtungsunterschied den Begriff des Winkels. Nachdem er den Schüler hinreichend confus gemacht hat, um vor dessen logischer Aufmerksamkeit sicher zu sein, tritt er plötzlich mit einem recht kurzen, einfachen Scheinbeweise für den Parallelensatz auf, worin er das anfängliche Kriterium der Gleichheit und Ungleichheit der Winkel fallen lässt und ein neues unterschiebt, das erst auf Grund des Parallelensatzes dem erstern äquivalent sein kann. Wo die wissenschaftliche Wahrheit bei Seite gesetzt, die mathematische Dialektik zur Taschenspielerei gemacht wird, brauchen wir vom Uebrigen nicht zu reden. Ein solches Buch gehört nicht in den Schulunterricht. Wäre der Verfasser selbst durch seinen Trugschluss getäuscht worden und hätte seiner Ueberzeugung gemäss geschrieben, so wusste er doch, dass ausser ihm niemand den Parallelensatz beweisen kann, und würde gewiss nicht unterlassen haben seine Entdeckung dem gelehrten Publicum vorzulegen. Hoppe.

Die Grundlehren der ebenen Geometrie. Von A. Stegmann. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage, herausgegeben von J. Lengauer, Studienlehrer am k. Ludwigsgymnasium zu München. Kempten 1886. Jos. Kösel. 217 S.

Die 2. Auflage ist im 231. litt. Bericht, S. 30 besprochen. Die daselbst bemerkten Fehler sind in der gegenwärtigen Auflage mit einer Ausnahme berichtigt, das Lehrbuch erscheint, davon abgesehen, jetzt tadellos correct. Nur im 266. Lehrsatz bleibt der Rüge ungeachtet die zweite Thesis stillschweigend unbewiesen, wird aber im folgenden angewandt. Es ist klar, dass hier ein Grundsatz, als Ver-

treter der Definition der Kreislänge, oder eben diese Definition selbst unumgänglich notwendig ist. Ausser den mehrfachen Berichtigungen unterscheidet sich die 3. Auflage von den frühern durch eine kürzere Fassung der Beweise und durch eine reichhaltige Sammlung von Uebungen. Diese bestehen aus Rechnungsaufgaben, zu beweisenden Lehrsätzen und Constructionsaufgaben. H.

Ebene Trigonometrie zum Gebrauche an Landwirtschaftsschulen, höheren Bürgerschulen und ähnlich organisirten Anstalten, sowie auch zur Selbstbelehrung. Von Dr. A. Grosse-Bohle, ordentlichem Lehrer an der Landwirtschaftsschule zu Lüdinghausen. Mit 50 in den Text gedruckten Abbildungen. Freiburg i. Br. 1885. Herder. 55 S.

Das Lehrbuch zeichnet sich durch Ausführlichkeit aus, befriedigt in Betreff der Leichtfasslichkeit, guten Ordnung und Uebersichtlichkeit, zeigt aber nicht die gehörige Umsicht in der Bearbeitung, sofern darin manches Notwendige vergessen ist. Das Fehlende braucht nur genannt zu werden um es mit Leichtigkeit zu ergänzen. Der Begriff einer Function — nämlich einer eindeutigen Function einer einzigen Veränderlichen, wie sie ja in der Trigonometrie allein vorkommt — ist erklärt, aber unvollständig, denn bei der wiederholt ausgesprochenen Bedingung gleichzeitiger Veränderung fehlt jedesmal die, dass die Function durch ihr Argument bestimmt sein muss. Verändert sich z. B. eine Seite eines Dreiecks mit ihrem Gegenwinkel, so ist sie doch nicht dessen Function, weil sie nicht durch ihn bestimmt ist. Erst bei der Anwendung wird einmal diese Bedingung hinzugefügt, das geschieht dann unberechtigterweise, wenn es in der Erklärung gefehlt hat. Ferner wird sehr ausführlich der Variationssinn der trigonometrischen Functionen im ganzen und im einzelnen erörtert; obwol sich aber hieran die Erklärung der unendlichen Werte auf ganz leichte und natürliche Weise angeschlossen hätte, werden die symbolisch als Werte eingeführten Zeichen ∞ und $-\infty$ ohne alle Erklärung aufgestellt. Ferner ist die Erweiterung der Functionen über den Quadranten hinaus und das Gesetz der Vorzeichen eingehend besprochen, dagegen bei den Quadratwurzelausdrücken gar keine Rücksicht darauf genommen, das Doppelvorzeichen einfach weggelassen. Hier genügte eine blosse Hinweisung auf das Gesetz der Vorzeichen, um in der Formel nur die absoluten Werte beachten zu dürfen. Anders aber ist es bei den Additionsformeln; deren Allgemeingültigkeit muss bewiesen werden, und das ist nicht geschehen. Vorgenannte vier Mängel werden hoffentlich in einer neuen Auflage ergänzt werden; dann würde das Buch in jeder Hinsicht empfehlenswert sein.

**

Die ebene Trigonometrie und die sphärischen Grundformeln. Von Dr. Julius Petersen, Docent an der polytechnischen Schule zu Kopenhagen, Mitglied der königlich dänischen Akademie der Wissenschaften. Ins Deutsche übersetzt unter Mitwirkung des Verfassers von Dr. R. von Fischer-Benzon, Oberlehrer am Gymnasium in Kiel. Kopenhagen 1885. Andr. Fred. Höst u. Sohn. 67 S.

Lehrbuch der Stereometrie. Von Dr. Julius Petersen, etc. wie oben — 94 S.

Der Anfang des erstern Lehrbuch macht durch Gründlichkeit den Eindruck, als ob es gelte die Basis einer analytischen Theorie zu legen. Es geht der Trigonometrie vorbereitend voraus die Lehre von der Addition der Strecken (auf der reellen Axe) und von der Winkelmessung und Winkeladdition. In der Tat bildet die Trigonometrie einen Uebergang zur Analysis, und es ist nicht zu bestreiten, dass die Orientirung in beiden genannten Gegenständen zur Vertrautheit mit der Trigonometrie und ihrer geschickten Handhabung notwendig ist. Auch wollen wir die Wahl des Verfassers jene Lehren besonders voranzustellen als berechtigt und auf gutem Grunde beruhend anerkennen. Wollte man aber darüber hinaus den Schluss ziehen, es sei ein Mangel der gewöhnlichen Lehrbücher, dass sie nicht ein gleiches tun, so ist an folgendes zu erinnern. Jene zwei Lehren geben ein Ideenbereich von geringem Umfange, mit dem ein Schüler auch im eigentlichen Cursus leicht vertraut werden kann. Erwägt man überdies, dass es sich empfiehlt, den Zweck jeder Einführung sobald als möglich sehen zu lassen, so ergeben sich auch hinreichende pädagogische Gründe gegen die Aussonderung. Unabhängig von dieser Frage ist noch eine Ausstellung an der gegenwärtigen Anordnung zu machen. Die Lehre von der Winkelmessung beginnt mit Festsetzung der Einheit. Dies mag dem Bedürfniss des gelehrten Forschers entsprechen; dem des Anfängers entspricht es nicht, weil es den psychischen Erkenntnissgang geradezu umkehrt. Es wird ihm eine irrationale Reductionszahl geboten, die er vor der Hand unmotivirt hinnehmen muss, in dem Glauben, dass der Weg des Verständnisses über diese Reduction hin führte, was gar nicht der Fall ist. Er weiss nämlich aus der elementaren Kreislehre, dass der Centriwinkel dem Bogen proportional ist. Daran schliesst sich die Festsetzung: der Winkel als Zahl soll dem Kreisbogen vom Radius 1, auf dem er als Centriwinkel steht, gleich sein. Die Reductionszahl der Winkeleinheit kann er dann, wo nötig, daraus leicht berechnen. Da diese jedoch nur in transcendenten Gleichungen und unendlichen Reihen, nicht hingegen in der eigentlichen Trigonometrie vorkommt, so ist sie nur eine abgezweigte Folge eines einfachen, leicht verständ-

lichen Zusammenhangs; es ist unnatürlich und erschwerend sie anders als dem wirklichen Ideengang gemäss einzuführen.

Die Behandlung der Trigonometrie selbst beschränkt sich nicht auf die Principien, d. h. notwendigen Grundlagen und Elementaraufgaben, sondern charakterisirt sich durch reichste Entfaltung der aus der Trigonometrie hervorgehenden Fähigkeiten und durch Uebungen, welche die vielseitigste Praxis im Auge haben.

Das Lehrbuch der Stereometrie hat mit den gewöhnlichen nur die oberste Einteilung gemein: Lage von Geraden, Ebenen und Kugeln; die körperliche Ecke; Polyeder und runde Körper u. zw. Prismen und Cylinder, Pyramide und Kegel, Kugel, reguläre Polyeder. Hier ist zu bemerken, dass die eben- und krummflächigen Gebilde nicht wie gewöhnlich getrennt werden. Dann aber folgen einige dem gegenwärtigen Lehrbuche eigentümliche Abschnitte: Congruenz, Symmetrie und Aehnlichkeit; Oberfläche; Volumen; Kegelschnitte. Charakteristisch ist besonders, dass nirgends eine systematische Erschöpfung der einzelnen Themata angestrebt wird, dass vielmehr der Lehrgang stets in schnellem Schritte auf die Sätze von grösster Bedeutung nach einfacher Deductionsmethode ausgeht und damit abschliesst, ohne einen Einblick zu gewähren, ob mit diesen Sätzen alle elementaren Fragen erledigt sind. Die Lehre von den Kegelschnitten beginnt mit Deduction der Focaleigenschaften nach bekannter Methode aus dem ebenen Schnitte des geraden Kegels. Uebungen, an Zahl zusammen 85, folgen auf einige Abschnitte. H.

Leitfaden der Stereometrie nebst 134 Uebungsaufgaben. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten bearbeitet von Dr. E. Wrobel, Gymnasiallehrer in Rostock. Rostock 1886. Wilh. Werther. 102 S.

Es ist zu bemerken und anzuerkennen, dass Vollständigkeit in den Principien zum Ziele der Bearbeitung genommen sind, und mag in dieser Hinsicht als Beispiel genannt werden, dass der principiell so wichtige, und doch so häufig ohne Beachtung in den Elementen übergangene stereometrische Pythagoräer hier nicht fehlt. Auch zeugt die sichtliche Systematik und der Connex der Sätze von Sorgfalt. Die Beweise sind meistens in extenso gegeben, nur selten abgekürzt. Doch darf man zu den gerechtfertigten Abkürzungen gewiss nicht rechnen die Anwendung unzureichender Gründe in den Beweisen, die bisweilen vorkommen. So ist im Beweise zum Lehrsatz 2. voreilig behauptet, dass 2 Gerade auf verschiedenen Ebenen verschieden sein müssten, im Beweise zum Euler'schen Polyedersatz von $m > n$ auf $m = n+1$ geschlossen. Die Berichtigung dieser Fehler würde einige

Worte mehr erfordern, aber keine Schwierigkeit machen. Der Verfasser betont im Vorwort, dass er der Körperberechnung den Cavalieri'schen Satz als Grundsatz untergelegt hat, ein Verfahren das mit Nutzen für Orientirung auch von andern Lehrbüchern befolgt wird. Die Anordnung des Ganzen ist die gewöhnliche. Die Figuren stehen weiss auf schwarz im Texte. H.

Die Physik in elementar-mathematischer Behandlung. Ein Leitfaden zum Gebrauche an höheren Lehranstalten. Von Dr. E. Wrobel, Gymnasiallehrer in Rostock. I. Die Mechanik. (Statik fester Körper. Dynamik fester Körper. Statik und Dynamik der Flüssigkeiten und Gase.) Rostock 1885. Wilh. Werther. 317 S.

Im Jahr 1879 erschien ein Buch von nahezu gleichem Titel von demselben Verfasser und ist im 255. litt. Bericht S. 30 besprochen worden. Gleichwol ist das gegenwärtige nicht als 2. Auflage des erstern bezeichnet, und keine Aeusserung des Vorworts erwähnt dasselbe, während doch die Aussage, die Mechanik der Flüssigkeiten und Gase sei „nunmehr als 3. Teil hinzugekommen" indirect etwas verrät, zu dem es hinzugekommen sein muss. Es genüge zu constatiren, dass das neue Buch noch dieselben Irrlehren vorträgt wie das alte (z. B. die Behauptung: eine Kraft allein könne nur eine geradlinige Bewegung bewirken). Die neuen Teile sind nicht besser; in der Hydrostatik wird behauptet, ein eingetauchter Körper verliere einen Teil seines Gewichts. H.

Anfangsgründe der Mechanik fester Körper mit vielen Uebungsaufgaben zum Schulgebrauche an Gymnasien und verwandten Lehranstalten. Von Dr. Joh. Chr. Walberer, Professor am königlichen Gymnasium in Amberg. Fünfte, durchgesehene Auflage. München 1885. Theodor Ackermann. 166 S.

Die 2. Auflage ist im 228. litt. Bericht S. 34, die 4te im 241. l. B. S. 43 besprochen. In der gegenwärtigen sind die daselbst gerügten Fehler berichtigt, sonstige Veränderungen nicht angezeigt.

H.

Sammlungen.

Planimetrische Konstruktionsaufgaben nebst Anleitung zu deren Lösung für höhere Schulen. Methodisch bearbeitet von E. R. Müller. Oldenburg 1886. Gerhard Stalling. 66 S.

Es sind Strecken und Winkel gegeben als Bestimmungsstücke für Dreiecke, Vierecke, Kreise, geometrische Oerter, die zu zeichnen, und deren Construction zu beschreiben ist. Im 2. Hauptabschnitte kommen Verhältnisse vor. Voraus gehen die Fundamentalaufgaben.

H.

Sammlung geometrischer Konstructions-Aufgaben zum Gebrauch an Seminarien sowie zum Selbstunterricht. Von B. Wiese und W. Lichtblau, Königlichen Seminarlehrern. Mit 145 in den Text gedruckten Holzschnitten. Hannover 1885. Carl Meyer. 220 S.

Die Aufgaben nebst Anleitung zur Lösung sind darauf berechnet) dass der Seminarist sich ohne Hülfe eines Lehrers mit der Schulgeometrie im gehörigen Umfange vollständig vertraut machen könne. Sie sind daher in grösster Vielseitigkeit gewählt und in 26 Para, graphen nach den Arten und Thematen übersichtlich geordnet.

H.

Rechenbuch für Gymnasien, Realgymnasien, Ober-Realschulen, Realschulen, höhere Bürgerschulen, Seminare etc Von Christ. Harms, Professor an der Ober-Realschule in Oldenburg, und Dr. Alb. Kallius, Professor am Königstädtischen Gymnasium in Berlin. Zwölfte Auflage. Oldenburg 1885. Gerhard Stalling. 262 S.

Die 6. Auflage ist im 251. litt. Bericht S. 36 aufgeführt. Die etzige ist durch Substitution neuen Textes für eine Stelle, die neuen Gesetzes wegen ausfallen musste, den frühern Auflagen conform gemacht worden. H.

Tabellen.

Zinseszins- und Rentenrechnungs-Tabellen. Verfasst von Pachmeyer, Hauptmann a. D. Würzburg 1885. J. Staudinger. 41 S.

Das Buch enthält 3 Tabellen. Das anfängliche Capital ist $= 1$. Das eine Entree gibt die Jahre von 1 bis 100, das zweite die Procente $\frac{n}{4}$ von $n = 1$ bis 20, die erste Tabelle das wachsende Capital bei Zinseszins, die zweite bei jährlichem Zuschuss von 1, die dritte das Capital dividirt durch die jährliche Rente, sämtlich auf 5 Ziffern. Voraus geht die Anweisung zur Rechnung. H.

Vermischte Schriften.

Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas publicado pelo Dr. F. Gomes Teixeira, Professor na Escola Polytechnica do Porto, Antigo Professor na Universidade de Coimbra, Socio da Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc. Vol. VI. Coimbra 1885.

Der 6. Band enthält folgende Abhandlungen und Noten.

M. d'Ocagne: Ueber eine Polartransformation der ebenen Curven. — Studie der Streckengeometrie.

J. d'Almeida Lima: Ueber eine Curve 3. Grades.

E. Cesàro: Arithmetische Bemerkungen.

R. Ferreira dos Sanctos: Ueber den Wechsel der unabhängigen Variabeln.

F. Gomes Teixeira: Einleitung in die Theorie der Functionen. — Nekrolog J. A. Martins da Silva, geb. d. 22. Aug. 1858, gest. d. 12. Nov. 1885.

Ch. Hermite: Ueber die Legendre'schen Polynome.

R. Guimarães: Anwendung der Cykloide zur graphischen Lösung einiger geometrischen Aufgaben.

H. da Fonseca Barros: Note über die elementare Anwendung des Parallelepipeds.

A. Schiappa Monteiro: Untersuchungen bezüglich auf den variabeln Kreis, welcher 2 gegebene Kreise unter gegebenen Winkeln schneidet.

J. A. Martins da Silva: Ueber 3 von Lipschitz in der Theorie der elliptischen Functionen gegebene Differentialrelationen.

L. Woodhouse: Fundamentalprincip der Theorie der algebraischen Gleichungen.

H. le Pont: Neuer Beweis der Sätze von Pascal und Brianchon. — Geometrische Note.

J. M. Rodrigues: Ueber eine periodische Gleichung.

H.

Annuaire de l'Observatoire de Montsouris pour 1886. Paris, Gauthier-Villars.

Outre les renseignements pratiques qu'il contient chaque année, il contient un résumé des observations faites depuis 1873, de nombreuses applications de la Météorologie à la culture du froment et de la vigne, des tableaux indiquant l'influence de la Climatologie sur la mortalité, un très curieux Chapitre donnant les résultats des analyses chimiques de l'air et de l'eau, enfin un Mémoire sur les microbes de l'atmosphère de Paris, sur les bactéries de l'eau de pluie et des atmosphères confinées des navires, etc. (In-18 de 600 pages, avec planches en couleurs, figures et diagrammes, 2 fr.)

Gauthier-Villars.

Mathematische Preisaufgabe

der

Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft

für das Jahr 1889.

Obgleich durch die Untersuchungen von Borchardt über das arithmetisch-geometrische Mittel ein gewisser Zusammenhang der Thetafunctionen mehrerer Variabeln mit mehrfachen Integralen nachgewiesen worden, und obgleich die Ausdehnung des Abel'schen Theorems auf vielfache algebraische Integrale schon Jacobi nicht unbekannt war*), so scheinen doch selbst die betreffenden Doppelintegrale noch keiner erschöpfenden Betrachtung unterworfen worden zu sein. Da sich nun zeigen lässt, dass wenn z. B. $\vartheta\ \vartheta_1\ \vartheta_2\ \vartheta_3\ \vartheta_4\ \vartheta_5$ gewisse einer sogenannten Rosenhain'schen Gruppe (Crelle's Journal Bd. XL, S. 342) angehörige Thetafunctionen zweier Variabeln u und v bedeuten, die Determinante

$$\begin{vmatrix} \vartheta & \vartheta_1 & \vartheta_2 \\ \frac{\partial\vartheta}{\partial u} & \frac{\partial\vartheta_1}{\partial u} & \frac{\partial\vartheta_2}{\partial u} \\ \frac{\partial\vartheta}{\partial v} & \frac{\partial\vartheta_1}{\partial v} & \frac{\partial\vartheta_2}{\partial v} \end{vmatrix}$$

---

*) Siehe Crelle's Journal Bd. VIII, S. 415, sowie Rosenhain in seinen an Jacobi gerichteten Briefen, Crelle Journal Bd. XL, wo auch Integrale von der Form $\int\int \frac{dt\,du}{\sqrt{F(tu)}}$ betrachtet werden, in denen $F(tu)$ das Product von sechs linearen Factoren $A + Bt + Cu$ ist. Vergl. ferner die Nöther'schen Arbeiten in den Göttinger Nachrichten, 1869 Nr. 15 und Bd. II der Mathemat. Annalen, S. 293.

dem Product $\vartheta_3\,\vartheta_4\,\vartheta_5$ proportional ist, so ergibt sich daraus (Leipziger Berichte 1884, S. 187) für $x=\left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta}\right)^2$, $y=\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta}\right)^2$ eine Gleichung von der Form $du\,dv=\frac{dx\,dy}{\sqrt{R(\overset{4}{x}\overset{4}{y})}}$. Die Gesellschaft wünscht

eine eingehende Untersuchung der allgemeineren Doppelintegrale von der Form $\int\int\frac{f(xy)\,dx\,dy}{\sqrt{R(xy)}}$, wo f eine rationale Function sei, in ihrem Zusammenhange mit den Thetafunctionen zweier Variabeln

Preis 1000 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besonderen Falle ausdrücklich den Gebrauch einer anderen Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und paginirt, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Couvert begleitet sein, das auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres, und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft (für das Jahr 1886 Geheimer Rath Professor Dr. Wilhelm Roscher, An der 1. Bürgerschule 4) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht. Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigentum der Gesellschaft.

W. Roscher, Präses.
W. Hankel. A. Leskien. R. Leuckart. H. Lipsius. W. Scheibner.
G. Voigt. F. Zarncke. F. Zirkel.

Leipzig, im März 1886.

Litterarischer Bericht
XIV.

Methode und Principien.

Aufruf zur Begründung eines „Deutschen Einheitsschulvereins".

Der Aufruf ladet zu einer constituirenden Versammlung in Hannover am 5. October d. J. ein und ist von 12 Universitätslehrern und 15 Directoren, Gymnasial- und Realschullehrern unterzeichnet. Der Verein nimmt zum Ziele, dass an Stelle des Gymnasiums und Realgymnasiums die Einheitsschule trete, „welche sich den Kern der alten humanistisch-gymnasialen Bildung, das Studium der classischen Sprachen, besonders auch des Griechischen, und der historischen Wissenschaften, bewahrt, dieselbe aber durch zeitgemässe Reform der Methode (namentlich des fremdsprachlichen Unterrichts), sowie auch durch eine massvolle Verstärkung der neueren Sprachen, vornehmlich des Französischen, und der mathematisch naturwissenschaftlichen Lehrfächer neu kräftigt und verjüngt." Sie soll also für alle höhere Bildung die gemeinsame Grundlage geben und nur der Stufe nach unterschieden die andern Vorbildungsanstalten, die Mittelschule mit zwei fremden Sprachen und die Volksschule ohne solche neben sich haben.

Der Gedanke, von der Scheidung der Gymnasien und Realschulen zur Einheitsschule zurückzukehren ist hier nicht zum erstenmal angeregt und besprochen. Auch bieten Beobachtung und Ueberlegung Grund und Anlass genug ihn in Betracht zu ziehen. Erstens hat der anfängliche Plan der Errichtung von Realschulen die Scheidung weit principieller aufgefasst als ihre spätere Gestaltung. Concessionen von beiden Seiten führten zu einer Annäherung, deren Grenze bloss durch Opportunität gegeben war; ein ideelles Ziel war nicht erreicht, überhaupt nicht abzusehen: als solches konnte daher nur die Wieder-

vereinigung erscheinen. Zweitens ist es wol anerkannter pädagogischer Grundsatz, wo möglich die natürlichen Anlagen unabhängig vom späteren Berufe zur reifen Entwickelung zu bringen. Die Scheidung der fundamentalen Unterrichtsanstalten greift der Wahl des Berufs vor. Aus diesem Gesichtspunkt stellt sich die Einheit des fundamentalen Unterrichts als die normale Anordnung dar; es müssen specielle Gründe vorliegen, ehe man davon abweicht.

Dem gegenüber tritt ein anderer Plan auf, welcher den genannten als überflüssig erscheinen lassen will. Man fordert einen gemeinsamen Unterricht für alle Volksclassen mit Abschluss in drei Stufen, derart, dass die Mittelschule auf dem Standpunkte beginnt, der in der Volksschule erreicht wird; nach Vollendung des Cursus der Mittelschule soll dann der Schüler die Wahl haben zum Gymnasium oder zur Realschule überzugehen. Das Für und Wider zu erörtern würde ein nutzloser Abschweif vom vorliegenden Thema sein. Jedenfalls steht sichtlich soviel entgegen, dass der Plan nicht in naher Zukunft in Angriff genommen wird. Nur das berührt das Gegenwärtige, dass die zweite Idee weit entfernt ist, den Kern der ersten in sich aufzunehmen. Im Gegenteil wird durch sie die principiell zugrunde liegende Hauptforderung, dass der Schulunterricht im ganzen Umfang des Gymnasiums der fundamentalen Gesamtbildung gewidmet sein soll, ignorirt und beiseite geschoben. Denn der letztere Plan schliesst die fundamentale Ausbildung mit der Mittelschule ab und macht die bisherigen obern Gymnasialclassen zur Fachschule neben der Realschule.

Zur Beurteilung des vorliegenden Projects wird es nicht nötig sein alle erforderlichen Fragen zu besprechen, weil dies wol schon reichlich geschehen ist. Einige Punkte jedoch pflegen dabei übersehen zu werden, und solche mögen hier hervorgehoben sein. Zunächst ist es die Frage nach den zulässigen Beschränkungen der Pensa ohne Beeinträchtigung des Unterrichtszweckes, deren Notwendigkeit allgemein einleuchtet, wenn die Schule die Real- und humane Bildung im gehörigen Masse umfassen soll. In Betreff der Mathematik ist diese Frage von J. K. Becker ausführlich in einer Schrift behandelt. Hierin werden jedoch manche Unterrichtsgegenstände für unerlässlich erklärt, bloss weil deren Kenntniss für gewisse Berufszweige erforderlich sei. Mehr als in irgend einer andern Wissenschaft kann man wol in der Mathematik vom fundamentalen Unterricht verlangen, dass der Schüler diejenige Selbständigkeit und Fähigkeit zu eigner Controle gewinne, vermöge deren er sich die durch den Beruf geforderten Kenntnisse selbst verschaffen kann. Wollte man daran festhalten, dass alle besonderen Kenntnisse nur

die materiellen Träger der allgemeinen Geistesentwickelung sein sollen, so würden die mannichfaltigen Ansprüche an Aufnahme einzelner Gegenstände in den Lehrcursus einer einfachern Würdigung unterliegen.

Der Idee der Einheitsschule liegt nun die Voraussetzung zugrunde, dass jeder Unterricht, der unter den verschieden veranlagten Geistern von der einen Classe auf ihrem Entwickelungsgang nicht entbehrt werden kann, für alle übrigen mindesten förderlich ist, und dass, wenn überhaupt eine höhere Ausbildung beabsichtigt wird, dies Verhältniss nicht auf einer Mittelstufe seine Geltung verliert, sondern bis zu Ende bestehen bleibt. Die Vertreter der Idee müssen dartun, dass die Mathematik bis zur höchsten geforderten Stufe auch dem Philologen, die Kenntniss der alten Sprachen auch dem Mathematiker nützlich sei, u. s. w. Zu dem, was hierüber viel gesagt worden ist, mögen nur zwei Punkte als Ergänzung treten, von denen nicht die Rede zu sein pflegt. Die Forderungen humaner und überhaupt höherer Bildung würden zusammenfallen, wenn man das Wesen der erstern in der historischen Auffassung des Unterrichts in allen Wissenschaften sähe, nämlich in folgendem Sinne. Für ein dynamisches Problem ist bekanntlich die momentane Lage des Massensystems zu irgend einer Zeit ein unzureichendes Datum; es muss auch der momentane Bewegungszustand gegeben sein. Dem analog würde ein Unterricht, der Begriffe und Ideen nur nach heutiger Geltung, Wörter und Formationen nur nach heutigem Gebrauch, doctrinäre Sätze nur nach heutigem Standpunkt der Doctrin mitteilte, der höhern Bildung nicht genügen; es muss auch die Kenntniss der Entstehung dieser Elemente hinzukommen. Actuell ist der Unterricht in der Geschichte Mitteilung der Vorgänge aus der ganzen Vergangenheit; sein instructives Element aber liegt darin, dass er in der Kenntniss der Entstehung der Gegenwart das richtige Verständniss der Gegenwart eröffnet. Eine Frage kann es noch sein, wenn letzteres der Zweck ist, ob, warum und wie weit wir in das Altertum zurückgreifen müssen; doch ist gerade von dieser Seite kein Zweifel laut geworden. Factisch und bewussterweise steht die heutige europäische Bildung auf dem Boden der classischen alt griechischen und römischen. Die Notwendigkeit des Erlernens der lateinischen Sprache ist durch die Bestimmung für die Realschulen I. Ordnung anerkannt. Es handelt sich um die Berechtigung der griechischen als allgemein obligatorischen Unterrichtsgegenstands. Diese ist insofern in anderm Falle, als sie nicht die Wurzel moderner Sprachen ist, wie die lateinische. Ob der vielfache Gebrauch griechischer Ausdrücke in deutscher Rede und Schrift hinreichendes Motiv sein könne das Erlernen des Griechischen allgemein zu fordern, ist erwogen worden; doch ist

dabei die Hauptsache ausser Betracht gelassen. Bei feststehenden Benennungen, von denen allein die Rede zu sein pflegt, kommt die Kenntniss der fremden Sprachen wenig oder gar nicht zustatten, um verstanden zu werden. Der bei weitem grössere Teil der zur Anwendung kommenden griechischen Elemente aber sind Bezeichnungen für Abstracta, teils ohne Definition zu augenblicklicher Verständigung, teils mit einer später kaum mehr beachteten Definition, von denen man nie vorher weiss, ob sie in Aufnahme kommen, und welchen Veränderungen ihre Bedeutung unterliegen wird. Erwägt man, dass solche Anwendungen in allen Abstufungen der Dauer von den feststehenden bis zu den momentanen beständig vorkommen, so zeigt sich, dass der Begriff eines Fremdworts in gewöhnlicher Ausdehnung unhaltbar ist: ein im Deutschen gebrauchter griechischer Ausdruck ist nicht ein deutsches Wort, das aus dem Griechischen stammt, sondern ein griechisches Wort, das Deutsche mit deutscher Flexion gebrauchen. Der Besuch des Ausländers kann uns recht angenehm sein; mit Erteilung des Bürgerrechts aber muss man sparsam verfahren. Noch gibt es wenige Gelehrte, Lehrer und wissenschaftliche Schriftsteller von Ruf, die nicht das Gymnasium besucht und griechisch gelernt hätten, daher kann man die Erfahrung nicht wol gemacht haben, welcher Verschiebung bis zur Unkenntlichkeit die griechisch benannten Begriffe ausgesetzt sein würden, wenn der blosse Usus den Wortsinn bestimmte. Von dieser Seite ist, wie es scheint, die Frage noch nicht betrachtet worden. Hoppe.

Der relative Bildungswert der philologischen und der mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsfächer der höheren Schulen. Vortrag gehalten vor der Delegirtenversammlung des deutschen Realschulmännervereins zu Dortmund am 16. April 1886 von Dr. E. Mach, Professor der Physik an der deutschen Universität zu Prag. Leipzig, 1886. G. Freytag. Prag, F. Tempsky. 29 S.

Diese Schrift steht in naher Beziehung mit der soeben besprochenen (betreffend die Einheitsschule): die Gegenstände sind dieselben, die Tendenz die entgegengesetzte. Der Verfasser will den Unterricht im Griechischen und in der Mathematik, wenigstens in den obern Classen, facultativ machen. Er führt mit klarer Beredsamkeit, unterstützt durch zahlreiche Beispiele, die Vorzüge philologischer wie mathematisch naturwissenschaftlicher Bildung vor, um mit dem Urteil zu schliessen, dass all dieser Gewinn einen sogrossen Aufwand an Zeit und Mühe nicht wert sei, wie die höhern Schulen nach jetziger Einrichtung ihn fordern. Auf Detailfragen geht er fast gar nicht ein; vielmehr behält es sein Bewenden beim Abwägen des Für und Wider unter einem Titel zusammengefasster allgemeiner Begriffe. Die

Beispiele sind gut gewählt zur Vergegenwärtigung, doch ist daraus nicht zu ersehen, was wesentlich und massgebend ist. Zwischen fundamentaler Bildung und peripherischem Wissen wird kein Unterschied gemacht. Auffälligerweise sind die Beispiele bezüglich auf Naturwissenschaften sämtlich aus dem Gebiet neuester Entdeckung und Forschung entnommen, als sollten die Schüler nur über recht vieles Interessante mitsprechen lernen, ohne dass sie mit den Elementen vertraut zu sein brauchten. Von den im vorigen Bericht hervorgehobenen Punkten ist auch hier keiner berührt, namentlich von Erzielung „historisch" wissenschaftlicher Bildung durch den höhern Unterricht nicht die Rede. Im ganzen macht die Schrift nicht den Eindruck reiflicher Ueberlegung, vielmehr scheint sie hauptsächlich darauf berechnet den Gleichgesinnten Mut zu machen.

Hoppe.

Erd- und Himmelskunde.

Ueber die Erhaltung der Sonnen-Energie. Eine Sammlung von Schriften und Discussionen von Sir William Siemens, F. R. S., D. C. L., LL. D., Ph. D., Mem. Inst. C. E. Aus dem Englischen übersetzt von C. E. Worms. Mit 6 in den Text gedruckten Holzschnitten und einer lithographirten Tafel. Berlin, 1885. Julius Springer. 156 S.

Die erste Abhandlung des Verfassers über den Gegenstand ist von 1882. Die gegenwärtige hat die in der Zwischenzeit erfolgte Bereicherung unserer Kenntnisse von der Sonnen-Physik in sich aufgenommen, die ihm in allen Stücken Bestätigung seiner Ansicht geliefert hat. Die grosse Mannichfaltigkeit der in Betracht gezogenen Gegenstände macht es uns unmöglich einen zusammenfassenden Bericht über die Ausführungen zu geben. Wir müssen uns damit begnügen das Wesen der vom Verfasser vertretenen Hypothese herauszustellen. Es handelt sich um Erklärung des Ersatzes an Energie, welche die Sonne durch Ausstrahlung in den Himmelsraum in so ungeheurem Masse beständig verlieren muss. Siemens nimmt hierzu an, dass der Himmelsraum mit wägbarem, wiewol äusserst verdünntem Stoff erfüllt ist, nennt als Constituenten Wasserdampf und Kohlensäure und betrachtet diese als die Massen, auf welche die ausgestrahlte Energie übergeht. Letztere wirkt auf deren Dissociation; vermöge der Rotation der Sonne werden dann die Stoffe vom Aequator ausgeschleudert, müssen sich den Polen nähern, werden wieder angezogen, gelangen zur Verbrennung, geben Wärme an die Sonne

zurück und fliessen wieder nach dem Aequator ab. Auf diese Weise bleibt ein Teil der ausgestrahlten Energie der Sonne erhalten. Man kann sich den Sonnenkörper so erweitert denken, dass er die circulirenden Gase mitumfasst; dann erscheinen die genannten Vorgänge als innere ohne Verlust; die nach aussen dringenden Strahlen enthalten der Hypothese zufolge die wirklich verlorene Energie. An die Abhandlung schliesst sich nun die durch sie hervorgerufene Correspondenz. Hunt stimmt den Ausführungen zu, doch scheint ihm die Dissociation der Gase unnötig. Morris äussert, dass, indem die durch Zersetzung abgekühlten Gase von den entfernteren Wärme aufnähmen und so der Sonne zuführten, ein Perpetuomobile geschaffen wäre, und findet das verdächtig, andrerseits dass durch Ausschleuderung von Stoffen die Rotation der Sonne Verlust erleiden müsste. In der Beantwortung geht Siemens etwas weiter auf Erfahrungen und Rechnung ein: der Rotationsverlust sei vorhanden, doch reducire er sich auf die Reibung der Gase. Archibald macht den Einwand, dass die Centrifugalkraft der Sonne am Aequator viel zu gering sei um Körper auszuschleudern. (In der Rechnung ist ein Fehler auffällig: $\frac{9}{20}$ Mercurs-Abstand = 16 statt $3\frac{1}{2}$ Millionen Meilen.) Siemens erwidert, dass es sich nicht um Uebersteigung der Schwerkraft, sondern um die Statik zwischen den Gasen an Aequator und Polen handele. Fitzgerald stellt 4 Einwände auf; die 3 ersten von gleicher Tendenz behaupten als Folge der Erfüllung des Raumes mit Stoffen, dass Sonne, Erde, Mond und Planeten immer mehr dieser Stoffe an sich ziehen, sich ferner die Erde immer höher mit Wasser bedecken müsste. Offenbar kann auch das Entgegengesetzte eintreten, die Atmosphäre mehr und mehr weggefegt werden. Da Siemens von freiem Sauerstoff und Stickstoff im Himmelsraume nichts sagt, wenn uns nicht etwa die Sonne durch Zersetzung des Wasserdampfs immer von neuem mit Sauerstoff (freilich auch mit Wasserstoff) versorgen soll, so wäre es wol unausbleiblich, dass Wasserdampf und Kohlensäure allmählich alle Luft verdrängt hätten. Zieht man diese Betrachtungen zu, so lautet der Einwand: Durch die stoffliche Raumerfüllung werden die Atmosphären unberechenbaren Veränderungen ausgesetzt; es bleibt zu erklären, wie die der Erde sich so äusserst constant erhalten kann. Wodurch die Regulirung geschieht, erklärt auch die Antwort von Siemens nicht. Auf den vierten Einwand, die Stoffe im Himmelsraum müssten auch das Licht der Sterne absorbiren und die entfernteren unsichtbar machen, sagt Siemens nur, einige Sterne seien auch nach Ansicht von Astronomen wirklich unsichtbar. G. B. S. macht Anwendung von der Theorie auf die Urzustände der Erde, die dann Siemens näher erläutert. Faye wendet ein, erstens dass jene Gase bei 2000facher Verdünnung noch immer der Bewegung der Erde einen zu grossen

Widerstand leisten würden, zweitens dass die Massen der Himmelskörper einen schnellen Zuwachs erfahren müssten. Siemens erwidert, dass er ausserhalb der Grenzen der Dissociation eine weit grössere Verdünnung angenommen habe, und dass in Bezug auf Ansammlung von Massen bereits Gleichgewicht eingetreten sein müsse. Hirn berechnet den Grad dieser Verdünnung und findet, dass er nicht geringer als 10^{16} sein darf. Er erinnert, dass bei Annahme einer Raumerfullung, zu der wir getrieben werden, die Eigenschaften des Erfüllenden noch dahingestellt bleiben können, und nicht gerade der Körperwelt entlehnt zu werden brauchen. Ausserdem tritt er dem schon vorgekommenen Einwand bei, dass das Licht der entfernteren Sterne vollkommen absorbirt sein müsste. Siemens stellt die Richtigkeit der Rechnung in Zweifel, verwirft jede Ueberschreitung des Materialbegriffs von Seiten der Hypothesen und zeigt die Möglichkeit, dass die Absorption des Lichtes lückenhaft sei, so dass einige sehr entfernte Sterne mit teilweise getilgtem Spectrum doch noch sichtbar werden, während Millionen anderer ungesehen existiren. Faye teilt einen Brief von Spoerer mit, worin dessen Beobachtungsresultate über die Bewegung der Sonnenflecken enthalten sind. Aus diesen geht hervor, dass keine durchgehende Bewegung von den Polen nach dem Aequator auf der Sonne stattfindet, eine Tatsache die auch der von J. Herschel adoptirten Erklärung für die Entstehung der Sonnenflecken als Wirbel aus jener Bewegungsrichtung entgegensteht. Hirn gibt Rechenschaft über seine Rechnung: die Temperatur der Sonne, von der Siemens behauptet hatte, dass sie höchstens 2000 Grad sein könne, muss weit höher sein, weil concentrirte Sonnenstrahlen Diamant entzünden und Platin schmelzen können, und durch concentrirte Strahlung nie eine Temperatur hervorgebracht werden kann, welche die der Wärmequelle übersteigt. In Betreff des berechneten Widerstands der Gase gegen die Planeten macht er geltend, dass die durch Geschosse und Meteorsteine bestätigten Gesetze auch auf die Planeten Anwendung haben müssen. Die Erwiderung von Siemens enthält nichts wesentlich entkräftendes für beide Einwände von Hirn. Dem letztern Einwand lässt sich offenbar keine Sicherheit zuschreiben, da das Widerstandsgesetz nur empirisch gewonnen, allein auf Viscosität der Gase beruhend erscheint, deren Existenz bei jenem Grade der Verdünnung durch nichts erwiesen ist. Eine hier folgende Bemerkung von Faye ist nebensächlich. Im letzten Artikel gibt Faye eine Beschreibung eines Wirbels, wie er auf der Erde bei Orkanen vorkommt, und wie er auf der Sonne als Flecken sichtbar wird, und erklärt gegen einen Einwand von Young den Umstand, dass wir von Rotation keine Spur sehen, durch die scheinbare Langsamkeit. Der Anhang enthält 3 Artikel. Abney: Sonnenlicht und diffuses Tageslicht in bedeutenden Höhen beobachtet.

Liveing: Dissociation von verdünnten Gasverbindungen. C. W. Siemens: Das Abhängigkeitsverhältniss zwischen Ausstrahlung und Temperatur. H.

Lehrbuch der Geophysik und physikalischen Geographie. Von Dr. Siegmund Günther, Professor am Gymnasium zu Ansbach. Zwei Bände. II. Band. Mit 118 in den Text gedruckten Abbildungen. Stuttgart 1885. Ferdinand Enke. 670 S.

Der erste Band ist im 4. litt. Bericht, S. 48 besprochen. Im zweiten werden folgende Gegenstände behandelt. Magnetische und elektrische Erdkräfte, und zwar Magnetismus und Elektricität in den oberflächlichen Erdschichten, Theorie, Polarlichter; Atmosphärologie, u. zw. Eigenschaften, Gestalt und Ausdehnung der Atmosphäre, Beobachtungs- und Berechnungsmethoden, meteorologische Optik, Gewitter, kosmische, dynamische Meteorologie, Klimatologie, angewandte Meteorologie; Oceanographie und oceanische Physik, u. zw. Eigenschaften des Meerwassers, Physiographie der Meeresbecken, Temperatur, Salzgehalt und chemische Zusammensetzung, Wellen, Ebbe, Flut, Strömungen, Eis des Meeres; dynamische Wechselbeziehungen zwischen Meer und Land, u. zw. Verschiebungen der Grenzlinien, Küstenbildung, Charakteristik und Classification der Inseln; das Festland mit seiner Süsswasserbedeckung, u. zw. Geogonie und Geognosie, orographischer Bau und Bodenplastik, Schnee und Eis der Hochgebirge, Gletscher, stehende und fliessende Gewässer, Morphologie der Erdoberfläche; Anhang: Biologie und physische Erdkunde in Wechselwirkung. H.

Grundlehren der mathematischen Geographie und elementaren Astronomie zum Gebrauche in höheren Mittelschulklassen und bei akademischen Vorträgen. Von Dr. Siegmund Günther, Professor am Gymnasium in Ansbach. Zweite, durchaus umgearbeitete und vermehrte Auflage. München 1886. Theodor Ackermann. 151 S.

Der Verfasser motivirt die Herausgabe (in 1. Auflage) dadurch, dass er es nötig gefunden habe „auf die unglaublich geringfügigen Kenntnisse der Lernenden" mehr Rücksicht zu nehmen, als es in den sonst vortrefflichen vorhandenen Lehrbücher geschehe. Ausserdem werde „der dem Anfänger allein naturgemässe geocentrische Standpunkt gemeiniglich allzufrüh verlassen, so dass dann natürlich auch die coppernicanische Weltanschauung nicht sowol gelehrt als vielmehr dem jugendlichen Geiste aufgezwungen" werde. Diese oberflächliche, leicht hingeworfene Aeusserung bedarf sehr der Richtigstellung. Die heutige Lehrmethode hat es nicht mit ptolomäischer und copperni-

canischer Weltanschauung zu tun, sondern mit Beobachtung und Erklärung (Theorie). Die Beobachtung oder Erscheinungsbeschreibung hat nicht den geocentrischen, sondern den skopocentrischen Standpunkt; von da geht die Erklärung auf den geocentrischen, dann heliocentrischen über. Das geschieht auch hier; was aber das Verweilen auf dem einen und andern betrifft, so kann man wol verlangen, dass auf jedem das Nötige vollständig gesagt ist, dass namentlich die Beschreibung die Erscheinung nicht verschweigt, welche hernach Gegenstand der Erklärung sein soll. Die Präcision der Angaben kann gering sein, doch darf die Ungenauigkeit nicht durch Widersprüche mit der vorgetragenen Theorie den Schüler vexiren; auch darf die Angabe nicht dem Anblick ohne Instrumente widerstreiten. Auf geringe Vorkenntnisse haben sehr viele Lehrbücher Rücksicht genommen; erste Regel ist aber jedenfalls gute Ordnung des Vortrags: man darf den Schülern nicht zumuten, dass sie sich eine Gesamtvorstellung aus vielerlei Bedingüngen und Angaben zusammensetzen. Gegen alle diese selbstverständlichen Regeln fehlt das vorliegende Lehrbuch in augenfälliger Weise. Der erste Satz: „Die Bahnen der Gestirne sind ausnahmslos kreisförmig und parallel zu einander" — sowie der zweite, widerspricht geradezu dem, was bald nachher über die Eigenbewegung folgt. Die Behauptung, die Himmelskugel drehe sich in 24 Stunden um die Weltaxe, widerlegt sich durch den blossen Anblick im Winter und Sommer. Dass die Fixsterne voreilen, der Mond zurückbleibt, ist nirgends gesagt. Aus welchen objectiven Angaben soll sich der Schüler diese unentbehrliche Kenntniss entnehmen? Was zum Verstehen nötig ist, scheint der Verfasser nicht überlegt zu haben. Im Vorwort steht die Erklärung, dass der Verfasser seine „einfachere" Ableitung des Satzes von der „Nadirflut" (der Verfasser verwechselt sich mit dem Monde!) mehrfachen Anfragen gegenüber aufrecht hält. Hiernach ist er also auf seinen Fehler aufmerksam gemacht worden, will ihn aber nicht berichtigen. Es handelt sich nicht um eine andre Ableitung eines Satzes, sondern um Erklärung einer Erscheinung. Die angebliche Erklärung der Flut auf der dem anziehenden Körper abgekehrten Seite der Erde ist gar keine: sie gibt keine Ursache an und lässt die Erscheinung als paradox stehen, der angeführte Grund aber für die Meinung, dass jene Flut kleiner sei als auf der zugekehrten Seite, würde nur die entgegengesetzte Erscheinung, geringere Ebbe oder grössere Flut erklären. Der Verfasser fährt also fort sich einer Verbreitung von Irrtümern schuldig zu machen, was in Anbetracht seiner günstigen Stellung in der Publicität um so nachdrücklicher zu rügen ist.

Hoppe.

Grundzüge der astronomischen Zeit- und Ortsbestimmung. Von Dr. W. Jordan, Professor an der technischen Hochschule zu Hannover. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Holzschnitten. Berlin, 1885. Julius Springer. 390 S.

Dies vortreffliche Buch zeichnet sich durch ausreichende Angaben im gesamten Umfange der den bezeichneten Gegenstand betreffenden Fragen aus. Es gibt Auskunft über begriffliche Festsetzung, Beobachtung, Messung und Berechnung, ohne Voraussetzung theoretischer und technischer Routine, verständlich auf Grund gewöhnlicher Schulbildung. Sein Gebrauch beschränkt sich nicht auf astronomischen Beruf. Durch Vollständigkeit und gute Ordnung eignet es sich besonders zum Nachschlagen in unzähligen vorkommenden Fällen. Der Präcisionsgrad ist auf 1 Secunde angegeben. Der „astronomischen Zeit- und Ortsbestimmung" geht voraus ein Capitel: „Allgemeine Vorbereitung der Zeit- und Ortsbestimmungs-Aufgaben". H.

Die Dämmerungserscheinungen im Jahre 1883 und ihre physikalische Erklärung. Von J. Kiessling, Professor am Johanneum zu Hamburg. Mit fünf Holzschnitten. Hamburg und Leipzig 1885. Leopold Voss. 53 S.

Das Vorliegende ist ein Auszug aus einer beabsichtigten Bearbeitung des Dämmerungsproblems. Es werden die Vorgänge der zwei vulcanischen Ausbrüche, 1831 im Meere bei Sicilien, und 1883 auf der Insel Krakatoa, dann die dem letzteren folgenden Abenddämmerungserscheinungen auf der ganzen Erde beschrieben. Die Färbung des Himmels hat ihren Grund in der Diffraction der an schwebenden Körperchen (von Asche oder Nebel) gebeugten Sonnenstrahlen, aus der ein vollständiges Farbenspectrum erzeugt wird, aber nur der am stärksten gebeugte rote Strahl unverdeckt bleibt. Bedingung der Farbenerscheinung ist, dass sich homogene Staub- oder Nebelschichten in gleicher Höhe bilden, was sich wieder daraus erklärt, dass sich die grösseren Körperchen schneller senken als die kleinern. Es werden nun 3 Phasen oder auf einander folgende Acte der Dämmerung unterschieden und beschrieben; dann wird im Anschluss daran Erklärung mit Abbildung gegeben, die indes viel an Klarheit vermissen lässt. Der Verfasser eilt von einem Gegenstande zum andern, ohne gehörige Auskunft gegeben zu haben. Der Strahl wird nur bis zum Object verfolgt, aber nicht bis zum Auge. Durch welche Reflexionen er dahin gelangen soll, mag sich Jeder selbst denken. Der rote Strahl bleibt freilich bei jeder Reflexion rot; aber Begrenzung und Deckung der verschiedenfarbigen Felder ändern sich im allgemeinen. Die Erklärung ist demnach mindestens sehr besserungs- und ergänzungsbedürftig. H.

Kalender-Tabellen. Zusammengestellt von Dr. Felix Müller, Oberlehrer am Königl. Luisengymnasium zu Berlin. Berlin 1885. Georg Reimer.

Drei Tabellen, deren jede auf 2 Octavseiten neben einander, also auf einer zugleich zu übersehenden Fläche steht, enthalten direct, ohne Rechnung abzulesen, folgende Data: die erste den Wochentag für einen beliebigen Monatstag eines beliebigen Jahres von 1 bis 2000 p. Chr.; die zweite den Monatstag von Ostern, Himmelfahrt und Pfingsten für jedes Jahr von 600 bis 1699 nach julianischem, von 1583 bis 1999 nach gregorianischem Kalender; die dritte für dieselben Jahre zuerst die Epakte, d. h. diejenige Zahl, welche das Alter des Mondes am Schlusse des Jahres in Tagen ausdrückt, oder die Anzahl der dem letzten Neumonde eines Jahres noch folgenden Jahrestage, dann für jede Epakte diejenigen Tage, an welchem annähernd Neumond stattfindet, möglicherweise um 1 Tag vom wirklichen abweichend. Voraus geht Erklärung und Gebrauchsanweisung.

H.

Astronomischer Kalender für 1885. Nach dem Muster des Karl von Littrow'schen Kalenders herausgegeben von der k. k. Sternwarte. Neue Folge. Vierter Jahrgang. Wien, Carl Gerold's Sohn. 147 S.

Die 3 ersten Jahrgänge sind im 271., 276. und 1. litt. Bericht, bzhw. S. 33, 46 und 53 besprochen. Die Beilagen des vierten enthalten einen Artikel über das Fernrohr und die regelmässigen Fortführungen der frühern Artikel. H.

Grundriss der physikalischen Geographie. Für höhere Unterrichtsanstalten bearbeitet von C. S. Cornelius. Sechste, verbesserte Auflage. Mit eingedruckten Holzschnitten. Halle a. S. 1886. H. W. Schmidt. 257 S.

Das Buch behandelt in 12 Capiteln folgende Gegenstände: Beschaffenheit der Erde im allgemeinen, Gestaltung des Festlandes, das Wasser, die Wärme, Winde, Feuchtigkeit, Luftdruck, Magnetismus der Erde, Elektricität der Atmosphäre, optische Erscheinungen, Veränderungen der Erde, Beschaffenheit der Erdrinde, Geschichte der Erdbildung — und gibt dadurch eine gute Uebersicht über die Fragen, deren Erforschung der physikalischen Geographie zunächst obliegt. H.

Die gemeinschaftliche Ursache der electrischen Meteore und des Hagels erklärt von Dr. E. Suchsland, Oberlehrer an der lateini-

schen Hauptschule der Francke'schen Stiftungen zu Halle a. S. Halle a. S. 1886. H. W. Schmidt. 59 S.

Es werden zuerst die bisherigen Erklärungsversuche geschichtlich zusammengestellt, dann folgt eine Kritik der einzelnen Gruppen, dann als Vorbereitung zur Entwickelung der eigenen Ansicht des Verfassers der Nachweis, dass die Gase mit den Metallen, also auch unter sich, in eine elektrische Spannungsreihe eintreten. Nun erklärt der Verfasser die Regenwolke für eine Reihe sich einander einhüllender voltaischer Luftelemente mit Einlage von Wassertropfen, deren elektrische Spannungen sich einander heben, aber auch unter Umständen aufsummen können, im letztern Falle die Wolke zur Gewitterwolke machen. Ist die Spannung sehr gross, so hat sie thermische Wirkung, welche die Hagelbildung erklärt. Er wendet dann die Theorie zur Erklärung bisher nicht erklärter Erscheinungen an. H.

Meteorologische Zeitschrift. Herausgegeben von der deutschen meteorologischen Gesellschaft. Redigirt von Dr. W. Köppen, Hamburg, Seewarte. Zweiter Jahrgang 1885. Berlin, A. Asher u. Co.

Der 1. Jahrgang ist im 4. litt. Bericht S. 53 besprochen.

H.

Litterarischer Bericht
XV.

Methode und Principien.

Anleitung zum mathematischen Unterricht an höheren Schulen. Herausgegeben von Dr. Fr. Reidt, Professor am Gymnasium zu Hamm. Berlin 1886. G. Grote. 252 S.

Es ist das Hauptverdienst dieser Arbeit, die grosse Anzahl didaktischer Fragen, welche der mathematische Unterricht darbietet, entfaltet und mit grosser Umsicht und Vielseitigkeit objectiv behandelt zu haben. Der Verfasser hat es für nötig befunden das Unternehmen in der Einleitung zu rechtfertigen. In der Tat steht diesem derselbe Widerwille entgegen, dem alles unbefugte Ratgeben zu begegnen pflegt. Doch war es wol nicht der richtige Stützpunkt der Motivirung, den jüngern Lehrern zu diesem Zwecke erst didaktische Mängel vorzuwerfen. Der Widerwille ist sehr natürlich, weil meistens die Ratgeber verlangen, dass man mit ihren Augen sehen soll, anstatt sich zu bemühen eine dauernde Leistung in Klarlegung der Sache zu schaffen. Viel treffender ist der nur kurz berührte Punkt, dass es selbst den fähigen Lehrern nur nützlich sein kann, sich der Gründe ihrer Erfolge bewusst zu werden. Denn je leichter jemand Erfolg findet, desto weniger bringt seine Tätigkeit jenes Bewusstsein zuwege, desto weniger competent wird er im Urteil, und desto leichter verfällt er in den Irrtum unwesentliche Accidentien, die ihm gerade eigen sind, für massgebend zu halten. Das vorliegende Buch lässt das Streben erkennen, in dem grossen empirischen Material die objectiven Haltpunkte zu gewinnen, und ein solches wird gewiss bei vielen Lehrern Interesse finden, gleichviel ob sie davon directe Anwendung machen wollen. Laut der Einleitung wird der Fortschritt vom Besondern zum Allgemeinen gewählt. Dies ist jedoch ein Vorsatz, dem schon der Titel des 1. Teils und des 1. Paragraphen widerspricht.

Die Regel ist richtig, wo die Erkenntniss ganz von vorn anfängt, und in der Rechtfertigung denkt wirklich der Verfasser nur an diesen Fall; hier, wo er zu intelligenten Fachgenossen spricht, hätte er die Entscheidung in jedem Punkte dem Bedürfnisse vorbehalten müssen. Es ist unstreitig ein Ausgehen vom Allgemeinen, dass als erste Forderung aufgestellt wird, sich den Zweck des Unterrichts klar zu machen. Dieser wird für Gymnasium und Realschule in unbeschränkter Idealität aufrecht erhalten: es sollen, ohne Rücksicht auf künftigen Beruf, Fähigkeiten entwickelt werden; alles positive Wissen, dessen Erwerbung auf der Schule gefordert wird, soll nur als Mittel dazu dienen, und mag später in Vergessenheit kommen. Dieser Grund ist anzugeben, wenn jemand fragt, warum der künftige Theolog, Jurist u. s. w. Mathematik lernen muss. Wenn gleich nachher der Verfasser seinen Satz wieder beschränkt: der Beruf habe doch Einfluss, da manches dazu erforderliche Wissen nur in früher Jugend erworben werden könne — so ist zu erinnern, dass das so bezeichnete Wissen keine Ausnahme bildet, weil es in der fundamentalen Geistesentwickelung mit begriffen ist. Mit Recht wird aber bei dieser Gelegenheit betont, dass in der Amtstätigkeit viele Fälle vorkommen, wo ein richtiges Urteil über fremde Wissenszweige von grosser Wichtigkeit ist. Das nächste Thema ist der sprachliche Ausdruck. Die Mathematik fördert dessen Präcision, während die Gewandtheit durch andre Fächer gegeben werden muss; sie duldet kein Phrasentum; bei jedem Worte muss ein Begriff sein; der Schüler ist hier in der Lage seine eignen Gedanken auszudrücken. Von der formalen Verstandesbildung als Frucht der Mathematik sagt der Verfasser, sie werde oft zu eng aufgefasst. Diese Aeusserung verrät aber, dass dieselbe überhaupt noch ein vager Begriff ist. Hier wäre es an der Stelle gewesen der eben vorhergegangenen Verurteilung des Phrasentums zu gedenken und dem Begriffe einmal die präcise Fassung zu geben. Der Verfasser erwähnt zwei Fähigkeiten, die in der formalen Verstandesbildung enthalten sein sollen: das Vermögen zu schliessen und verschiedene Wege zum Ziele zu wählen. In Bezug auf das erstere sei die Wirksamkeit des mathematischen Unterrichts übereinstimmend anerkannt. Daher scheint es ihm nicht nötig, diese Seite weiter zu beleuchten. Doch nimmt er dabei ungeprüft den vulgären Irrtum auf, als wenn die Form der Schlüsse die wunderbare Kraft hätte zu überzeugen. Hätte er die Rolle dieser Form untersucht, so würde sich ergeben haben, dass sie nichts ist als zweckmässige Ordnung der Gedanken, und hieraus das allgemeinere und besser zutreffende Resultat von grösserer Tragweite: Der Schüler lernt durch die Mathemalik Gedanken fixiren und ordnen mit dem Erfolge durch Orientirung zu überzeugen — ein Erfolg der in mathematischen Dingen gewiss und sichtlich ist, aber in vielen an-

deren nicht fehlt. In Betreff des zweiten Vermögens betont der Verfasser wol mit Unrecht die Verschiedenheit der Methoden. Es wird wol mit gutem Grunde meistens für misslich gehalten, mehr als eine Methode für einen Satz zu zeigen. Jede verliert dann, eben weil sie nicht notwendig ist, an Wert und Beachtung. Der wichtigste Punkt ist ohne Zweifel vielmehr, dass der Schüler durch Beweis und Aufgabe seiner Rede ein Ziel zu setzen gewöhnt wird, im Gegensatz zu dem zwecklosen Herumsprechen. Sehr deutlich tritt der Vorzug der Mathematik in dieser Hinsicht hervor bei der Auflösung der Gleichungen. Ausserdem wird die Anschauung (Raumsinn und Uebung des Auges) und das Gedächtniss nach ihrer Mitwirkung besprochen. Nachdem Zweck und Aufgabe des Unterrichts erörtert sind, handelt es sich um die Mittel. Unter „Methode" wird hier ebensowol die Lehrweise als auch der Lehrgang verstanden. Die Methoden werden parweise als Gegensätze hingestellt, wiewol ein ausschliessender Gegensatz aus der Darstellung nicht hervorgeht. So stellt der Verfasser als Lehrweisen die „docirende" und die „heuristische" gegenüber. Trotzdem er von letzterer behauptet, der Sinn sei aus dem Worte klar, so können wir von beiden Benennungen nur das Gegenteil aussagen: erstere bezeichnet überhaupt nichts unterscheidendes, letztere etwas andres als laut der Ausführung gemeint ist. Dociren bedeutet hier abhandeln, ohne Controle des Verständnisses, mit der blossen Forderung das Vorgetragene im Gedächtniss zu behalten. Warum Controle und Nachhülfe des Verständnisses fehlen muss, ist nicht dargetan, mithin in die Charakteristik ein accidenteller Mangel eingemischt. Die Vorführung des „heuristischen" Verfahrens gibt eine grosse Anzahl mannichfaltiger Fragen, die den Schüler zu eigner Beobachtung nötigen. Auf Hinleitung zur Entdeckung eines für die Doctrin wesentlichen Satzes ist es hier nicht abgesehen. Wären aber auch die Fragen darauf berechnet, so würde der Schüler wenigstens keinen bewussten Anteil an der Auffindung haben; daher passt auch das Attribut „heuristisch" nicht. Wollte man den Schüler zum Mitwisser des Planes der Auffindung machen, so müsste die Methode ganz in die analytische übergehen, von der nachher die Rede ist. Im Lehrgang werden synthetische und analytische Methode unterschieden, im gewöhnlichen Sinne. Die Vorzüge der letztern sind die bekannten: sie lehrt rational, stets den bewussten Zweck im Auge. In einem Punkte aber weicht der Verfasser doch sehr stark vom Gewöhnlichen ab. Es hat doch stets als unbestrittener Satz gegolten: die Schulmathematik muss synthetisch sein; auf synthetischem Wege allein kann diejenige Reife der Geistesentwickelung erreicht werden, welche den Studirenden der Mathematik für das analytische Betreiben befähigt. War der Verfasser andrer Ansicht, so durfte er doch die Gesichtspunkte, die so augenfällig zu jener Ueberzeugung führen,

nicht ignoriren. Er überspringt die weite Kluft zwischen den Standpunkten und setzt stillschweigend voraus, der Schüler wäre sofort ein Meister, sobald er die Werkstatt eines Meisters gesehen hätte. In Wirklichkeit empfindet der Schüler die Mitteilung des Warum nur als Vermehrung seiner Last, die ihm die synthetische Behandlung durch Kürze und durchschauliche Vorführung viel leichter macht, während der merkliche Gewinn mindestens ebenso gross ist. Zu dem Gesagten gab zunächst das durchgeführte Beispiel eines analytischen (im eigentlichen Sinne heuristischen) Beweises Anlass. Es gilt das gleiche, d. h. das analytische Verfahren wird sich aus dem genannten Grunde als unzweckmässig erweisen, überall wo der Plan einer besondern Erklärung bedarf. Nun gibt es aber auch Lehrgegenstände, die ihrer Natur nach den Plan an die Hand geben, vor allen die Gleichungen (1. Grades mit 1 oder mehr Unbekannten ohne Determinanten und 2. Grades), wo Zweck und Mittel in einfachster Weise vorliegen. Hier tut der Schüler bei eigner Uebung keinen Schritt ohne zu wissen, wozu. Was die Analysis der Constructionsaufgaben betrifft, so handelt es sich hier um eine Hülfe bei der Ueberlegung im Suchen nach der Lösung, nicht um eine Methode des Unterrichts. Die sogenannte analytische Geometrie für die obern Classen pflegt nichts als synthetisch betriebene Coordinatenlehre zu sein. Im Lehrgang stellt der Verfasser ferner „euklidische" und „genetische" Methode in Gegensatz. Da er aber die ganze Forderung der erstern ausdrücklich auch an die letztere stellt, nämlich die streng logische Bündigkeit, so ist der Gegensatz hinfällig; denn es kann doch kein Princip der „euklidischen" Methode sein, ohne systematische Ordnung und Gruppirung — welche die „genetische" Methode auszeichnen soll — zu Werke zu gehen. Ueberdies ist die Benennung „genetisch" zu verwerfen, welche anerkanntermassen einen andern Sinn hat, nämlich den, auch vom Verfasser nebenbei zugelassenen, dass die Bewegung der Gebilde in die Betrachtung gezogen wird. Es folgen nun besondere methodische Regeln mit Bezug auf logische Verstandesbildung, sprachlichen Ausdruck, Raumsinn. Beim ersten der 3 Themata wird die Unterschiebung der Anschauung für Beweis, dann der dialektische Betrug und dessen Verteidigung gerügt. Zu letzterer Rüge hätten die zahlreichen Lehrbücher aus neuster Zeit reichlichen Grund dargeboten; doch geschieht dessen keine Erwähnung, dass es nur wenige sind, die sich logische Ehrlichkeit zum Gesetze machen, und, was das Verfahren erst recht als Taschenspielerei charakterisirt, dass vor dem Betruge durch mangelhafte Erklärung ein Dunkel über den Begriffen erhalten zu werden pflegt, welches die Täuschung begünstigt. In Betreff des sprachlichen Ausdrucks werden eine Reihe incorrect gefasster Stellen aus Lehrbüchern aufgeführt und kritisirt. Wir sind sehr entfernt der Kritik Pedanterie

vorzuwerfen, wenn wir auch manchem Tadel tropischer Ausdrucksweise von Seiten andrer Autoren nicht beitreten, möchten aber in gleicher Form auch dem Verfasser seine Fehler vorhalten. Er wendet sehr häufig den Ausdruck „möglichste" (z. B. Kürze) an. Ist etwa eine Kürze möglicher als die andre? und wenn es bedeuten soll leichter möglich, ist die grössere Leistung an Kürze etwa leichter als die geringere? Nach seinen strengen Grundsätzen durfte doch der Verfasser an einer so ganz unlogischen vulgären Redeweise sich nicht beteiligen. Was über Bildung des Raumsinns gesagt ist, beschränkt sich auf das Figurenzeichnen an der Tafel als einzige Gelegenheit dazu. Ueber den Umfang und Begrenzung des Lehrstoffs lässt der Verfasser verschiedene Stimmen reden. Es handelt sich hier um Aufnahme der sphärischen Trigonometrie, der Kegelschnitte, der Differentialrechnung und der Determinanten in den Schulcursus. Zunächst ist zu erwähnen, dass einige von einer Kluft zwischen der Schul- und Universitätsdoctrin gesprochen haben, die sich infolge der Fortschritte der Wissenschaft erweitere, wenn die Schule nicht auch ihrerseits ihr Pensum ausdehne. Der Verfasser weist solche Zumutungen, die sich nirgends auf klare Darlegung stützen, zurück: die Schule hat nichts mit der Erweiterung der Wissenschaft zu tun; die Fundamentalbildung fordert stets dasselbe. In der Tat ist gar nicht zu ersehen, wie eine Kluft entstehen kann, wenn die Docenten nicht ohne allen Grund ihre Voraussetzungen erhöhen. Im Uebrigen hätte man wol vom Verfasser gegenüber den divergirenden Meinungen entscheidende Grundsätze erwarten dürfen. Es ist gar nicht in Betracht gezogen, dass für die mathematische Doctrin eine so deutliche Scheidung von Natur gegeben vorliegt: die vorbildende Doctrin ist synthetisch speciell, die frei wissenschaftliche analytisch und daneben synthetisch, in beiden Gestalten unter ganz neuer allgemeiner Auffassung. Der Schritt von der einen zur andern muss mit Bewusstsein getan werden; wer Mathematik lernen will, darf nicht Knecht seiner Gewohnheit sein, sondern muss seinem Verstande vertrauen. Ueber die 4 genannten Fächer entscheidet der unbestrittene pädagogische Grundsatz: was angefangen wird, muss auch imselben Cursus zu Verständniss, Vertrautheit und Uebung gelangen. Diese Bedingung erfüllen ohne Zweifel die 2 erstgenannten (die Kegelschnitte natürlich synthetisch betrieben). Es fragt sich nur, ob Zeit dazu ist. Zeit dafür zu verlangen ist bei den Kegelschnitten wol gar kein Grund; bei der sphärischen Trigonometrie spricht manches dafür. Die Differentialrechnung auf der Schule anzufangen, würde geradezu zweckwidrig sein. Sie bietet den Eingang zur Analysis und kann ohne diese nicht in ihrem Wesen begriffen werden. Dagegen gibt es eine elementare Infinitesinaltheorie, die sich für die Mittelclassen nicht nur sehr wol eignet, sondern nicht einmal eine Vermehrung

des Stoffes bilden würde, indem sie eine didaktische Verlegenheit in Betreff der incommensurabeln Verhältnisse, der Kreisrechnung und überhaupt Inhaltsrechnung mit einem Schlage beseitigt und der vulgären Unklarheit über den Infinitesinalbegiiff ein Ende macht. Auch von der Determinantentheorie gibt es einen Kreis von Sätzen, der, wenn einmal in Prima die Combinationslehre aufgenommen ist, in Verbindung damit zum reifen Abschluss gebracht werden kann. Zeit dafür zu fordern ist natürlich kein Grund. Es folgt nun noch ein Capitel: Der Lehrplan und seine Hülfsmittel — dann der 2. Teil des Buchs, welcher die mathematischen Disciplinen einzeln behandelt. Hierauf können wir nicht wol eingehen, da für einheitliche Zusammenfassung kein Haltpunkt dargeboten ist. Hoppe.

Die Elemente der Arithmetik als Vorbereitung auf die Functionentheorie. Von Dr. Max Simon, Oberlehrer am Lycäum zu Strassburg i. E. Strassburg 1884. R. Schultz u. Comp. 77 S.

Der Verfasser äussert im Vorwort: wenn die Lehrbücher der Schul-Arithmetik es an derjenigen Gründlichkeit fehlen lassen, welche zum Studium der Mathematik erforderlich sei, so habe man nicht in erster Linie diesen Mangel zu rügen, sondern vielmehr die Schuld davon dem Umstande zuzuschreiben, dass der mathematische Schulunterricht kein festes Ziel habe. Er wolle jetzt als dieses Ziel die Functionentheorie betrachten. Unter diesem Gesichtspunkt soll nun hier die Schul-Arithmetik behandelt werden. Offenbar ist hiermit eine Kluft zwischen Schule und Universität nicht bloss statuirt, sondern erst geschaffen. Das Ziel der Schule ist nicht Functionentheorie, sondern Entwickelung von Fähigkeiten, die auch denen, welche nicht Mathematik studiren, zu gute kommen soll. Mit diesem Ziele im Auge versäumt die Schule nichts, was zur Grundlegung der höhern Theorie notwendig ist. Zurücksetzung der Gründlichkeit und logischen Strenge zugunsten der Leichtfasslichkeit beruht auf einem Irrtum. Es ist gerade das Kriterium der beiden erstern, dass sie zur Einfachheit führen, und durch ihre Vernachlässigung wird es den Schülern leicht gemacht — nicht, zu lernen, sondern ohne zu lernen zur Einbildung des Wissens zu gelangen. Ist die Schulbildung, wie sie nach eigenem Zwecke sein soll, vorausgegangen, so hängt es nur von den Docenten ab im vollen Anschluss auf sie zu bauen; eine Kluft würde nur eine selbstgemachte sein. Was aber auch für Mängel sich noch in der Vorbildung finden, so ist es doch weit leichter das Versäumte später nachzuholen als diejenige Unklarheit wieder zu heben, welche die hier dargebotene Vorbereitung auf die Functionentheorie mit sich bringt. Charakteristisch im ganzen ist, dass das Bekannte und Leichte mit unnötig vielen Worten und mehrfacher Wiederholung vorgetragen,

die mehr Aufmerksamkeit erfordernden logischen Fragen hingegen, sowie alles Schwierige, nur kurz berührt werden. Beweise gibt der Verfasser selten und dann unvollständig; meist beruft er sich auf andre Autoren. Die Grenzen der Schularithmetik werden in den Ueberschriften nur durch die Basis der natürlichen Logarithmen und im Vortrag durch Zuziehung unendlicher Reihen überschritten. Zu den augenfälligsten Fehlern und Unklarheiten gehören die folgenden. Die Erklärung der Irrationalzahl fängt richtig an, schliesst aber mit Confundirung von Grenzwert und Variabeln. Der Verfasser hält sich für berechtigt auf Grund einer Definition der Gleicheit das Ungleiche gleich zu nennen. Er behauptet die complexe Zahl lasse sich auf einer Geraden abbilden, sagt aber nicht, wie; von der Abbildung auf der Ebene ist nicht die Rede. Die Gleichungen sollen den Begriff der Function liefern; was aber und wovon es Function ist, bleibt verschwiegen. Der binomische Lehrsatz wird von ganzen auf beliebige Exponenten ausgedehnt, nach Convergenz und Gültigkeitsgrenze der zu dem Behufe gebildeten Reihe aber nicht gefragt. Der Beweis wird angeblich durch den Schluss von n auf $n+1$ geführt; es wird aber vergessen, die Richtigkeit für einen möglichen Anfang darzutun, da man ja durch Addition von Einheiten aus ganzen Zahlen nicht zu Brüchen gelangt. Die kindliche Darstellungsweise, welche, abgesehen von einigen dann und wann eingemischten gelehrten Brocken, das Niveau der Schultironen nie verlässt, lässt vermuten, dass der Verfasser, fern von aller Speculation, alles nicht besser und nicht schlechter gegeben hat, als er es selbst verstand. Nur wollen wir wünschen, dass sich eine so mangelhafte Ausbildung nicht weiter überträgt, und raten daher Jedem vom Gebrauche des Buches ab.

Hoppe.

Ueber die Psychophysik. Physikalische und erkenntnisstheoretische Betrachtungen. Von Dr. Adolf Elsas, Privatdocenten der Physik a. d. Univ. Marburg. Marburg 1886. N. G. Elwert. 76 S.

Der Verfasser bestreitet die Richtigkeit der Herleitung, durch welche Fechner vom Weber'schen Gesetze aus zu seiner Grundformel gelangt. Nach ersterem ist die untere Grenze des Reizunterschiedes, bei welcher er empfunden wird, dem Reize proportional. Fechner fragt weiter, wie gross die Empfindung ausserhalb dieser Grenze ist, und misst sie schliesslich durch den Logarithmus des Quotienten des actuellen Reizes und seines Minimums, bei welchem Empfindung stattfindet. Es liegt auf der Hand, dass dies kein Resultat eines Schlusses sein kann; die Formel steht mit der Weber'schen in keinem Zusammenhang, als dass diese den Nullpunkt der Empfindung bestimmt, und zwar spricht Fechner gleich anfänglich von andern

Dingen als Weber. Es handelte sich hier um eine Definition der Empfindungsgrösse, deren Wahl ihm gänzlich freistand. Ebenso willkürlich stellt der Verfasser eine andre gegenüber; die Abweichung beider zu zeigen war ein unnötiges Bemühen. An seinem Zuwerkegehen sind folgende Ausstellungen zu machen. Im voraus sei bemerkt, dass von den 2 Ungleichungen Ende Seite 3 die zweite falsch ist, indem sie mit der ersten gleichbedeutend ist, statt das Gegenteil davon auszudrücken. Ferner ist nirgends in Betracht gezogen, dass Weber's und Fechner's Formeln das Minimum einzeln-empfindbarer Reize zur Gültigkeitsgrenze haben. In Anwendung auf kleinere Reize würde die erstere eine Empfindung des Unterschiedes statuiren, wo die Reize selbst nicht empfunden werden, die letztere eine negative Empfindung ergeben. Hätte der Verfasser dies beachtet, so würde er seine Bemerkung über unbewusste Empfindungen nicht gemacht haben. Ferner ist es dessen beständige Voraussetzung, dass Fechner sein Mass der Empfindung als Folge der Weber'schen Formel erscheinen lassen wollte, aber keine Aeusserung desselben angeführt, aus der zu ersehen wäre, dass Fechner das zufällig an derselben Stelle mit dem Weber'schen $R-R_1$ stehende ΔR mit diesem verwechselt, beides als gleichbedeutend betrachtet hätte (woraus dann der auf S. 17. bezeichnete Widerspruch zwischen Gl. (8) und der missverstandenen Gl. (4)). Um diesen Punkt dreht sich das ganze übrige unerquickliche Räsonnement. Endlich fehlt dem Ganzen die Pointe, solange von keiner Anwendung der willkürlichen Formel die Rede ist. Die Formel definirt die Empfindung durch physische Elemente; ihr zufolge hat man unter Empfindung noch keinen psychischen Gegenstand, sondern eine Function von Reizen zu verstehen; folglich tritt Fechner mit ihr noch gar nicht in das psychophysische Untersuchungsgebiet ein; isolirt, wie sie hier allein vorkommt, ist sie bedeutungslos. Beim Uebergang zum zweiten Thema, erkenntnisstheoretische Betrachtungen, spricht der Verfasser unerwartet die Meinung aus, seine Kritik sei zu ungunsten der Fechner'schen Formel ausgefallen, wovon der Leser nichts gemerkt hat, sowenig als von ersterm überhaupt etwas gegen dieselbe beigebracht worden ist. Dieser zweite Teil behandelt die Frage: Ist die Empfindung eine Grösse? Selbständiges Urteil scheint sich der Verfasser nicht zuzutrauen; er lässt sich überall durch fremde Aeusserungen leiten, ohne aus denselben eine entschiedene Ansicht über die Bedingungen einer Grösse zu gewinnen. Unter der Menge des Angeführten kommt, freilich gar nicht als notwendiger Anfang hervorgehoben, in der Tat auch mehrmals die Hauptbedindung einer Grösse, die Fixirung der Gleichheit, vor. Soll die Empfindung Grösse sein, so muss man wissen, wann zwei Seelen und wann eine Seele in getrennten Zeiten gleich stark empfinden. Dies würde noch immer nicht die Möglichkeit

einer Addition, mithin auch nicht einer Messung ergeben. Ob aber Fechner auch nur jene Grundbedingung zu erfüllen gesucht habe, darüber sagt der Verfasser kein Wort. Seiner schliesslichen absprechenden Verurteilung aller Psychophysik fehlt alle Begründung.

Hoppe.

Optische Häresien. Von Robert Schellwien. Halle a. S. 1886. C. E. M. Pfeffer. 98 S.

In dieser Schrift unterliegen zwei verschiedene Bestandteile der Beurteilung, ein philosophischer und ein physikalischer. Der Anfang lässt erwarten, dass der Verfasser sich vom Kant'schen Dualismus von Denken und Sein frei gemacht habe. Aber indem er beides in das Subject verlegt, trägt er auch die unvermittelte Zweiheit in das Subject über. Dass mit Beginn des Bewusstseins das Subject sein Erzeugniss als Object aus sich herausstellt, dass also der Gegensatz Bedingung des Bewusstseins ist, wird richtig bemerkt, auch mag dem Verfasser gestattet sein, nicht jenseit der Grenze des Bewusstseins mit seiner Betrachtung zurückzugehen; nur folgt aus dieser Beschränkung nicht, dass Objectivität und Subjectivität, ja nicht einmal, dass Object und Subject einen uranfänglichen, unerklärbaren Gegensatz bilde — jeder Teil der Erde z. B. ist Object der Erdanziehung und doch der ganzen homogen, ebenso kann auch die Empfindung als homogener Teil des Ich dessen Object sein. Ist nun aber auch die Bildung von Objecten angenommen, so folgt weiter noch nicht daraus die vom Verfasser plötzlich untergeschobene und als „wahres Object" bezeichnete Objectivität. Kann der Verfasser nicht angeben, womit denn das erzeugte Object übereinstimmen soll um wahr zu sein, so hat auch jene Bezeichnung, mit der er sich um das „Ding an sich" herumreden will, keinen Sinn. Die empirischen Bedingungen der Objectivität, die sich freilich nicht ableugnen liessen, werden nun ohne Motivirung nachgeholt, doch fehlt darin alles Haltbare, was Bedeutung hat. Die Geltung für alle Zeiten und alle Menschen ist gar nicht erwähnt, dagegen werden zwei ganz illusorische Bestimmungen für die Objectivität aufgestellt, denen zufolge das Unvermögen des Menschen anders zu sehen für das objective Sein des Gesehenen Gewähr leisten soll. Die ungenügende Auffassung des Begriffs der Objectivität hängt ohne Zweifel mit dem Titel der Schrift und der Art des Auftretens des Verfassers zusammen. Er nennt die Sätze der theoretischen Optik Dogmen und in Bezug auf dieselben seine Aufstellungen Ketzereien; weil nach seinen Begriffen das einzelne Subject im einzelnen Falle die Gewährleistung für die Objectivität findet, ohne dass ein wissenschaftliches System zu existiren braucht, so erklärt es sich, dass er in allen Lehren der Optik blosse Glau

sätze sieht. Der physikalische Teil der Schrift handelt zuerst von „Polarisation des Körperlichts", dann von Contrast und Polarisation, dann von Gesichtswahrnehmungen und Nachbildern. Die über das erste Thema angestellten Betrachtungen gehen von der Annahme aus, dass jeder beleuchtete Körper ausser den reflectirten Strahlen auch ein nach allen Richtungen gleiches Licht, das Körperlicht, ausschickt, an das zweite knüpfen sich 11 Versuche mit Angabe der Erscheinung, aber ohne Angabe, was dieselbe zeigen soll. Auch die Behandlung des dritten Gegenstandes bietet nichts dar, was die Aufmerksamkeit auf sich lenken könnte. Hoppe.

Vermischte Schriften.

Acta Mathematica. Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. 7. Stockholm 1886. F. u. G. Beijer. Berlin, Mayer u. Müller. Paris, A. Hermann.

Der 7. Band enthält folgende Abhandlungen.

H. Poincaré: Ueber ein Theorem von M. Fuchs. — Ueber das Gleichgewicht einer rotirenden flüssigen Masse.

E. Phragmén: Ueber ein Theorem betreffend die elliptischen Functionen. — Ueber die Begrenzungen von Continua.

H. Krey: Ueber Systeme von Plancurven.

R. Lipschitz: Arithmetische Herleitung einer Relation von Jacobi.

E. Netto: Zur Theorie der Elimination.

G. Cantor: Ueber verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen in einem $n$fach ausgedehnten stetigen Raume. 2. Mitteilung.

H. Gyldén: Die intermediäre Bahn des Mondes.

C. Runge: Ueber die auflösbaren Gleichungen von der Form $x^5+ux+v=0$. — Ueber die Darstellung willkürlicher Functionen.

L. Schläfli: Ueber $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{\sin bx}\frac{\partial x}{1+x^2}$ und verwandte Integrale.

M. Falk: Beweis eines Satzes aus der Theorie der elliptischen Integrale.

H. Minkowski: Untersuchungen über quadratische Formen. 1. Bestimmung der Anzahl verschiedener Formen, welche ein gegebenes Genus enthält.

S. Pincherle: Note über ein bestimmtes Integral.

Die Bibliotheca Mathematica enthält ausser der Bibliographie Notizen von S. Günther (Erfindung des „Baculus geometricus"), L. de Marchi (3 Manuscr. des Maurolicius), G. Eneström (Condorcet: Essais d'analyse), G. Cantor (Nekrolog Ludwig Scheefer) — und 8 Aufgaben. H.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Deel XII. Amsterdam 1886. J. F. Sikken.

Der 12. Teil enthält folgende Abhandlungen.

P. H. Schoute: Ueber die Construction unicursaler Curven durch Punkte und Tangenten.

F. J. van den Berg: Ueber ein gewisses Spiel.

P. van Geer: Formeln zur Bestimmung des Wertes des menschlichen Lebens.

J. de Vries: Ueber ebene Curven der 3. Ordnung.

F. H. van Kooten: Der mittelbare Fehler in Beobachtungen zur Bestimmung mehr als einer Unbekannten.

L. Janse Bz: Veränderung des rechtwinkligen Coordinatensystems. — Ueber die graphische Auflösung des sphärischen Dreiecks und darauf gegründeter nautischer und astronomischer Aufgaben. (Forts. v. Deel XI.)

J. Cardinaal: Das Kegelschnittnetz und ein daraus abgeleitetes ebenes System.

L. Landré: Wert einer Leibrente und Kaufsumme einer Lebensversicherung. — Ueber das Risico der Auszahlung bei einer Lebensversicherung.

G. Schouten: Die endliche Transposition eines festen Körpers.

C. van Aller: Einzelne Bemerkungen in Betreff der Untersuchung der Convergenz oder Divergenz unendlicher fortlaufender Reihen.

B. P. Moors: Einfaches Mittel um der Wage bei jeder Belastung unmittelbar die grösste Empfindlichkeit zu geben, deren sie fähig ist. H.

Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Afdeeling Natuurkunde. Derde Reeks. Eerste Deel. Amsterdam 1885. Johannes Müller.

Im 1. Teile sind folgende mathematisch physikalische Arbeiten enthalten.

C. H. C. Grinwis: Die vollständige Virialgleichung.

D. Bierens de Haan: Baustoffe für die Geschichte der mathematischen und physikalischen Wissenschaften in den Niederlanden.

T. J. Stieltjes: Einige Bemerkungen über die Veränderung der Dichte im Innern der Erde.

H. A. Lorentz: Ueber die Anwendung des zweiten Gesetzes der mechanischen Wärmetheorie auf die thermoelektrischen Erscheinungen.

J. C. Kapteyn und W. Kapteyn: Die Sinus 4. Ordnung (Bericht).

V. A. Julius: Beitrag zur Theorie der capillaren Erscheinungen (Bericht). H.

Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution showing the operations, expenditures and condition of the institution for the year 1883. Washington 1885.

Der Anhang berichtet über die Fortschritte mehrerer einzelner Wissenschaften, unter denen die Mathematik nicht berücksichtigt ist, die Physik auf 58, die Astronomie auf 78 Seiten, nebst Litteraturverzeichniss. H.

Bulletin of the Philosophical Society of Washington. Vol. VII. Containing the minutes of the society and of the Mathematical Section for the year 1885. Published by the cooperation of the Smithsonian Institution. Washington 1885.

Das Bulletin der mathematischen Section enthält, ganz oder im Auszug, folgende Arbeiten.

G. L. Ravené: Theorie des Mercur.

M. Baker: Eine Gruppe von Kreisen, die mit dem Feuerbachschen Kreise in Beziehung stehen.

Kummell: Kann die Anziehung einer endlichen Masse unendlich gross sein? (Die einer stetig ausgedehnten Masse, welche der Verfasser allein betrachtet, kann es natürlich nicht.) H.

Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg. No. 6. Ausgegeben im März 1886. Redigirt von Ahlborn, Wagner und Bock. 1886.

Mitgeteilt sind folgende Vorträge (Referat) und Abhandlungen.

Bock: Ueber Potentialwerte verschiedener Kräfte und Folgerungen daraus.

Köpcke: Ueber Differentiirbarkeit und Anschaulichkeit willkürlicher Functionen.

Böger: Durch 5 Punkte eine Curve 2. Ordnung zu legen.

H. Schubert: Lösung des Charakteristiken-Problems für lineare Räume beliebiger Dimension.

P. Jaerisch: Ueber das Gleichgewicht einer elastischen Kugel — eines Kreiscylinders.

W. Bock: Ueber eine neue zahlentheoretische Function.

H.

Mathematische Sophismen. Herausgegeben von Johann Viola. Zweite, vermehrte Auflage. Wien (1866). Carl Gerold's Sohn. 23 S.

Es sind 16 Fälle übereilter Folgerungen aufgestellt, durch welche in der Tat für eine gute Uebung in mathematischer Logik Stoff dargeboten wird. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XIII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Jahrbuch üb. d. Fortschritte d. Mathematik. Begründet v. C. Ohrtmann, hrsg. v. M. Henoch u. E. Lampe. 15. Bd. Jhg. 1883. 3. Hft. Berlin, G. Reimer. 7 Mk.

Methode und Principien.

Schüler, W. F., d. allgem. Derivation, e. neuer Grundbegriff d. Funktionenrechnung, hier insb. d. Differentialrechnung. Ansbach, Brügel & S. 3 Mk.

Lehrbücher.

Gallenkamp, W., die Elemente d. Mathematik. 5. Afl. 1. Tl. 1. Heft. (Arithmetik u. Algebra.) 2. Hft. (Planimetrie.) Iserlohn, Bädeker. 2 Mk. 20 Pf.

Sachse, J. J., d. prakt., geistbild. u. erziehl. Unterr. im Rechnen u. in d. Raumlehre. 2. Tl. Didaktik d. Rechenunterrichts. Osnabrück, Wehberg. 2 Mk. 75 Pf.

Sammlungen.

Braun, W., Rechenbuch f. d. unteren Klassen v. Mittelschulen. 3. Tl. Augsburg, Rieger. 90 Pf.

Fuss, K., Sammlg. d. wichtigsten Sätze aus der Planimetrie u. Stereometrie. Nürnberg, Korn'sche B. 75 Pf.

— dasselbe. Für Lehrerbildungsanstalten. Ebd. 75 Pf.

Kleyer, A., vollständ. gelöste Aufgaben-Sammlung a. allen Theilen d. Rechenkunst etc. 251.—265. Heft. Stuttgart, Maier. à 25 Pf.

Litterarischer Bericht

XVI.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Die Geschichte des Fernrohrs bis auf die neueste Zeit. Von Dr. H. Servus. Mit acht in den Text gedruckten Abbildungen. Berlin 1886. Julius Springer. 135 S.

Die Geschichte des Fernrohrs wird in 2 Zeitabschnitte geteilt, deren erster mit 1650 schliesst. Sie geht nicht auf die Entdeckung der optischen Eigenschaft des Glases zurück. Die Lichtbrechung des Glases, die Combination der Linsen zur Vergrösserung und Verdeutlichung waren längst vorher bekannt und in industrielle Verwertung übergegangen, ehe eine Anwendung zum Fernsehen gemacht ward. Mit dieser Entdeckung beginnt hier die Geschichte und zwar fällt sie unbezweifelt in das Jahr 1608. Ueber den ersten Erfinder der Fernröhre haben zwar nicht lange nachher Nachforschungen stattgefunden, doch tritt der Entscheidung ein eigentümlicher Umstand entgegen. Es sind Zeugnisse dafür vorhanden, dass zwei Mechaniker in Middelburg, Zacharias Jansen und Lippershey, um dieselbe Zeit Fernröhre verfertigt und dem Prinzen Moritz von Nassau solche überreicht haben. Dieser erkannte die Wichtigkeit der Erfindung für militärische Zwecke und legte jedem von beiden Geheimniss auf. Die Massregel war unwirksam, weil ihr das Bekanntwerden und die Nachahmung vorausgegangen war und sich bald durch ganz Europa verbreitete. Sie hinderte aber die Erfinder ihre Priorität zu wahren und die Nachahmer ihre Quellen anzugeben. Der Verfasser erklärt Lippershey für den wirklichen Erfinder, führt aber als Grund nur an, weil dessen Zeugnisse sicherer seien. Dieser Vorzug berührt jedoch offenbar die Frage gar nicht; denn keins von beiden Documenten enthält eine Aussage über die Unabhängigkeit der Verfertigung. Dagegen macht eine Privatmitteilung, nach welcher ein Zufall dem Lippershey nähere Kunde von Jansen's Arbeit zuführte, es wahr-

scheinlich, dass letzterem die Erfindung zuzuschreiben ist. An der Verbesserung der Fernröhre hat zuerst Galilei durch selbständige anhaltende Versuche gearbeitet. Kepler pflegte hauptsächlich die Theorie und stellte eine Dioptrik auf, die indes nicht das richtige Brechungsgesetz zugrunde legte. Beide machten in ausgedehntem Masse erfolgreiche astronomische Anwendung. Kepler bemerkte zuerst die Ungenauigkeit des Vereinigungspunkts der an sphärischer Fläche gebrochenen Strahlen, deren Beseitigung das Ziel der Bemühungen in jenem ersten Zeitabschnitte blieb. Die Namen Teleskop und Mikroskop hat zuerst Demiscianus statt der vorher gebräuchlichen lateinischen und italiänischen aufgebracht. Descartes fand das richtige Brechungsgesetz und gab eine Theorie der Fernröhre mit genauem Brennpunkt, jedoch mit Anwendung elliptischer und hyperbolischer Linsen. Divini, Toricelli, Campani, Neille, Reine, Cox, Auzout und Borel verfertigten Objectivlinsen mit immer grösserer Brennweite bis zu 600 Fuss. Um letztere anzuwenden wurden sie ohne Rohr dem Ocular gegenüber befestigt. Huyghens erfand eine neue Art des Schleifens der Linsen; schon vor ihm hatte Gascoigne das Mikrometer erfunden, das gleichfalls Huyghens anwandte. Hooke und Foucault schwächten zur Sonnenbeobachtung das Licht durch vielfache Reflexion an Planspiegeln. Im zweiten Zeitabschnitte entdeckte zuerst Newton die Farbenstrahlteilung als grösste Ursache der Ungenauigkeit; da er jedoch die Abweichung als proportional der Brechung für alle Körper voraussetzte, so ergab sich die Hebung der Farbenteilung durch Combination unmöglich. Zu gleichem Resultate ward Euler durch seine Theorie infolge falscher Hypothese geführt. Ohne Theorie gelang es Dolland achromatische Linsen durch Combination herzustellen. Später verbesserte Euler seine Theorie. Die ferneren Bestrebungen sind nun auf die Beseitigung der Dispersion gerichtet. Hierbei geht die Schrift auf die Anwendung der Spiegelteleskope noch nicht ein und behandelt dieselbe dann besonders im 3. Abschnitte.

H.

Illustrierte Geschichte der Elektricität von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage. Für weitere Kreise bearbeitet von Dr. Eugen Netoliczka, Kaiserl. Rath, Professor der Physik in Graz, Ritter des k. k. österreich. Franz Josef-Ordens, etc. Wien 1886. A. Pichler's Witwe u. Sohn. 288 S.

Die Geschichte der Kenntniss und Doctrin der Elektricität teilt sich, infolge der Eigentümlichkeit des Gegenstandes, in 3 Hauptabschnitte. Eigentümlich ist der Elektricität unter den Naturkräften die grosse Mannichfaltigkeit der sich auf die Affecte aller 5 Sinne erstreckenden Erscheinungen, deren viele zum Bestande der Körper nicht zu gehören scheinen. Die Geschichte des ersten Zeitraums von

den ältesten Zeiten bis zum 17ten Jahrhundert enthält nur Aufzeichnungen solcher beobachteten Erscheinungen, welche die Aufmerksamkeit erregt, aber nie weitere Nachforschung zur Folge gehabt haben. Rechnet man zu diesen die gewöhnlichen Erscheinungen wie Blitz und Actionen der lebenden Organismen, auch wol den Magnetismus, so sind schon eine grössere Anzahl von Eigenschaften der Elektricität im Altertum bekannt gewesen, ohne dass eine Idee von deren Zusammenhang aufkam. Dieser Sachlage entsprechend werden in der vorliegenden Schrift, nach kurzer Charakterisirung der älteren Periode, jene Aufzeichnungen erst da angeknüpft, wo die Bedeutung der alten Beobachtungen ans Licht tritt; denn erst hier ist es von Interesse den ältesten Spuren der Beachtung nachzugehen. Die zweite Periode, welche noch vor 1700 beginnt und bis in die Mitte des 19ten Jahrhunderts reicht, charakterisirt sich mit dem Beginn und Wachstum der wissenschaftlichen Forschung durch eine Reihe zahlreicher sich schnell folgender Entdeckungen. Im 17ten Jahrhundert wurden die Anziehung in weiterem Umfang, die Leitung, das Leuchten und Knistern, zuletzt erst die Abstossung bekannt. Die Entdeckung der meisten Eigenschaften fällt in das 18te, sowie auch die Erfindung mancher Vorrichtungen, Elektrisirmaschine, Leidener Flasche, Blitzableiter u. a. Mit dem 19ten erhält die Doctrin eine wesentliche Ergänzung durch die Entdeckung der Berührungselektricität und des Elektromagnetismus. Die Geschichte dieser Entdeckungen ist eine sehr einfache: die Zeitfolge ist auch ziemlich die sachliche, also kein mehrfacher Gesichtspunkt in der Anordnung erforderlich; die Nachrichten rufen keine kritischen Fragen hervor. Dieser Natur entsprechend hat auch der Verfasser eine jede kurz, einfach und leicht verständlich dargestellt. Im Umfang der 2ten Periode kann es, gemäss dem damaligen Standpunkt der Doctrin, in der Tat keinen merkbaren Unterschied machen, dass das Buch, wie der Titel sagt, „für weitere Kreise" also auch für Nichtgelehrte bearbeitet ist. Ganz verschieden hierin ist die 3te Periode, wo sich die Elektricitätslehre zu einer vielverzweigten Wissenschaft entwickelt hat. Sie charakterisirt sich besonders durch die technischen Verwertungen der Elektricität zur Telegraphie, zur Betriebskraft, zur Beleuchtung, zur Heilkraft u. a. Der Geschichte dieser ganz neuen Wissenschaft ist der grösste Teil des Buches gewidmet. H.

Elektricität und Magnetismus im Altertume. Von Dr. Alfred Ritter von Urbanitzky. Mit 9 Abbildungen. Wien, Pest, Leipzig (1886). A. Hartleben. 284 S.

Der Verfasser vermisst in den vorausgegangenen Bearbeitungen der Geschichte der Elektricität und des Magnetismus die Berück

sichtigung des Altertums. In der Tat nehmen die Nachrichten über die betreffenden Kenntnisse der Alten eine ganz verschiedene Stellung im Entwickelungsgang der Doctrin gegenüber den Forschungen der Neuzeit ein. Sie verbreiten nicht Licht, sondern stellen der letzteren nur Fragen, und nur eine derselben, betreffend die Anziehung, ist es, an welche die Forschung in ihrem Beginn anknüpft. Daher ist es unzutreffend, wenn der Verfasser behauptet, die neue Doctrin stünde auf dem Boden der alten. In welcher Weise die alte Geschichte behandelt worden, und sachgemäss zu behandeln ist, spricht der vorige Bericht aus. Wol aber mag dem Verfasser zugestanden sein, dass diese Behandlung nicht allseitig genug gewesen ist, und dass die aufgefundenen Nachrichten eine ergänzende Fortsetzung verlangen. Jedenfalls ist die Bemühung des Verfassers alle bezüglichen Nachrichten zu sammeln und zu verwerten dankenswert. Das Buch teilt sich nach den Gegenständen: Magnetismus, Bernstein, Nordlicht, Blitz und Elmsfeuer, angebliches Wissen der Alten in Bezug auf atmosphärische Elektricität. Ergibig ist das Suchen nach bezüglichen Stellen nicht sonderlich gewesen; den grössten Teil der Schrift bildet eine leichte Kritik über die Meinungen von Autoren der Neuzeit. H.

Handbuch der ausübenden Witterungskunde. Geschichte und gegenwärtiger Stand der Wetterprognose. Von Dr. W. J. van Bebber, Abtheilungsvorstand der deutschen Seewarte. Stuttgart 1885. Ferdinand Enke.

Das Buch besteht aus 2 Teilen: Geschichte der Wetterprognose — und gegenwärtiger Zustand derselben. Zahlreiche Urteile der Fachpresse bekunden, dass das Werk eine vorzügliche Leistung sei.

H.

Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Pubblicato da B. Boncompagni. Tomo XVIII. Roma 1885. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche. 4° 720 S.

Der 18. Band enthält folgende Abhandlungen.

A. Favaro: Ungedruckte Documente für die Geschichte der Galileianischen Manuscripte in der Biblioteca Nazionale zu Florenz. — Schlüsse in Betreff des unbekannten akademischen Opponenten gegen den Vortrag von Galilei über die Dinge, welche im Wasser verharren oder sich darin bewegen. — Nicolaus Coppernicus von Leopold Prowe. Zweiter Band: Urkunden. Berlin 1884. Weidmann. — Anhang zu den Studien über das Leben und die Werke von Prosdocimo de Beldomandi, Mathematiker in Padua im 15. Jahrhundert.

A. Genochi: Noch ein Bruchstück der kubischen und biqua-

dratischen Reste. — Ueber das Gesetz der Reciprociät von Legendre ausgedehnt auf die Nichtprimzahlen. — Ueber einige Sätze, welche zu diesem Gesetze führen können. — Ueber die Erweiterung eines Lemmas von Gauss.

L. Kronecker (übers. von A. Sparagna): Ueber die Geschichte des Gesetzes der Reciprocität von Legrendre.

G. B. Biadego: Ueber das Leben und die Arbeiten von Alberto Castiglano.

G. Eneström: Bibliographische Notiz über die Uebersetzungen von Euklids Elementen ins Schwedische. (S. unten.) — Ueber ein Theorem von Goldbach. (S. unten.)

M. Steinschneider: Studien über Zarkali. Fortsetzung.

A. Marre: Notiz über das Leben und die Arbeiten von François-Joseph Lionnet. — Verzeichniss seiner Arbeiten.

P. A. Bertauld: Die geometrische Zahl Platon's, zweite Interpretation von J. Dupuis. Paris, Hachette. — Die geometrische Zahl Platons. Dritte Abhandlung, Auszug aus dem Annuaire de l'Association pour l'encouragement des études grecques en France. Von J. Dupuis. Paris, Hachette.

C. Le Paige: Parallele und axiale Coordinaten, Methode geometrischer Transformation und neues Verfahren graphischer Rechnung hergeleitet aus der Betrachtung paralleler Coordinaten von Maurice d'Ocagne. Paris 1885. Gauthier-Villars.

A. Forti: Ueber die Sonnenflecken. Historische Bruchstücke.

E. Catalan: Eine Polemik zwischen Goldbach und Daniel Bernoulli.

M. Ch. Henry: Ungedruckte Correspondenz von d'Alembert mit Cramer, Lesage, Clairaut, Turgot, Castillon, Béguelin u. a.

F. Porro: Notizen über das Leben und die Schriften von Guiseppe Zecchini Leonelli, Mathematiker in Cremona. — Ungedruckte Schriften desselben, nämlich I. Satz von Leonelli. II. Directe und graphische Approximation, zurückgeführt auf die Differenz einer Unendlichkleinen, welche die 2 proportionalen geometrischen Mittel gibt. (Beweis am Schluss.) III. Ueberraschende Eigenschaft der Quadratwurzel von 3.

Besonders herausgegeben sind die 2 Artikel von Eneström, welche hier folgen.

Publicationsverzeichnisse sind im je 2ten Heft. H.

Sur un théorème de Goldbach lettre de M. Gustave Eneström à D. B. Boncompagni. Extrait des Atti dell'Accademia Pontificia de'Nuovi Lincei t. XXXVIII. Rome 1885. 4° 1 S.

Euler schreibt an Goldbach, dass er dessen, ihm mitgeteiltes

Theorem, nach welchem jede gerade Zahl eine Summe zweier Primzahlen ist, für gewiss halte, obgleich er es nicht beweisen könne.

H.

Notice bibliographique sur les traductions en Suédois des Éléments d'Euclide. Par Gustave Eneström à Stockholm. Extr. du Bull. di bibl. e di st. d. sc. m. e. f. t. XVIII. Rome 1885. 4°. 13 S.

Der Artikel enthält das chronologische Verzeichniss der schwedischen Uebersetzungen von Teilen der Elemente Euklids, die seit 1774 erschienen sind. Die Namen der Herausgeber sind: M. Strömer, C. L. Lithander, C. F. Lutteman, P. R. Bråkenhjelm, H. Falck, E. G. Björling, P. N. Ekman, A. Rundbäck, H. Hoikel, G. G. Hällström, H. A. Witt, F. A. A. Lundgren, M. E. Areskoug, A. Sjöstrand, A. Wiemer, Yngve Nyberg, C. A. Weström, Ch. F. Lindman, C. O. Ruth, G. Dillner, A. E. Hellgren. Die Ausgaben sind für den Schulgebrauch bestimmt, enthalten daher manche Hinzufügungen und Weglassungen.

H.

Réponses aux questions. Bibliotheca Mathematica 1885. n° 4. Stockholm. Soussigné par B. Boncompagni. 4°. 1 S.

Der codex Ottobonianus der Vaticanischen Bibliothek enthält ein Lehrbuch betitelt: summa artis geometriae, im Jahr 1414 copirt und vom Copisten dem Petrus de Dacia zugeschrieben. G. Eneström hat die Frage gestellt, ob es noch andre Copien gibt, wo Petrus de Dacia als Autor bezeichnet wird? Der Verfasser beschreibt eine gekaufte Copie von 1365 und führt eine andre von 1389 in der Vaticanischen Bibliothek an; in beiden wird Petrus de Dacia als Autor genannt.

H.

Register naar eene wetenschappelijke verdeeling op de werken van het Wiskundig Genootschap: „Een onvermoeide Arbeit komt alles te boven", gedurende het tidsverloop van 1818—1882. Amsterdam 1885. J. F. Sikken. 445 S.

Das von einer Commission bearbeitete Register der Arbeiten der Wiskundig Genootschap ist nach den Wissenschaftszweigen geordnet und enthält eine grosse Anzahl gelöster Aufgaben, zuerst ganz specieller, dann mehr und mehr allgemeiner. H.

Liste alphabétique de la correspondance de Christian Huygens qui sera publiée par la Société Hollandaise des Sciences à Harlem. Harlem (1886). Jean Enschede et fils. 4°. 15 S.

Die Directoren der holländischen Gesellschaft der Wissenschaften beabsichtigen, eine neue Ausgabe aller Schriften von Chr. Huyghens

unter dem Titel „Oeuvres Complètes de Christiaan Huygens" zu veranstalten, welche auch die zum grössten Teil noch ungedruckte Correspondenz desselben enthalten soll. Eine von der königlichen Akademie der Wissenschaften in Amsterdam ernannte Commission ist mit der Redaction beauftragt und gibt im Gegenwärtigen das alphabetische Verzeichniss 1) der an Huyghens gerichteten, 2) der von ihm geschriebenen Briefe heraus. H.

Nekrolog des K. württembergischen Oberstudienrats Dr. Christian Heinrich v. Nagel (Separat-Abdruck aus dem Correspondenzblatt für d. Gel. und Realschulen. Württ. 1884). Tübingen 1884. Franz Fues. 18 S. Unterzeichnet: Otto Krimmel.

Chr. H. Nagel, Sohn eines Schneiders, geboren 1803 in Stuttgart, besuchte das Gymnasium daselbst, studirte in Tübingen Theologie, indem er gleichzeitig einige mathematische Vorlesungen hörte, diente bis 1827 als Vicar, doctorirte und habilitirte sich dann an der Universität Tübingen. 1830 ward er Lehrer der Mathematik am Gymnasium in Ulm, welche Stadt von da an sein Wohnsitz geblieben ist. 1844 ward er Rector an der daselbst zu organisirenden Realanstalt, bei deren Jubiläum 1869, er zum Oberstudienrat ernannt ward. 1875 legte er sein Amt nieder und starb 1882. Unter seinen Schriften sehr verschiedenen Inhalts wird als Hauptwerk das Lehrbuch der Geometrie genannt, welches bis in die neueste Zeit viele Auflagen erfahren hat. Seine vor allem nennenswerten Verdienste sind die Hebung des mathematischen Unterrichts und sein Wirken für Errichtung von Realanstalten und Fortbildungsschulen, um derentwillen er Reisen durch Deutschland machte. H.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Algebraische Analysis. Von Augustin Louis Chauchy. Deutsch herausgegeben von Carl Itzigsohn. Berlin 1885. Julius Springer. 398 S.

Die gegenwärtige Ausgabe ist ein Glied in einer Reihe, deren Fortsetzung die Verlagshandlung verspricht. In diesen litt. Berichten sind bereits 3 Uebersetzungen älterer Werke besprochen: Maxwell, Lehrb. d. Elektr. u. d. Magn. 278. l. B. S. 21, Fourier, anal. Th. d. Wärme, 6. l. B. S. 17, beide übersetzt von Weinstein, Euler, Einl. in d. Anal. d. Unendlichen, übersetzt von Maser, 10. l. B. S. 14 sämtlich imselben Verlage erschienen. Der im Vorwort von Itzigsohn ausgesprochene Zweck des ganzen Unternehmens ist es, das Studium der historischen Entwickelung der mathematischen Wissenschaften

durch billige Ausgaben bedeutender Werke in deutscher Sprache zu erleichtern und zu fördern. Cauchy's Werk wird hier in einen gewissen Gegensatz zu dem von Euler gestellt und zwar betont, dass Euler's Functionsbegriff sich mit dem des arithmetischen Ausdrucks deckte, Cauchy hingegen ihn auf die Stetigkeit baute. Wir können aber weiter hervorheben, dass Euler bei ausserordentlicher Productivität in Methoden und Resultaten der Begründung der Principien noch keine Aufmerksamkeit zuwandte, dass Lagrange zwar in Ingeniosität und Eleganz der Methoden einen Fortschritt uber ihn hinaus bezeichnete, die Principien aber auf keinen höhern Standpunkte hob, dass dann Cauchy zuerst einen ernsten Anfang mit strenger Grundlegung der Infinitesimalrechnung machte. Die Gegenstände der einzelnen Capitel sind der Reihe nach folgende: Reelle Functionen; unendliche Grössen, Stetigkeit und singuläre Werte; symmetrische und alternirende Functionen, Anwendung, homogene Functionen; Bestimmung der ganzen Functionen aus Einzelwerten; Bestimmung stetiger Functionen 1 Variabeln aus Bedingungen; Convergenz und Divergenz der Reihen: imaginäre Ausdrücke; imaginäre Functionen; convergente und divergente imaginäre Reihen; Wurzeln algebraischer Gleichungen; Zerlegung der rationalen Brüche; recurrente Reihen. Hierauf folgen 9 Nachträge. H.

Elementarbuch der Differential- und Integralrechnung mit zahlreichen Anwendungen aus der Analysis, Geometrie, Mechanik, Physik etc. für höhere Lehranstalten und den Selbstunterricht bearbeitet von Friedrich Autenheimer, gew. Direktor des zürcherischen Technikums zu Winterthur, Herausgeber von „Bernoulli's Vademekum des Mechanikers“, von „Bernoulli's Dampfmaschinenlehre“ und von den „Aufgaben über mechanische Arbeit“. Dritte Auflage. Mit 152 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Weimar 1887. Bernhard Friedrich Voigt. 522 S. (Pr. 9 mk.).

Exactes Verfahren in Begriffsbestimmung und Herleitung hat sich der Verfasser nicht zum Gesetz gemacht, dagegen charakterisirt sich das Buch durch reichliche Entfaltung des Lehrstoffs, durch welche Theorie und Anwendung zur Vertrautheit gebracht werden. Diesem Zweck entsprechend werden Differential- und Integralrechnung, beide einander schnell folgend, nicht sogleich in vollem Umfange vorgetragen, sondern erst Anwendungen eingeschaltet, dann die Theorie fortgesetzt. Der erste Teil macht Anwendung der Differentiation auf Maxima und Minima, auf Curven und auf Reihenentwickelung, Anwendung der Integration auf Inhaltsberechnung, Schwerpunkte, Bewegung, Trägheitsmomente, Reibung, Festigkeit, Gravitation, Gleichgewicht und Bewegung im Wasser u. a. Der zweite Teil fasst nun die Fragen

mehr allgemein theoretisch auf. Bei der Integralrechnung treten hier zuerst die Differentialgleichungen auf und unter den Aufgaben solche, die sich auf schwingende Bewegung beziehen. H.

Zinseszins-, Renten-, Anleihen-, Obligationen-Rechnung. Handbuch von V. Baerlocher. Mit fünf Tafeln von Fédor Thoman. Zürich 1886. Orell Füssli u. Co. 249 S.

Der Verfasser verbindet mit der Herausgabe dieses Buches den Zweck, auf die Anwendung der Mathematik in der Nationalökonomie, die bisher immer vermieden worden sei, hinzuwirken. Den Grund dieses Zustandes sieht er in dem Mangel an Hülfsmitteln: zwar gebe es Bearbeitungen für diejenigen Zweige, welche der Wahrscheinlichkeitsrechnung bedürfen, namentlich das Versicherungswesen, dagegen finde man solche für die niedere polytische Arithmetik nur in England und Frankreich, u. a. von Sprague, Gompertz, Woolhouse, Thoman, Achard, Dormoy, Charlon. Das Gegenwärtige stellt aus deren Arbeiten das erforderliche zusammen. Es werden darin siebenstellige Logarithmen gebraucht. Die Abschnitte des Buchs behandeln nach einander: Die Zinsrechnung, Rentenrechnung, Anleihenrechnung, Obligationenrechnung, Theorie der Renten mit Terminen, welche in geometrischer oder arithmetischer Progression wachsen oder abnehmen, und ihre Anwendung auf die Anleihen- und Obligationenrechnung. H.

Theorie der magischen Zahlen-Quadrate und Kreise. Von J. B. Kürten in Köln. Köln 1886. Heinrich Theissing. 69 S.

Die Schrift ist eine Anweisung zur Bildung magischer Quadrate mit mancherlei Abänderungen der Aufgabe und Einführung von Bedingungen, begleitet von historischen Angaben. H.

Die reducirten Quersummen und ihre Anwendung zur Controle von Rechnungs-Ergebnissen in leichtfasslicher Anweisung für Bau- und Rechnungs-Beamte, Kaufleute und Landwirthe, sowie statistische und sonstige wissenschaftliche Rechner. Von Friedr. Vormung, Techniker, früher Lehrer der Mathematik und Mechanik an den technischen Fachschulen zu Neustadt in Mecklenburg. Mit einem Vorworte von Prof. Dr. Förster, Geh. Regierungsrath und Director der Kgl. Sternwarte zu Berlin. Eberswalde 1886. Peter Wolfram's Akademische Buchhandlung. 16 S.

Allen Interessenten der Rechenkunst wird das soeben in unserer Buchhandlung erschienene Büchlein über die reducirten Quersummen sehr willkommen sein. In diesem Büchlein ist ein uraltes,

aber in neuerer Zeit in vielen Rechenbüchern ganz unberücksichtigt gebliebenes Controlverfahren für die Richtigkeit von Additions-, Subtractions, Multiplications-, Divisions-, Potenzirungs- und Radicirungsrechnungen eingehend und fasslich erörtert. Der ansehnliche Nutzen dieses Controlverfahrens für die Sicherung von Rechnungsergebnissen ist auch dadurch bezeugt, dass der Director der Königlichen Sternwarte zu Berlin, Professor Dr. Förster, das Büchlein auf Wunsch seines Verfassers mit einem Vorwort versehen hat, in welchem eine kurze Erläuterung der historischen und methodischen Seite der wichtigsten Sache gegeben wird. Der Ladenpreis des Büchleins ist mit 0,50 Mark so gering angesetzt, dass Jeder der mit Additions-, Multiplications- und Divisionsrechnungen häufiger zu tun hat, bei der Anschaffung desselben seine Rechnung finden wird.

Peter Wolfram's akad. Buchhdl.

Vermischte Schriften.

American Journal of Mathematics. Simon Newcomb, Editor. Thomas Craig, Associate Editor. Published under the Auspices of the Johns Hopkins University. *Πραγμάτων ἔλεγχος οὐ βλεπομένων.* Volume VIII. Baltimore 1886.

Der 8. Band enthält folgende Abhandlungen.

P. A. Mac Mahon: Ueber Seminvarianten.

J. Hammond: Syzygie-Tafeln für die binäre Quintic. — Ueber Perpetuanten mit Anwendung auf die Theorie der endlichen Quantics. — Das Cubi-Quadric-System.

P. Seelhoff: Prüfung grösserer Zahlen auf ihre Eigenschaft als Primzahlen. — Neue Methode der Unterscheidung zusammengesetzter von Primzahlen und der Auffindung ihrer Factoren.

E. McClintock: Analyse von Quintic-Gleichungen.

Th. Craig: Ueber lineare Differentialgleichungen, deren Fundamental-Integrale, die successive Derivativen derselben Function sind. — Ueber die linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung.

E. H. Moore und C. N. Little: Note über Raumteilungen.

A. V. Lane: Note über eine Roulette.

H. B. Fine: Ueber die Singularitäten von Curven doppelter Krümmung.

J. C. Field's: Ein Beweis des Satzes — Die Gleichung $f(x)=0$ hat eine Wurzel — wo $f(z)$ eine holomorphe Function von z ist. — Ein Beweis des Additionstheorems der elliptischen Function. —

Symbolische endliche Lösungen der Gleichung $\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = x^m y$ und Lösungen durch bestimmte Integrale.

Sylvester: Vorlesungen über die Theorie der Reciprocanten.

Charlotte Angas Scott: Die binomische Gleichung $x^p - 1 = 0$.

F. N. Cole: Ein Beitrag zur Theorie der allgemeinen Gleichung 6. Grades.

H. Poincaré: Ueber die Abel'schen Functionen.

S. Newcomb: Eine verallgemeinerte Theorie der Combination von Beobachtungen zum Zweck die besten Resultate zu erlangen.

H.

Bulletins de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles, F. Hayez.

In den Bänden XLVI 2ter bis VIII 3ter Reihe, Jahrg. 47 bis 53. Jahr 1878 bis 1884 sind folgende mathematische Arbeiten enthalten.

Folie: Princip der Theorie der Büschel. 46. — Existenz und Grösse der täglichen Präcession und Nutation bei der Hypothese einer starren Erde. 3.

Folie und Le Paige: Ueber einige Sätze betreffend die Flächen höherer Ordnung. 48. — Ueber die Curven 3. Ordnung. 1.

Saltel: Die arguesische Classification der algebraischen Curven im Raume, oder Erweiterung des arguesischen Princips auf diese Curven. 46.

Le Paige: Ueber die vielfachen Punkte der höhern Involutionen. 46. — Ueber gewisse Covarianten der binären algebraischen Formen. 49. — Ueber gewisse Covarianten eines kubo-biquadratischen Systems. 46. — Ueber die geometrische Darstellung der Covarianten einer biquadratischen Form. 50. — Ueber die Theorie der Polaren. 1. — Ueber gewisse Covarianten. 1. — Ueber die Theorie der binären Formen für mehrere Reihen von Variabeln. 2. — Ueber eine geometrische Darstellung zweier einförmigen Transformationen. 3. — Ueber die Curven 3. Ordnung. 4. — Ueber einige einförmige geometrische Transformationen. 4. — Ueber die Flächen 2. Ordnung. 5. — Ueber die Erzeugung gewisser Flächen durch quadrilineäre Büschel. 8. — Ueber die quadrilineäre Form und die Flächen 3. Ordnung. 8.

Van Rysselberghe: Beschreibung eines parabolischen vollkommen isochronen Regulators. 46.

Mansion: Beweis eines Satzes bezüglich einer bemerkenswerten Determinante. 46. — Ueber die Elimination. 46. — Mehrere Noten über Elimination. 47. — Fundamentales Princip bezüglich der Be-

rührung zweier Flächen mit gemeinsamer Erzeugenden. 3. — Ueber die Theorie der elliptischen Functionen. 8.

E. Weyr: Bemerkungen über die Existenz der Evolution bei den Curven 3. Ordnung 4. Classe. 49.

Catalan: Magisches Quadrat der Villa Albani. (Rom). 2. — Einige elementar geometrische Sätze. 4. — Note über eine Doppelreihe. 5. — Ein Satz (Zahlenth.). 6. — Ein Satz aus Arithmetik und Algebra. 6. — Einige arithmetische Sätze. 7. — Anwendung eines neuen Princips der Wahrscheinlichkeit. 8.

Teixeira: Integration einer Classe partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung. 3.

Genocchi: Ueber die Functionen von Prym und Hermite. 4. — Hinzufügung dazu. 5.

Ronker: Bestimmung des Verhältnisses der Hauptträgheitsmomente des Erdsphäroids. 5. — Ueber einen Satz der Mechanik anwendbar auf Systeme in periodischer Bewegung. 8.

De Tilly: Ueber den Satz von Chasles betreffend die Centralaxen. 5.

Jamet: Verallgemeinerung einer Eigenschaft der Flächen 2. Ordnung. 6.



Fig. 32.

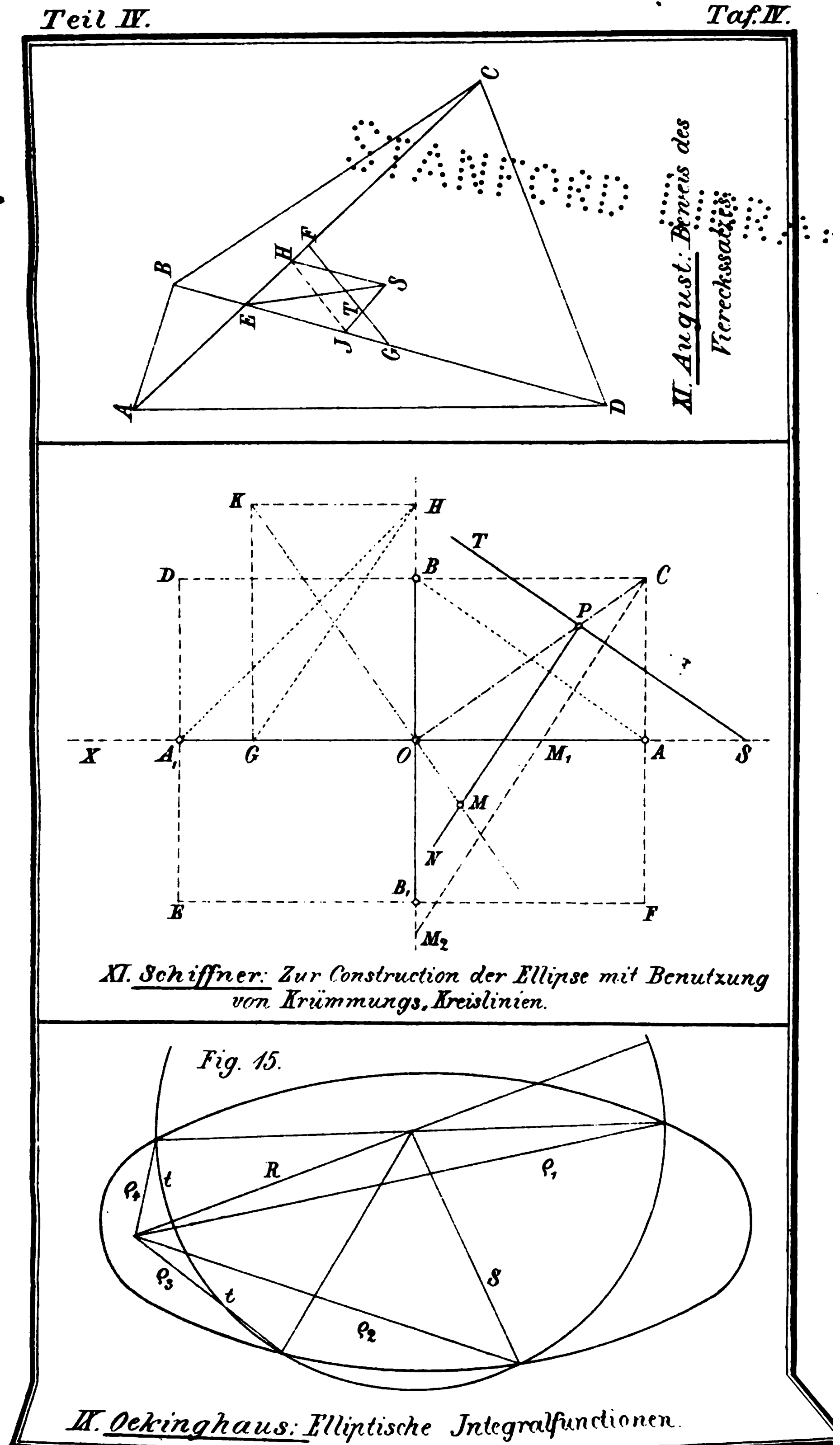
Fig. 33.

Fig. 34.

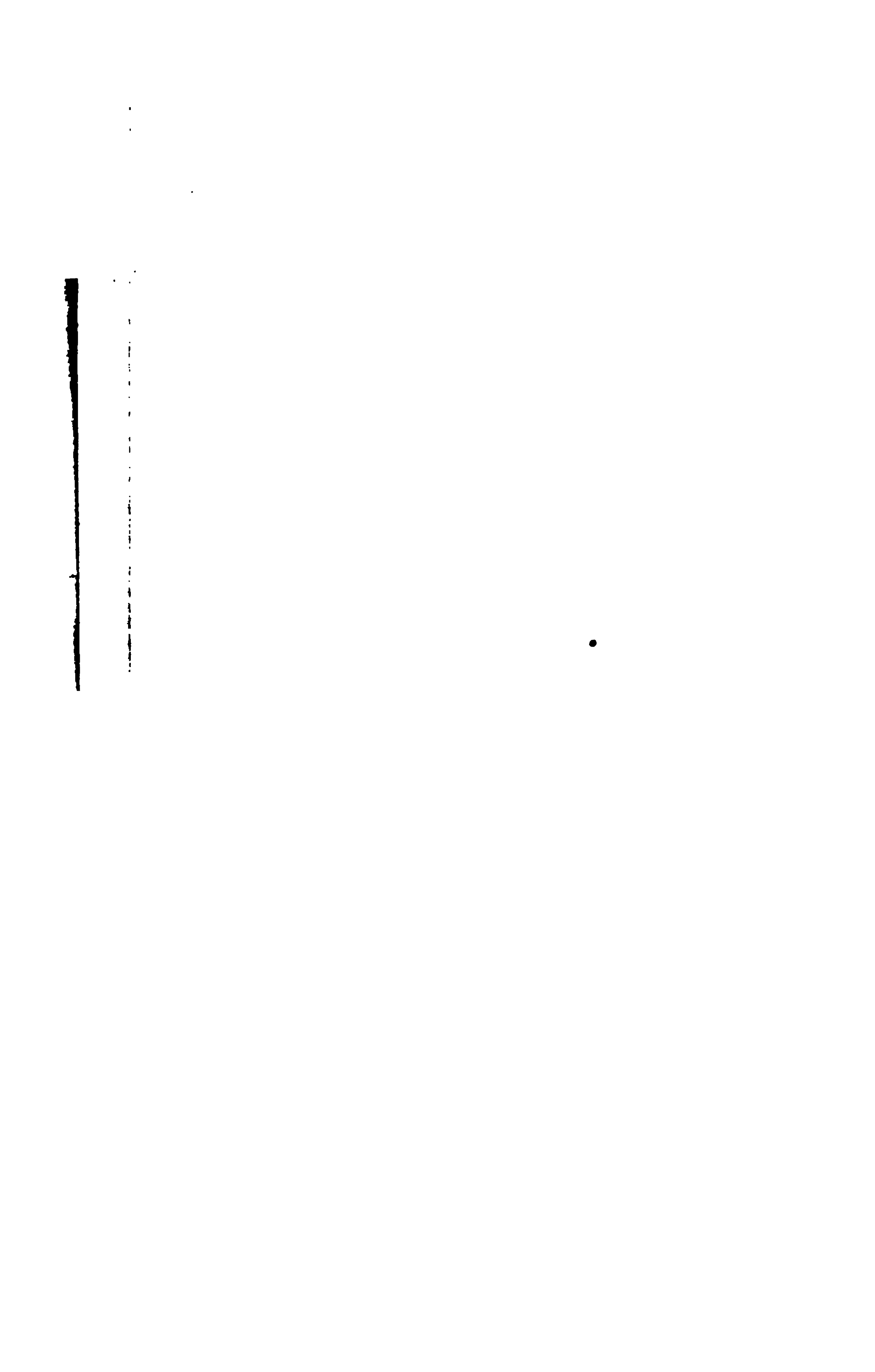
X. Schoute: Curven 4. Ordnung mit 3 Inflexionsknoten.

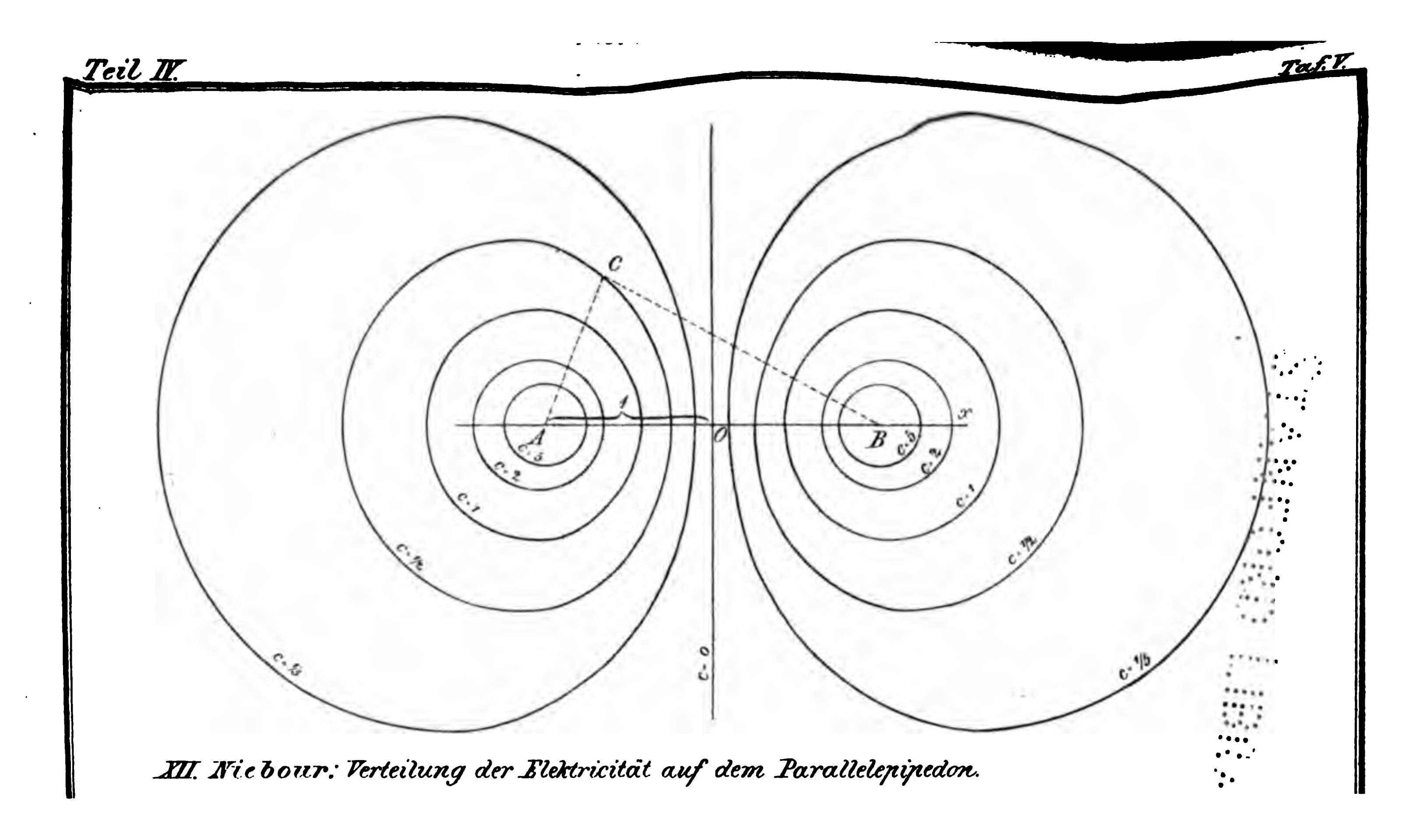
Lith. v. F. W. Kunike, Greifswald.

[redacted]

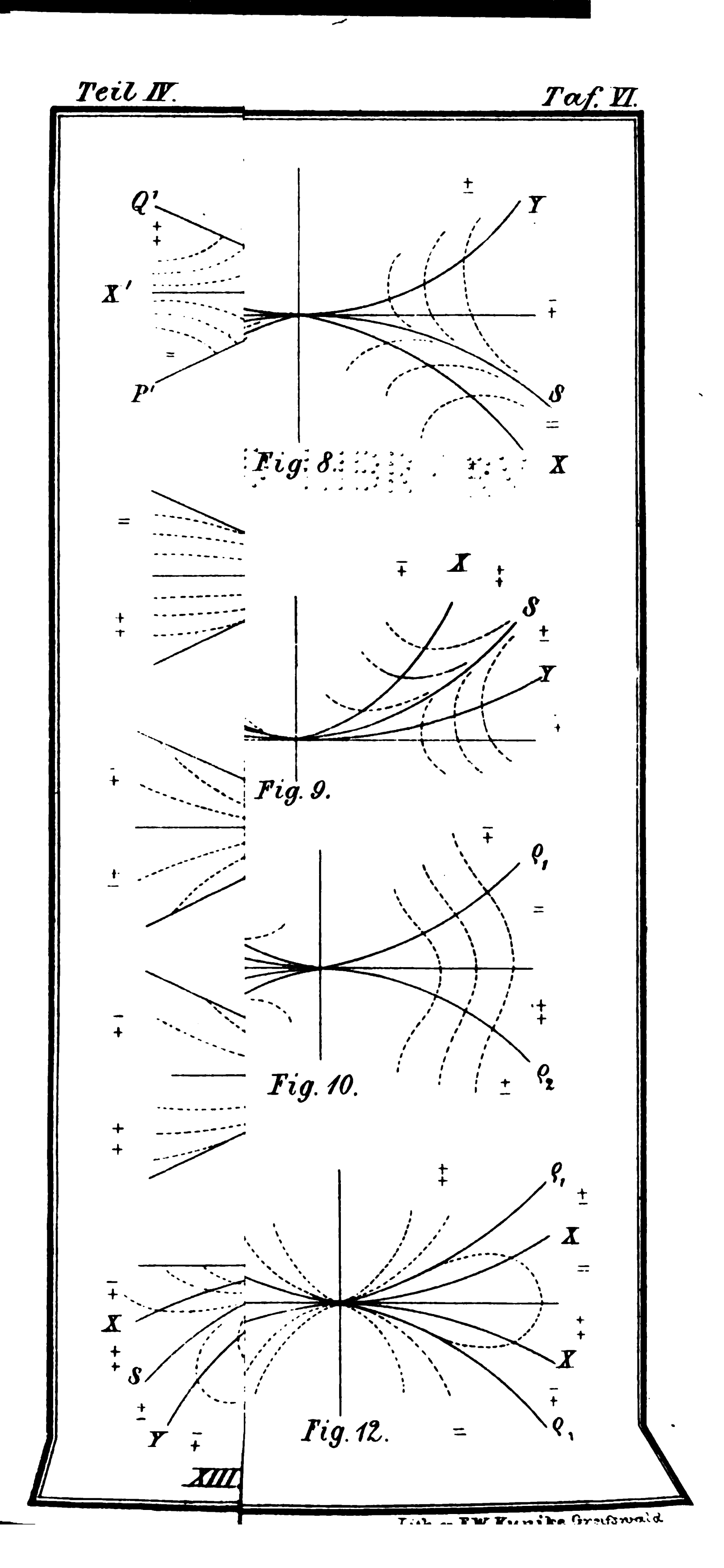


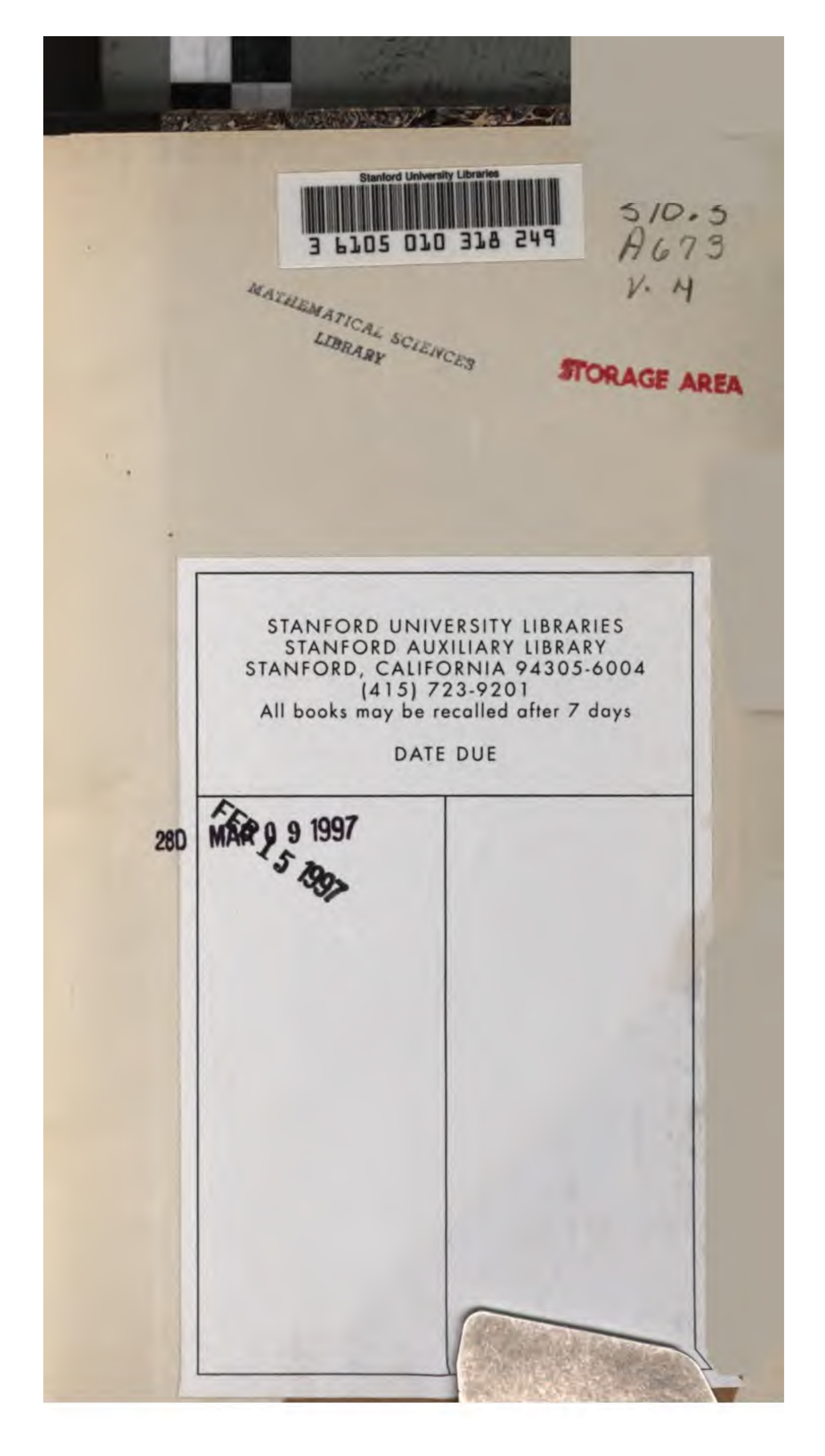
Teil IV.
Taf. IV.
C
B
F
H
S
E
T
J
G
A
D
XI. August: Beweis des Vierecksatzes.
K
H
T
D
B
C
P
X
A,
G
O
M,
A
S
M
N
B,
E
F
M2
XI. Schiffner: Zur Construction der Ellipse mit Benutzung von Krümmungs-Kreislinien.
Fig. 15.
R
t
ρ1
ρ4
ρ3
t
S
ρ2
IX. Oekinghaus: Elliptische Integralfunctionen.





XII. Niebour: Verteilung der Elektricität auf dem Parallelepipedon.


Teil IV.
Taf. VI.
Q'
X'
P'
Y
S
X
Fig. 8.
X
S
Y
Fig. 9.
ρ1
ρ2
Fig. 10.
ρ1
X
X
ρ1
X
S
Y
Fig. 12.
XIII



Stanford University Libraries
3 6105 010 318 249
510.5
A673
v. 4
MATHEMATICAL SCIENCES
LIBRARY
STORAGE AREA
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD AUXILIARY LIBRARY
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004
(415) 723-9201
All books may be recalled after 7 days
DATE DUE
FEB 0 9 1997
28D MAR 15 1997

